Ergodicité et équidistribution des nilrotations

Charlie HÉRENT

Séminaire encadré par Bachir BEKKA - Université de Rennes I

Septembre - Décembre 2020

Résumé

On s'intéresse à la transformation issue de l'action d'un groupe G nilpotent sur son quotient G/Γ par translation à droite où Γ est un sous-groupe discret de G (on appellera cela une nilrotation). On étudiera la dynamique de cette transformation sous plusieurs aspects : ergodicité, unique ergodicité, mélange, équidistribution... Pour fixer les idées, on considère tout d'abord le groupe de Heisenberg classique de taille 3×3, puis on cherche à généraliser les résultats obtenus à des dimensions supérieures ainsi qu'aux nilsystèmes. Plusieurs résultats démontrés ici font l'objet d'exercices ouverts laissés au lecteur dans la référence [1].

Table des matières

Je tiens vivement à remercier Monsieur Bekka, qui m'a encadré pour le séminaire, pour son soutien et son cours tout au long du semestre qui fut très intéressant et inspirant.

1 Introduction au groupe de Heisenberg

Dans cette section nous introduisons le groupe de Heisenberg constitué des matrices 3×3. On généralisera ultérieurement le groupe pour des dimensions supérieures. On expose tout d'abord les premières propriétés du groupe et de son quotient : compacité, centre, groupe dérivé...

Définition 1. On appelle groupe de Heisenberg le groupe G suivant :

$$G := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

On note Γ son sous-groupe discret :

$$\Gamma := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & l & n \\ 0 & 1 & m \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid l, m, n \in \mathbb{Z} \right\}$$

Dans toute la suite on s'intéressera à la dynamique sur l'espace quotient $X := G\backslash\Gamma$ dont le domaine fondamental est :

$$F := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid 0 \leq a, b, c < 1 \right\}$$

Remarquons que $X := G\backslash\Gamma$ n'est pas un groupe. Cela se remarque simplement par le fait que Γ n'est un pas un sous-groupe normal de G, soit $x \notin \mathbb{Z}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \notin \Gamma$$

On note π la projection canonique sur le quotient :

$$\begin{aligned} \pi : \quad G &\longrightarrow X := G\backslash\Gamma \\ g &\longmapsto \Gamma g \end{aligned}$$

En définissant une métrique sur le groupe G et ensuite une métrique sur le quotient par rapport à cette première métrique, on peut montrer que π est continue (assez long et technique). On peut aussi plus simplement définir la topologie de G comme celle de $\mathbb{R}^3$ en identifiant G et $\mathbb{R}^3$. Ensuite on peut définir la topologie sur X par $\mathcal{B}_X$ en imposant : une partie U de X est ouverte si et seulement si $\pi^{-1}(U)$ est une partie ouverte de G. Cela donne directement la continuité de π.

Propriété 1. *L'espace quotient $X := G\backslash\Gamma$ est compact.*

Démonstration. On définit un sous-ensemble compact K par :

$$K := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid 0 \leq x, y, z \leq 1 \right\}$$

Soit $g := \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$. On note par $\{\cdot\}$ la partie fractionnaire et par $\lfloor \cdot \rfloor$ la partie entière.
Il vient :

$$\begin{pmatrix} 1 & -\lfloor x \rfloor & 0 \\ 0 & 1 & -\lfloor y \rfloor \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} 1 & \{x\} & z' \\ 0 & 1 & \{y\} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} := g'$$

La matrice g' ne possède donc plus que le coefficient z' qui n'est pas forcément dans $[0,1]$, on fait donc :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\lfloor z' \rfloor \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} g' = \begin{pmatrix} 1 & \{x\} & \{z'\} \\ 0 & 1 & \{y\} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in K$$

Cela démontre donc que $\pi(K) = X$ et comme l'image d'un compact par une application continue est compact : X est compact. $\square$

Propriété 2. *Le groupe dérivé de G noté $D(G)$ est :*

$$D(G) := [G, G] := \langle [g, h] \mid g, h \in G \rangle = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\}$$

