T.D. 1 - Espaces vectoriels complexes avec produit scalaire

Exercice 1.

Indication : 1. On suivra l'indication en développant par linéarité à gauche et anti-linéarité à droite l'expression de P. En particulier on trouvera un polynôme du second degré en la variable $t \in \mathbb{R}$ de coefficient dominant positif. On notera aussi que P est positive (par l'expression de départ) et on calculera son discriminant.
2. On montrera que $\langle \tilde{u}, \tilde{v} \rangle \in \mathbb{R}$ et on appliquera la première question aux vecteurs $\tilde{u}$ et $\tilde{v}$ à la place de u et v. En particulier on calculera les normes de $\tilde{u}$ et $\tilde{v}$ en fonction de celles de u et v.

Exercice 2.

Indication : 1. On commencera par écrire $u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$ avec $\alpha_i \in \mathbb{C}$, légitimé par l'écriture de u dans la base des (u_i). Puis on prendra le produit scalaire de cette expression avec un u_j pour $j \in [\![1, n]\!]$.
2. On écrira u et v sous forme de sommes grâce à la question 1 puis on développera par linéarité à gauche et anti-linéarité à droite le produit scalaire de u et v.
3. On appliquera la question 2 à un vecteur v bien choisi.

Exercice 3.

Indication : 1. On rappelle qu'une famille de vecteurs orthogonaux est libre, on en déduira une base de F et donc sa dimension.
2. On vérifiera que $p_F : E \to E$ et la linéarité de l'application p_F.
3. On cherchera les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un vecteur $u \in E$ vérifie $p_F(u) = 0$. En particulier on obtiendra des contraintes d'orthogonalités par rapport aux $u_i \in F$.
4. L'indication de l'énoncé prouve que $F \subset Im(p_F)$. On pourra commencer par écrire $u = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i u_i$ avec $\alpha_i \in \mathbb{C}$ pour montrer l'indication.
5. On reviendra à la définition de supplémentaire et on pourra invoquer le théorème du rang.

Exercice 4.

Indication : 1. On calculera les produits scalaires $\langle u, v \rangle$, $\langle u, w \rangle$ et $\langle v, w \rangle$ pour le produit scalaire canonique.
2. Pour le calcul des distances, on pourra calculer tout d'abord les distances au carré.
Par exemple : $d^2(u, v) := ||u - v||^2$ en écrivant $u - v = (-2i, i, 3i)$.
3. On vérifiera qu'il s'agit bien d'une base, la non orthogonalité proviendra de la question 1.
4. On appliquera la formule du cours pour la projection sur un sous-espace engendré par une famille orthogonale de vecteurs.
5. On pourra s'aider d'un dessin pour comprendre le rôle du vecteur $v - p_S(v)$, en particulier on remarquera que $p_S(v)$ est dans l'espace S et que $v - p_S(v)$ est orthogonal à cet espace.
6. On applique l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.
7. On pourra regarder l'exercice 1 pour l'identité de Plancherel.

Exercice 5.

Indication : 1. On calculera $T(1, 0, 0)$, $T(0, 1, 0)$ et $T(0, 0, 1)$. On calculera la matrice A^{-1} par la méthode du pivot de Gauss.
2. On vérifiera que $A^*A = AA^* = I_3$ où A^* est l'adjointe de A, i.e : $A^* = \overline{A}^t$.
3. On appliquera une propriété importante des matrices unitaires sur la préservation du produit scalaire.
4. On utilisera une propriété importante sur les lignes et colonnes d'une matrice unitaire.

Exercice 6.

Indication : On remarquera dans les deux cas que les matrices A et B sont hermitiennes. En conséquence, par le cours, les valeurs propres sont réelles et les sous-espaces propres deux à deux orthogonaux pour chacune des matrices A et B. Et en particulier, il existe une base orthonormale de vecteurs propres. Ainsi, il existe donc une matrice U unitaire telle que $U^{-1}AU$ soit diagonale. On cherchera donc à diagonaliser les matrices A et B par les méthodes classiques.