T.D. 5 - Fonctions de répartition, lois à densité

Exercice 1.

Indication : 1. On pourra écrire $\{Y_n \le t\} = \bigcap_{i=1}^n \{X_i \le t\}$ et utiliser l'indépendance des X_i.
2. On pourra écrire $\{Z_n \le t\} = \bigcup_{i=1}^n \{X_i \le t\}$ et exploiter le passage au complémentaire pour faire apparaître une intersection.

Exercice 2.

Indication : 1. Une fonction f_X est une densité si elle est positive (on en déduit c positif) et si $\int_{\mathbb{R}} f_X(x)dx = 1$. C'est cette dernière égalité que l'on exploitera pour isoler le c et ainsi déterminer sa valeur.
2. On rappelle que $F_X(t) := \mathbb{P}(X \le t) = \int_{-\infty}^t f_X(x)dx$.
3. De même on rappelle que pour X ayant une densité f_X :

$$\mathbb{P}(a \le X \le b) = \int_a^b f_X(x)dx$$

Exercice 3.

Indication : Dans les deux questions on utilisera la caractérisation d'une loi par la fonction de répartition. Par exemple si l'on pose $Y := aX$ pour la première question on cherchera à démontrer que $F_Y = F_Z$ où $Z \sim \mathcal{N}(0, a^2)$. Dans les deux questions, on trouvera un changement de variable adéquat à réaliser dans les intégrales.

Exercice 4.

Indication : 1. On modélisera la durée du trajet (en minutes) de la directrice par une variable aléatoire $X \sim \mathcal{N}(13, 3^2)$ et on cherchera à évaluer $\mathbb{P}(X > 15)$.
2. On fera de même avec l'assistant avec deux lois normales $Y \sim \mathcal{N}(16, 2^2)$ et $Z \sim \mathcal{N}(9, 1)$, la probabilité que l'assistant arrive à l'heure est alors donnée par $\mathbb{P}(Y \le 20, Z \le 10)$.
3. On utilisera directement l'indépendance par rapport aux événements des deux questions précédentes.

Exercice 5.

Indication : 1. Cela découle directement du cours.
2. On utilisera la formule pour calculer une probabilité conditionnelle classique et on exploitera la fonction de répartition en écrivant par exemple $P(X > u) = 1 - F_X(u)$.
3. On appliquera la question 2 avec les données de l'énoncé.

Exercice 6.

Indication : 1. On remarquera que :

$$\{Y \le t\} = \bigcup_{i=1}^n \{X_i \le t\}$$

2. On reconnaîtra une loi usuelle par sa fonction de répartition (classique) et ainsi son espérance et sa variance.
3. On remplacera par les données de l'énoncé les variables des questions précédentes.

Exercice 7.

Indication : 1. Comme dans l'exercice 2, on utilise la définition d'une fonction de densité. En particulier f_X positive implique que K est positif, et la deuxième condition permet de mieux caractériser K : on écrit l'équation $\int_{\mathbb{R}} f_X(x)dx = 1$ et on isole K dans cette équation.
2. On reconnaîtra une loi normale grâce à la factorisation $-(x-a)^2 = -x^2 + 2ax - a^2$.

Exercice 8.

Indication : 1. Le support est donné par $X(\Omega) = [0,1]$.
2. X n'est pas une variable discrète car elle prend un nombre non dénombrable de valeur dans l'intervalle $[0,1]$.
3. X n'est pas à densité en évaluant $\mathbb{P}(X = 1) \neq 0$.

Exercice 9.

Indication : On procédera comme dans la question 1 des exercices 2 et 7.