Démonstration. On a par définition du commutateur : $[g,h] := g^{-1}h^{-1}gh$.
On pose $g := \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$ et $h := \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$. Le calcul du commutateur donne :

$$[g,h] = \begin{pmatrix} 1 & -x & xy-z \\ 0 & 1 & -y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -a & ab-c \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & bx-ay \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ce qui termine la preuve. $\square$

Propriété 3. *Le centre de G noté $Z(G)$ est :*

$$Z(G) := \{g \in G \mid gh = hg \ \forall h \in G\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} = D(G)$$

Démonstration. Soit $g \in Z(G)$, donc $\forall h \in G$ $[g,h] = I_3$ (matrice identité). Par le calcul effectué dans la démonstration de la propriété 2 cela signifie que $\forall a, b \in \mathbb{R} : bx - ay = 0$.
Donc $x = y = 0$ et g s'écrit : $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Réciproquement, si g est de la forme précédente alors le même calcul montre que le commutateur est nul. D'où l'égalité entre $Z(G)$ et $D(G)$. $\square$

On considère désormais le morphisme surjectif de groupe :

$$\phi_G : \begin{array}{l} G \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longmapsto (a,b) \end{array}$$

Par la propriété 3 il est clair que son noyau est $Z(G)$ et l'on déduit alors par 1er théorème d'isomorphisme :

$$G/Z(G) \simeq \mathbb{R}^2$$

Cela nous donne une information importante sur le groupe de Heisenberg : il est pas très loin d'être abélien !
En effet $Z(G) = D(G)$ est abélien et $G/Z(G)$ aussi. On définit cette propriété remarquable ci-dessous :

Définition 2. Un groupe G est dit 2-**nilpotent** si $Z(G)$ et $G/Z(G)$ sont abéliens.
On définit la suite récurrente $G_{n+1} := [G_n, G]$ pour $n \geq 1$ avec convention $G_1 = G$.
Pour $k \geq 3$, on dit que G est k-**nilpotent** si G_k est le premier terme de la suite à être trivial (i.e. $G_k = \{Id\}$).

En reprenant le morphisme de groupe ϕ_G, on peut remarquer que $\phi_G(\Gamma) = \mathbb{Z}^2$. Donc par théorème d'isomorphisme, on a :

$$\Gamma Z(G)/Z(G) \simeq \mathbb{Z}^2$$

Puis par ce qui précède

$$\frac{(G/Z(G))}{(\Gamma Z(G)/Z(G))} \simeq \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \simeq \mathbb{T}^2$$

On peut voir cela comme l'action de $Z(G)/\Gamma \cap Z(G) \simeq \mathbb{T}$ sur X par multiplication à droite, soit $x = \Gamma g \in X$ et $\gamma \in \Gamma \cap Z(G)$, on a :

$$R_\gamma x := x\gamma^{-1} = \Gamma g \gamma^{-1} = \Gamma \gamma^{-1} g = x$$

Cela permet d'identifier l'application :

$$\Gamma \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto (a,b) \mod \mathbb{Z}^2$$

avec l'application de projection sur le quotient :

$$\phi_X : X := G\backslash\Gamma \to \frac{(G/Z(G))}{(\Gamma Z(G)/Z(G))} \simeq \mathbb{T}^2$$

2 Nilrotations et dynamique

On désignera de manière générale par *nilrotation* toute rotation étudiée dans un quotient par un groupe nilpotent. Dans cette lecture on se restreindra au groupe de Heisenberg et ses généralisations qui sont des groupes nilpotents comme mis en lumière dans la partie 1.

