T.D. 6 - Transformée de Fourier et applications aux EDPs

Exercice 1.

Indication : A chaque question de l'exercice, il faut justifier l'existence de la trasnformée de Fourier et donc vérifier que $g \in L^1(\mathbb{R})$.
1. On justifiera que g est intégrable car f l'est en effectuant le changement de variable $y = ax$ dans l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} |g(x)|dx$. Puis par le même changement de variable, on calculera : $\mathcal{F}(g)(w) := \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)e^{-iwx}dx$.
2. On justifiera que g est intégrable car f l'est en effectuant le changement de variable $y = x - b$ dans l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} |g(x)|dx$. Puis par le même changement de variable, on calculera : $\mathcal{F}(g)(w) := \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)e^{-iwx}dx$.
3. On justifiera que g est intégrable car f l'est en effectuant le changement de variable $y = ax - b$ dans l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} |g(x)|dx$. Puis par le même changement de variable, on calculera : $\mathcal{F}(g)(w) := \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)e^{-iwx}dx$.
4. On justifiera que g est intégrable car f l'est car $|g(x)| = |f(x)|$. Puis on calculera : $\mathcal{F}(g)(w) := \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)e^{-iwx}dx$.
5. On utilisera une intégration par parties sur le segment $[-A, A]$ puis l'on fera tendre A vers $+\infty$ en justifiant la convergence des intégrales (par exemple avec le théorème de convergence dominée).
6. Récurrence immédiate par rapport à la question précédente. On trouve $\mathcal{F}(f^{(n)})(w) = (iw)^n\mathcal{F}(f)(w)$.

Dans la résolution d'EDPs on utilise sans cesse :

$$\mathcal{F}(f'')(w) = -w^2\mathcal{F}(f)(w)$$

Exercice 2.

Indication : 1. On justifiera l'indication de l'énoncé par le théorème de Fubini-Tonelli avant de passer au changement de variable en coordonnées polaires.
2. On fera apparaître dans l'exponentielle de la transformée de Fourier le terme $-\frac{(t+iw)^2}{2}$ en rajoutant par multiplication une exponentielle adéquate. Enfin, on se servira de l'indication et du résultat de la question précédente.
3. On pourra se servir d'un résultat de l'exercice 1 avec des paramètres bien choisis.

Exercice 3.

Indication : 1. On oubliera pas de justifier pourquoi la transformée de Fourier existe (i.e. montrer que $f \in L^1(\mathbb{R})$. On trouve pour $w \neq 0$:

$$\mathcal{F}(f)(w) = AT sinc\left(\frac{wT}{2}\right)$$

où $sinc$ est le sinus cardinal. Et pour $w = 0$: $\mathcal{F}(f)(0) = AT$.
2. On pose $g(t) = f(t - t_0)$ avec $A := \frac{1}{T}$ et l'on reconnaît alors une translation, on applique l'exercice 1 avec la question précédente et l'on trouve :

$$\mathcal{F}(g)(w) = e^{-iwt_0} sinc\left(\frac{wT}{2}\right)$$

3. a. Voir TD, il s'agit de simplifier les indicatrices aux maximum en rappelant que le produit d'indicatrices donne l'indicatrice d'une intersection.
3. b. On en déduit donc que $\mathcal{F}(\beta_1) = (\mathcal{F}(\beta_0))^2$ et donc $\mathcal{F}(\beta_1)(w) = sinc^2\left(\frac{w}{2}\right)$.
3. c. Par récurrence on trouve pour $w \in \mathbb{R}$: $\mathcal{F}(\beta_n)(w) = sinc^{n+1}\left(\frac{w}{2}\right)$
4. On justifiera que f est bien intégrable (par critère de Riemann par exemple) et l'on trouve :

$$\mathcal{F}(f)(w) = \frac{2a}{a^2 + w^2}$$

Exercice 4.

Indication : Voir correction site de Monsieur Quentin Denoyelle.