T.D. 8 - Estimation et Intervalles de confiance

Exercice 1.

Indication : 1. On utilisera la linéarité de l'espérance pour le calcul de $\mathbb{E}(\overline{X_n})$. On rappelle pour le calcul de la variance que si X et Y sont indépendantes, alors $\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$.
2. On pensera à appliquer la loi des grands nombres.
3. On pensera à appliquer le théorème central limite.
4. Pour une première manière, on fera apparaître $n\overline{X_n}$ en écrivant :

$$\mathbb{P}(\overline{X_n} \leq 1) = \mathbb{P}(n\overline{X_n} \leq n)$$

dont on continuera le calcul en remplaçant avec la loi de $n\overline{X_n}$. La deuxième manière sera judicieusement tiré du théorème central limite (question 3).

Exercice 2.

Indication : 1. On pensera à la loi des grands nombres pour la convergence presque sûre.
2. On pensera au théorème central limite dont l'on justifiera l'application.
3. On appliquera la question 2 en faisant apparaître la bonne expression dans le côté gauche de l'inégalité dans la probabilité.

Exercice 3.

Indication : 1. On supposera que le nombre d'excès de vitesse est indépendant d'un jour à l'autre et on sommera des lois de Poisson indépendantes.
2. On pourra utiliser le théorème central limite pour évaluer $\mathbb{P}(X > 1000)$ en partant du fait que :

$$\mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{n}(\overline{X_n} - \mu)}{\sigma} > z\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}(Z > z)$$

Et en remarquant qu'ici $n\overline{X_n} = X$, on choisira z ultérieurement pour bien évaluer $\mathbb{P}(X > 1000)$.

Exercice 4.

Indication : On appliquera le théorème du transfert pour calculer $\mathbb{E}[f(U_1)]$, puis on justifiera que I_n est bien un estimateur. Enfin, la consistance découlera de la loi des grands nombres.

Exercice 5.

Indication : 1. On pourra modéliser X par une loi binomiale en tant que somme de lois de Bernoulli indépendantes. On notera X_i ces variables suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p = 0.75$.
2. On appliquera le théorème central limite aux variables X_i et on raisonnera de manière analogue à la question 2 de l'exercice 3.

Exercice 6.

Indication : On pourra résoudre l'exercice en donnant un intervalle de confiance de niveau 0.1 avec la formule donnée dans le cours. On calculera en particulier l'écart-type sur les données de l'énoncé.

Exercice 7.

Indication : 1. Par rapport à la figure fournie avec l'énoncé, on modélisera X comme une somme de variables aléatoires X_i indépendantes qui suivent une loi de Rademacher généralisée. On introduira en particulier :

$$\mathbb{P}\left(X_i = \frac{1}{2}\right) = \mathbb{P}\left(X_i = -\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

On supposera également N pair. On pourra ensuite se ramener à des lois de Bernoulli en considérant les variables aléatoires $Y_i := X_i + \frac{1}{2}$. Comme $Y_i \sim \mathcal{B}(\frac{1}{2})$ avec X_i indépendantes, on déduit que la somme des Y_i est une loi binomiale. Enfin, on pourra donner facilement la loi de $X = \sum_{i=1}^{N} X_i = \sum_{i=1}^{N} Y_i - \frac{N}{2}$.
2. On appliquera le théorème central limite.
3. On obtiendra une courbe en cloche, caractéristique d'une loi gaussienne.