On se fixe $\tau := \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \delta \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$ et l'on considère l'action de G sur son quotient $X := G\backslash\Gamma$ par translation à droite par τ. On notera abusivement cette action par l'application S :

$$\begin{aligned} S:\ & X \longrightarrow X \\ & x \longmapsto x\tau \end{aligned}$$

Le but de ce sujet de séminaire est d'étudier cette transformation d'un point de vue dynamique : ergodicité, unique ergodicité, mélange...
Pour étudier cette dynamique, il convient de considérer un système préservant une mesure de probabilité associé à X et S. On peut considérer la mesure de Haar normalisée de G notée m_G comme image de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^3$ par l'application :

$$(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto M_{x,y,z} := \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$$

Lemme 0. *La mesure m_G sur G le groupe de Heisenberg est bien une mesure de Haar.*

Démonstration. Soit $\phi \in C_c^0(G)$ fonction continue à support compact, en fixant $x', y', z' \in \mathbb{R}$ on a :

$$\int_{\mathbb{R}^3} \phi(M_{x',y',z'}M_{x,y,z})dxdydz = \int_{\mathbb{R}^3} \phi(M_{x+x',y+y',z+z'+xy})dxdydz = \int_{\mathbb{R}^3} \phi(M_{x,y,z})dxdydz$$

La dernière égalité étant obtenue par changement de variable de jacobien égal à 1. On a de même par calcul similaire :

$$\int_{\mathbb{R}^3} \phi(M_{x,y,z}M_{x',y',z'})dxdydz = \int_{\mathbb{R}^3} \phi(M_{x,y,z})dxdydz$$

Donc la mesure m_G est bien invariante à droite et à gauche, c'est une mesure de Haar. $\square$

Lemme 1. *Il existe une mesure de probabilité m_X sur X qui est S-invariante*

Démonstration. On note abusivement τ comme élément de X (on prend en réalité sa réduction $\bar{\tau}$). On définit $\phi : G \to X$ par $\phi(g) := g \cdot \tau$ pour tout $g \in G$ (où $\cdot$ désigne l'action de groupe de G sur X décrite précédemment). On pose $m_X := \phi_*(m_G)$ et notant $\mathcal{B}_X$ l'ensemble des boréliens de X on peut vérifier l'invariance de la mesure par S, soit $g \in G$ et $A \in \mathcal{B}_X$:

$$\begin{aligned} m_X(S^{-1}(A)) &:= m_X(A\tau^{-1}) \\ &= m_G(\phi^{-1}(A\tau^{-1})) \\ &= m_G(\phi^{-1}(A) \cdot \tau^{-1}) \\ &= m_G(\phi^{-1}(A)) \quad \text{(Propriété mesure de Haar)} \\ &:= m_X(A) \end{aligned}$$

Et donc m_X est bien S-invariante. $\square$

On peut donc considérer le système préservant une mesure de probabilité $(X, \mathcal{B}_X, m_X, S)$. On se focalisera dans cette partie sur le théorème suivant :

Théorème (principal). *Pour la transformation $S(x) := x\tau$ sur X, on a équivalence entre :*
(i) S est uniquement ergodique.
(ii) S est ergodique relativement à m_X
(iii) Avec les notations de la matrice τ : $1, \alpha, \beta$ sont linéairement $\mathbb{Q}$-indépendants.

2.1 Résultats préliminaires

L'application de projection sur le quotient ϕ_X à la toute fin de la partie 1 nous incite à considérer le système $(\mathbb{T}^2, \mathcal{B}_{\mathbb{T}^2}, m_{\mathbb{T}^2}, T)$ où $m_{\mathbb{T}^2}$ est la mesure de Lebesgue sur le tore et où T est la rotation usuelle :

$$\begin{aligned} T : \quad & \mathbb{T}^2 \longrightarrow \mathbb{T}^2 \\ & (a, b) \longmapsto (a + \alpha, b + \beta) \mod \mathbb{Z}^2 \end{aligned}$$

On rappelle le résultat suivant démontré dans le cours de M2 de théorie ergodique :

Lemme 2. *Soit $k \geq 1$ et $(\alpha_1, \cdots, \alpha_k) \in \mathbb{R}^k$, alors l'application :*

$$\begin{aligned} T : \quad & \mathbb{T}^k \longrightarrow \mathbb{T}^k \\ & (x_1, \cdots, x_k) \longmapsto (x_1 + \alpha_1, \cdots, x_k + \alpha_k) \mod \mathbb{Z}^k \end{aligned}$$

est ergodique si et seulement si elle est uniquement ergodique si et seulement si $\{1, \alpha_1, \cdots, \alpha_k\}$ sont linéairement $\mathbb{Q}$-indépendants (i.e. la famille est libre sur $\mathbb{Q}$).

