T.D. 4 - DFT : matrices circulantes et opérateurs stationnaires

Exercice 1.

Indication : On écrira tout d'abord l'égalité matricielle $UX = A$ en k équations faisant intervenir les coefficients dans les matrices. Il s'agira ensuite de reconnaître un produit de convolution dans la forme de ces équations. On pourra en particulier se ramener à une écriture $u * x = a$. On utilisera ensuite une propriété importante de la transformée de Fourier relative à la convolution. Enfin, on pourra appliquer la formule de synthèse (c'est à dire faire une inversion de Fourier sur $\hat{x}$).

Exercice 2.

Indication : 1. On reconnaîtra un opérateur de décalage que l'on précisera.
2. On pourra se convaincre matriciellement de l'égalité en explicitant les matrices itérées J^k pour $k \in [\![1, n]\!]$. On peut aussi interpréter l'égalité en terme de décalages successifs grâce à la question 1.
3. On explicitera un polynôme annulateur de J grâce aux questions précédentes.
4. Simple calcul matriciel.
5. On pourra décomposer la forme générale d'une matrice circulante grâce aux matrices J^k.
6. On utilisera le résultat de la question 3 et la forme polynômiale trouvée à la question 5.
7. Il s'agira de rappeler essentiellement que la base est orthogonale.

Exercice 3.

Indication : 1. On rappelle que la convolution de deux éléments $z, w \in l_N$ est donnée par :

$$\forall n \in [\![0, N-1]\!] : \; z * w(n) := \sum_{k=0}^{N-1} z(n-k)w(k)$$

On poursuivra ce calcul avec $w = \delta$.
2. On pourra partir de la formule définissant le produit de convolution et on utilisera la linéarité des opérateurs dans les calculs. En particulier on retiendra la propriété de stationnarité $R_k T = T R_k$ qui sera utilisée dans un premier sens de l'équivalence et sera à démontrer dans le deuxième.

Exercice 4.

Indication : 1.a et 1.b. Dans chacun des cas, la matrice de l'opérateur est circulante car stationnaire. Donc il suffira de déterminer le premier vecteur colonne de la matrice. C'est à dire calculer Te_0 où e_0 est le premier vecteur de la base canonique usuelle. Ce premier vecteur donnera ainsi la réponse impulsionnelle h. On appliquera le cours pour justifier de l'écriture en terme d'opérateur de convolution et comme opérateur de multiplicateur de Fourier. En particulier on explicitera $\hat{h}$ que l'on calculera via $W_4 h$. On donnera l'interprétation fréquentielle du filtre en se référant à la page 69 du cours. D'après la partie du cours sur les opérateurs stationnaires (ou l'exercice 2), une matrice circulante se diagonalise dans la base orthogonale de Fourier, on en déduit à la fois les valeurs propres (données par les $\hat{h}(m)$) et la matrice de passage (donnée par W_4 car base de Fourier).
2. Il s'agit essentiellement de procéder comme à la question précédente. Il est intéressant de noter que l'on obtient des filtres qui ne sont pas des amplificateurs de fréquence pour les 2.b et 2.c.
3. On écrit le système sous forme matriciel et l'on procède comme aux questions précédentes en remarquant que l'on a bien une matrice circulante et que l'on peut appliquer la formule de diagonalisation dans la base de Fourier.
4. On remarque à nouveau que A est une matrice circulante, on la diagonalise comme précédemment.