T.D. 5 - Séries de Fourier

Exercice 1.

Indication : 1. 2. et 3. Ce sont des calculs d'intégrales usuels. Plusieurs méthodes sont possibles pour les calculer, une méthode rapide est d'utiliser les formules d'Euler : $\cos(nx) = \frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2}$ et $\sin(nx) = \frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i}$. Puis de calculer des intégrales d'exponentielles. On veillera à distinguer certains cas pour ne pas diviser par 0.
4. Cette question est la conclusion des précédentes modulo une normalisation.

Exercice 2.

Indication : 1. 2. Les formules sont dans le cours.
3. Il s'agit de la projection orthogonale sur $vect\,\{e_n \mid -N \leq n \leq N\}$
4. On utilisera les formules pour $n \geq 0$:

$$c_n(f) = \frac{a_n(f) - ib_n(f)}{2} \quad \text{et} \quad c_{-n}(f) = \frac{a_n(f) + ib_n(f)}{2}$$

5. On utilisera les formules pour $n \geq 1$:

$$a_n(f) = 2\frac{c_n(f) + c_{-n}(f)}{2} \quad \text{et} \quad b_n(f) = -2\frac{c_n(f) - ic_{-n}(f)}{2i}$$

On rappelle que $c_{-n}(f) = \overline{c_n(f)}$.

Exercice 3.

Indication : 1. Pour le prolongement par imparité, on pose $H(t) := -1$ pour $t \in]-\pi, 0[$, puis l'on a le choix pour les valeurs de $H(0)$ et $H(-\pi) = H(\pi)$ que l'on peut prendre égales à 0. Pour le prolongement par périodicité on pose pour tout $k \in \mathbb{Z}$: $H(x + 2k\pi) := H(x)$.
2. Simple calcul d'intégrale où l'on remarquera que $e^{in\pi} = e^{-in\pi} = (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4.

Indication : 1. On majorera la quantité $\left|\int_a^b e^{int}dt\right|$ par un terme en $o(1/n)$ pour faire tendre vers 0 par majoration.
2. La régularité est continue par morceaux et l'on pourra s'aider d'un graphe de la fonction f pour mieux comprendre sa construction.
3. On effectuera une intégration par parties (IPP) puis on appliquera le résultat de la question 2 à f' qui est continue par morceaux et 2π-périodique.

Exercice 5.

Indication : 1. Soit $f \in L^2_p(a, b)$ avec $a < b$ périodique de période $b - a$. Alors si l'on pose :

$$g(x) := f\left(\frac{b-a}{2\pi}w\right) = f\left(\frac{x}{w}\right)$$

On a définit une fonction g qui est 2π-périodique (le vérifier). Et l'on retrouve ainsi une fonction g qui est dans $L^2_p(0, 2\pi)$ et l'on peut transporter toute la théorie écrite pour les fonctions 2π-périodique pour les fonctions $b-a$ périodiques en remplaçant g par f et inversement par l'égalité ci-dessus.

2. Ce sont des calculs d'intégrales faits de nombreuses fois en TD. Il est cependant important de rappeler qu'il faut justifier à chaque fois que $f \in L^2_p(0, 2\pi)$ ou $f \in L^2_p(a, b)$ pour établir l'existence de l'intégrale $c_n(f)$ que l'on écrit dans les calculs. Les fonctions sont ici sont toutes périodiques, continues par morceaux et bornées sur leur intervalle de définition, ce qui suffit à justifier que $f \in L^2_p(0, 2\pi)$ ou $f \in L^2_p(a, b)$. On pourra utiliser le théorème de convergence normale pour la question d afin de calculer les sommes demandées. On évaluera en particulier la série de Fourier en un point précis.

Exercice 6.

Indication : Exercice de cours (L1, L2). La rédaction rigoureuse a été donnée en TD.

Exercice 7.

Indication : Exercice de calcul d'intégrales, on veillera à bien justifier avant même le calcul de l'existence de $c_n(f)$. C'est à dire qu'il faudra justifier que $f \in L^2_p(0, 2\pi)$: la périodicité et voir que f est de carré intégrable. Les fonctions de l'exercice sont toutes continues par morceaux et bornées sur leur intervalle de définition, cela suffit pour l'intégrabilité. Pour écrire f comme sa série de Fourier, on appliquera soit le théorème de convergence normale soit le théorème de Dirichlet en fonction des hypothèses vérifiées ou non par f.

Exercice 8.

Indication : 1. On justifiera comme dans l'exercice précédent que l'on peut calculer $c_n(f)$ et l'on trouvera :

$$c_n(f) = \frac{a(-1)^n sh(\pi a)}{\pi(a^2 + n^2)}$$

où sh est le sinus hyperbolique.
2. On justifiera l'application du théorème de convergence normale et l'on écrira $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \frac{sh(\pi a)}{\pi a} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2a(-1)^n sh(\pi a)}{\pi(a^2 + n^2)} cos(nx)$$

Puis en évaluant en $x = \pi$:

$$coth(a\pi) = \frac{1}{\pi a} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2a}{\pi(a^2 + n^2)}$$

où $coth$ est la cotangente hyperbolique $coth(x) := ch(x)/sh(x)$. D'où finalement :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a^2 + n^2} = \frac{\pi}{2a} \left[coth(\pi a) - \frac{1}{\pi a} \right]$$

Exercice 9.

Indication : Exercice similaire au précédent (exercice type), on trouvera $a_n(f) = \frac{2sin^2(nx)}{xn^2\pi}$ (notons ici que le x n'est qu'un paramètre fixé). Pour la deuxième série à calculer, comme l'on remarque une puissance 4 au dénominateur et que dans le coefficient de Fourier n'apparait qu'une puissance 2, il est judicieux d'appliquer l'égalité de Parseval pour mettre les coefficients de Fourier au carré et calculer la série.