On aimerait bien utiliser ce résultat pour l'appliquer, même partiellement, à la transformation S du théorème principal. Pour cela on peut tout d'abord remarquer que le système $(\mathbb{T}^2, \mathcal{B}_{\mathbb{T}^2}, m_{\mathbb{T}^2}, T)$ est un facteur du système $(X, \mathcal{B}_X, m_X, S)$. On peut identifier $m_{\mathbb{T}^2}$ à la mesure image de m_X par ϕ_X et on a le diagramme commutatif suivant qui est facile à vérifier par l'identification de ϕ_X à la fin de la partie 1 :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "S"] \arrow[d, "\phi_X"'] & X \arrow[d, "\phi_X"] \\ \mathbb{T}^2 \arrow[r, "T"] & \mathbb{T}^2 \end{tikzcd}$$

On peut maintenant démontrer le lemme :

Lemme 3. *Si S est ergodique alors T est ergodique.*

Démonstration. Soit $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{C}$ mesurable telle que $f \circ T = f$ $m_{\mathbb{T}^2}$-p.s. Montrons que f est constante $m_{\mathbb{T}^2}$-p.s, on aura donc l'ergodicité de T. On a par le diagramme l'égalité : $T \circ \phi_X = \phi_X \circ S$. En composant par f à gauche il vient :

$$f \circ T \circ \phi_X = f \circ \phi_X \circ S$$

Donc par hypothèse :

$$f \circ \phi_X = f \circ \phi_X \circ S$$

Puis en posant $g := f \circ \phi_X$, on a donc $g = g \circ S$ et par ergodicité de S : g est constante m_X-p.s. On en déduit donc que f est constante $m_{\mathbb{T}^2}$-p.s. $\square$

Remarque 1. En combinant le lemme 3 avec le lemme 2, on a donc montré une partie du théorème principal : $(i) \implies (ii) \implies (iii)$.

Proposition 1. *Soit G un groupe que l'on suppose agir sur X (comme défini précédemment ou comme un nilsystème[1]) par translation à droite. On retranscrit à nouveau abusivement cette action par la transformation à $g \in G$ fixé :*

$$S: \begin{array}{l} X \longrightarrow X \\ x \longmapsto xg \end{array}$$

On suppose que S est ergodique relativement à une mesure m_X G-invariante. Alors S est unique ergodique sur X.

Démonstration. On adapte la démonstration du théorème de Furstenberg issue du cours. Soit $E \subset X$ l'ensemble des points génériques pour m_X :

$$E := \{x \in X \mid x \text{ est générique pour } (S, m_X)\}$$

Comme S est m_X-ergodique, on sait que $m_X(E) = 1$ par le cours.
On montre la proposition par récurrence sur l'indice de nilpotence de G. Si G est 1-nilpotent, i.e. $G = \{Id\}$ alors le résultat est trivial. On suppose donc vraie l'hypothèse de récurrence au rang r. On suppose que G est $(r+1)$-nilpotent (i.e. $G_{r+1} = \{Id\}$), montrons donc que le résultat est vrai au rang $r+1$. On considère l'application projection :

$$\pi_r : X \to X/G_r := X_r$$

On pose $Q := \pi_r(E)$. Soit $x \in X$ générique pour (S, m_X) ; cela signifie que :

$$\forall f \in C(X), \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(S^n(x)) = \int_X f dm_X \quad (*)$$

Montrons tout d'abord la stabilité de E par multiplication par G_r, i.e : $G_rE = E$. Soit $x \in E$ et $c \in G_r$, comme $[G_r, G] = G_{r+1} = \{Id\}$ on en déduit que c commute avec tout élément de G. Vérifions que cx est aussi générique pour (S, m_X). En appliquant $(*)$ avec $f_c(x) := f(cx)$:

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f_c(S^n(x)) = \int_X f_c dm_X = \int_X f dm_X$$

