T.D. 2 - DFT : définitions et premières propriétés

Exercice 1.

Indication : 1. On utilisera la formule d'une somme géométrique et l'on veillera à distinguer le cas où la raison est égale à 1.
2. On montrera que $\langle \mathcal{E}_j, \mathcal{E}_k \rangle = 0$ pour $j, k \in [\![0, N-1]\!]$ tels que $j \neq k$. En particulier on déduira directement de l'orthogonalité, la liberté de la famille.
3. Il s'agit d'expliciter les expressions à l'aide de $\mathcal{E}_m(n) := e^{\frac{2i\pi mn}{N}}$, on retrouvera les expressions données dans le cours.
4. A nouveau les expressions sont dans le cours. On retiendra notamment que l'inverse s'obtient directement à partir de la formule :

$$W_N^{-1} = \frac{1}{N} W_N^*$$

Exercice 2.

Indication : On utilisera essentiellement le fait que $e^{2i\pi k} = 1$ pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$. Pour les calculs, on partira des expressions suivantes :

$$\hat{z}(m) := \sum_{k=0}^{N-1} z(k) e^{\frac{-2i\pi km}{N}} \quad \text{et} \quad \check{z}(n) := \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} z(k) e^{\frac{2i\pi kn}{N}}$$

que l'on évaluera en $m+N$ et $n+N$. L'extension des définitions s'obtiendra par N-périodicité qui découlera des calculs de $\hat{z}(m+kN)$ et $\check{z}(n+kN)$ pour $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 3.

Indication : 1. On rappelle que le conjugué d'une somme de nombres complexes est la somme des conjugués et que le conjugué du produit de nombres complexes est le produit des conjugués. On pourra raisonner par équivalence successives pour la deuxième partie de la question.
2. On pourra développer l'expression :

$$\hat{\hat{z}}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} \hat{z}(k) e^{\frac{-2i\pi kn}{N}}$$

3. On appliquera la question précédente. L'expression de W_N^4 s'obtient directement par l'expression trouvée pour son endomorphisme correspondant.
4. On se donnera une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ de DFT et un vecteur propre $z \in l_N \setminus \{0\}$ associé à λ. En particulier on évaluera pour ce vecteur z :

$$DFT^4(z)(n) = DFT^2 \circ DFT^2(z)(n)$$

grâce à la question 2. Puis l'on mettra le résultat obtenu en relation avec l'identité de la question 3.

Exercice 4.

Indication : 1. On distinguera le cas $n = 0$ des autres dans le calcul de :

$$\hat{z}(n) := \sum_{m=0}^{N-1} z(k) e^{\frac{-2i\pi mn}{N}}$$

On fera attention de ne pas indicer la sommation avec k qui est fixé dans l'énoncé. On donnera l'expression en fonction de sinus pour se rapprocher de la question suivante, en particulier on pensera à la factorisation par l'arc moitié.
2. On exprimera $|\hat{z}(n)|^2$ et on pensera à l'identité de Plancherel.

Exercice 5.

Indication : 1. Il s'agit d'un simple calcul matriciel avec la matrice W_4 donnée dans l'exercice 1 ou dans le cours.
2. Il s'agit à nouveau d'un calcul matriciel avec l'inverse obtenu dans l'exercice 1 ou dans le cours.

Exercice 6.

Indication : 1. On appliquera la définition de convolution du cours (def 2.33, p56).
2. On calculera $\hat{z}$ et $\hat{w}$, ainsi que $z \circledast w$ de la même manière que pour l'exercice 5 : i.e par calculs matriciels.
3. On calculera le produit $\hat{z}(m)\hat{w}(m)$ et on vérifiera qu'on retrouve le résultat de la question 2.

Exercice 7.

Indication : 1. On effectuera un changement de variable dans la première somme et l'on coupera la somme obtenue en fonction du moment où la nouvelle variable $(n+m)$ dépasse N. (Voir lemme 2.24 du cours).
2. Voir théorème 2.26 du cours.
3. Voir théorème 2.34 du cours.

Exercice 8.

Indication : 1. Il s'agit de discrétiser la formule de l'énoncé pour un pas de temps égal à 1.
2. On écrira dans un premier temps les cosinus et sinus figurant dans l'expression de $z(n)$ en termes d'exponentielles grâce aux formules d'Euler. Ensuite, on identifiera les valeurs des $\hat{z}(n)$ grâce à la formule de synthèse en se rappelant que les exponentielles forment une base.
3. et 4. Voir correction du TD au tableau.

Exercice 9.

Indication : On commencera à écrire $\rho(h)$ comme un produit scalaire. Puis on pourra appliquer la formule de Parseval et effectuer un changement de variable donnant le résultat.