La dernière égalité résultant du fait que m_X est G-invariante. Comme de plus $S^n(x) = xg^n$ on obtient :

$$f_c(S^n(x)) = f_c(xg^n) = f(cxg^n) = f(S^n(cx))$$

Et on en déduit donc que cx est générique et donc $G_rE = E$. Autrement dit, on a $E = \pi_r^{-1}(Q)$.
Soit ν une mesure sur X ergodique et S-invariante. Par hypothèse de récurrence G agit de manière uniquement ergodique sur X_r. Donc les projections de m_X et ν sur X_r coïncident. Il vient donc :

$$\nu(E) = \nu(\pi_r^{-1}(Q)) = m_x(\pi_r^{-1}(Q)) = m_X(E) = 1$$

Or, encore une fois, comme ν est S-invariante et ergodique sur X, par le cours on a qu'il existe $X' \subset X$ tel que $\nu(X') = 1$ et tel que pour tout $x \in X'$, x est générique pour (S, ν). On a donc $\nu(X' \cap E) = 1$, ce qui implique $X' \cap E \neq \emptyset$. C'est à dire qu'il existe $x \in X' \cap E$ donc x est générique pour (S, ν) et (S, m_X) i.e :

$$\forall f \in C(X), \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(S^n(x)) = \int_X f dm_X \text{ et } \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(S^n(x)) = \int_X f d\nu$$

Cela signifie que $m_X = \nu$, c'est à dire l'unique ergodicité. □

Remarque 2. Grâce à cette proposition, si l'on montre $(iii) \implies (ii)$ dans le théorème principal, on aura donc également $(iii) \implies (ii) \implies (i)$ ce qui terminera sa preuve via la remarque 1.

1. Voir partie 3 pour la définition de nilsystème.

2.2 Première démonstration du théorème principal

On termine dans cette sous-section une première preuve du théorème principal. Par la remarque 2, il nous reste donc seulement à montrer que $(iii) \implies (ii)$. On suppose donc $1, \alpha, \beta$ linéairement $\mathbb{Q}$-indépendants. Soit $f \in L^2(X)$ une fonction S-invariante, on va montrer que f est constante m_X-presque partout. On note défini un élément de $L^2(X)$ noté $U_g f$ par $(U_g f)(x) := f(g^{-1} \cdot x)$. On admet que l'on peut montrer (de manière analogue au cours) que $||U_g f||_2 = ||f||_2$ et que $g \mapsto U_g f$ est continue de G dans $L^2(X)$. On définit les coefficients matriciel :

$$m(g) := \langle U_g f, f \rangle$$

Par ce qui précède, m est donc une fonction continue sur G. Remarquons tout d'abord l'invariance par conjugaison des itérés de τ, pour tout $g \in G$ et tout $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} m(\tau^n g \tau^{-n}) &= \int_X f(x\tau^n g \tau^{-n}) \overline{f(x)} dm_X \\ &= \int_X f(yg\tau^{-n}) \overline{f(y\tau^{-n})} dm_X \quad \text{(car } m_X \text{ est } \tau\text{-invariante)} \\ &= \int_X f(yg) \overline{f(y)} dm_X \quad \text{(car } f \text{ est } S\text{-invariante)} \\ &= m(g) \end{aligned}$$

On pose maintenant $g := \begin{pmatrix} 1 & \epsilon & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et calculons $\tau^n g \tau^{-n}$:

$$\tau^n g \tau^{-n} = \begin{pmatrix} 1 & n\alpha & \binom{n}{2}\alpha\beta + n\delta \\ 0 & 1 & n\beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \epsilon & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -n\alpha & \binom{n+1}{2}\alpha\beta - n\delta \\ 0 & 1 & -n\beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \epsilon & -n\epsilon\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On fixe $t \in \mathbb{R}$ et l'on choisi $n_\epsilon := \lfloor \frac{t}{\epsilon\beta} \rfloor$ de sorte que $n_\epsilon \epsilon \beta \to t$ lorsque $\epsilon \to 0$. Par ce qui précède, on a :

$$m(\tau^{n_\epsilon} g \tau^{-n_\epsilon}) = m\left(\begin{pmatrix} 1 & \epsilon & -n_\epsilon\epsilon\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = m\left(\begin{pmatrix} 1 & \epsilon & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

En passant à la limite lorsque $\epsilon \to 0$, il vient :

$$m\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & -t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = m\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = ||f||_2^2$$

Cela signifie par la description de $Z(G)$ en partie 1 que : $\forall h \in Z(G) : \langle U_h f, f \rangle = \langle f, f \rangle$. Le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz impose que $U_h f = f$, on en déduit donc que f est $Z(G)$-invariante. Par propriété universelle des structures quotients il existe une fonction F sur $\mathbb{T}^2$ telle que : $f = F \circ \phi_X$. Comme f est S-invariante, on en déduit que F est T-invariante et donc constante $m_{\mathbb{T}^2}$-p.p par ergodicité de T. Donc f est constante m_X-p.p, cela démontre que S est ergodique relativement à m_X.

2.3 Une transformation non faiblement mélangeante

Cette démonstration précédente du théorème principal permet de trouver toutes les fonctions propres associées à la transformation $S : X \to X$ lorsqu'elle est ergodique. Comme on va le voir, on obtient que S n'est pas à spectre continu et donc que la transformation est non faiblement mélangeante (et donc non mélangeante).

Proposition 2. *Soit λ une valeur propre associée à une fonction propre $f \in L^2(X)$ de la transformation S, i.e : $f \circ S = \lambda f$. On suppose que S est ergodique, alors f s'écrit $F \circ \phi_X$ où F est une fonction propre pour l'action de S sur le tore quotient $\mathbb{T}^2$.*

Démonstration. Tout d'abord, par le cours $f \mapsto f \circ S$ est une isométrie de $L^2(X)$, donc en déduit que nécessairement $|\lambda| = 1$.
Soit donc f une fonction propre associée à λ de module 1. En reprenant toute la première preuve du théorème principal, seule la S-invariance de f est mise en défaut ici, cependant on a par récurrence $f \circ S^{-n}(x) = \lambda^{-n} f(x)$. Donc le passage utilisant cela dans la preuve devient :

$$\begin{aligned}
m(\tau^n g \tau^{-n}) &= \int_X f(x\tau^n g\tau^{-n})\overline{f(x)}dm_X \\
&= \int_X f(yg\tau^{-n})\overline{f(y\tau^{-n})}dm_X \quad (\text{car } m_X \text{ est } \tau\text{-invariante}) \\
&= \int_X \lambda^{-n} f(yg)\overline{\lambda^{-n} f(y)}dm_X \quad (\text{car } f \circ S^{-n}(x) = \lambda^{-n} f(x)) \\
&= \int_X f(yg)\overline{f(y)}dm_X \quad (\text{car } (\lambda^{-n})\overline{\lambda^{-n}} = |\lambda|^{-n} = 1) \\
&= m(g)
\end{aligned}$$

La suite de la preuve donne que $f = F \circ \phi_X$. On peut donner les fonctions propres de T sur $\mathbb{T}^2$ qui sont les caractères $\chi_{n_1,n_2} : (x_1, x_2) \mapsto e^{2\pi i(n_1 x_1 + n_2 x_2)}$ quand (n_1, n_2) parcourt $\mathbf{Z}^2$; le caractère χ_{n_1,n_2} est fonction propre pour la valeur propre $e^{2\pi i(n_1\alpha + n_2\beta)}$. □

2.4 Deuxième démonstration du théorème principal

On donne en annexe les grandes lignes d'une deuxième démonstration ne faisant pas référence à la proposition 1.

2.5 Contre-exemple : Une nilrotation non ergodique

On donne un exemple de cas où $1, \alpha, \beta$ ne sont plus linéairement $\mathbb{Q}$-indépendants, et donc la transformation S n'est plus ergodique. Soit $\tau := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. La transformation S devient :

$$S\left(\Gamma \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \Gamma \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \Gamma \begin{pmatrix} 1 & a & c + a\beta \\ 0 & 1 & b + \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On peut donner une description plus précise de la nouvelle transformation sur le domaine fondamental F en supposant $a, b, c \in [0, 1[$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\lfloor c + a\beta \rfloor \\ 0 & 1 & -\lfloor b + \beta \rfloor \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a & c + a\beta \\ 0 & 1 & b + \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a & \{c + a\beta\} \\ 0 & 1 & \{b + \beta\} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette équation montre donc que pour tout $a \in [0, 1[$ l'ensemble X_a défini par :

$$X_a := \Gamma \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid b, c \in [0, 1[\right\}$$

est invariant par S et l'on peut donc identifier la restriction de S à X_a avec la rotation du tore $\mathbb{T}^2$:

$$(b, c) \mapsto (b + \beta, c + a\beta) \mod \mathbb{Z}^2$$

Or on sait grâce au lemme 2 que cette transformation est ergodique si et seulement si elle est uniquement ergodique si et seulement si $1, \beta, a\beta$ sont linéairement $\mathbb{Q}$-indépendants. De plus, on peut remarquer que :

$$X_a = \Gamma \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} H$$

est une orbite du groupe $H := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid b, c \in \mathbb{R} \right\}$. On peut donc démontrer la proposition suivante :

Proposition 3. *Soit β irrationnel, on définit encore $S : X \to X$ par :*

$$S : x \mapsto x \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Alors pour tout $x \in X$, l'orbite $\overline{\{S^n x \mid n \geq 1\}}$ est égale xL pour L un sous-groupe fermé de H contenant $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. De plus si $x := \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ vérifie $1, \beta, a\beta$ linéairement $\mathbb{Q}$-indépendants, alors la transformation S restreinte à xL est uniquement ergodique et en particulier le point x est générique pour l'unique mesure de probabilité L-invariante sur xL.

Démonstration. Par ce qui précède la proposition, il suffit d'écrire L comme $xL = X_a$. La discussion donne aussi le fait que la restriction de S est uniquement ergodique sur xL. On note m_x l'unique mesure de probabilité L-invariante sur xL. Par le cours on sait que pour m_x-presque tout point est générique pour (S, m_x) car S ergodique. Donc si x n'est pas générique, il s'ensuit que $\forall n \geq 1$, $S^n x$ n'est pas générique : donc presque tout point de $xL = \overline{\{S^n x \mid n \geq 1\}}$ serait non générique : absurde. Ainsi, x est générique. $\square$

On peut énoncer et démontrer de manière similaire la proposition :

Proposition 4. *Soit β irrationnel, on définit encore $S : X \to X$ par :*

$$S : x \mapsto x \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Alors pour tout $x \in X$, l'orbite $\overline{\{S^n x \mid n \geq 1\}}$ est égale xL pour L un sous-groupe fermé de H contenant $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. De plus si $x := \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ vérifie $\frac{1}{2}, \beta, a\beta$ linéairement $\mathbb{Q}$-indépendants, alors la transformation S restreinte à xL est uniquement ergodique et en particulier le point x est générique pour l'unique mesure de probabilité L-invariante sur xL.

3 Généralisation aux nilsystèmes

Définition 3. On appelle *nilespace*, l'espace quotient $X := G \backslash \Gamma$ où G est un groupe (de dimension finie en tant que groupe de Lie) nilpotent et Γ un sous-groupe discret. Lorsque X est compact, on parle de *nilvariété*. Enfin, lorsque de plus on peut regarder X comme un système préservant une mesure de probabilité avec un opérateur de la forme de S, on parle de *nilsystème*.

On peut généraliser la notion de groupe de Heisenberg via le groupe H_n constitué des matrices de tailles $(n+2)\times(n+2)$:

$$H_n := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n & z \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & y_1 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & y_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & y_n \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n, z \in \mathbb{R} \right\}$$

Remarquons qu'on retrouve notre groupe G du début avec H_1. On peut aussi remarquer que H_n est toujours un groupe 2-nilpotent et que :

$$D(H_n) := [H_n, H_n] = Z(H_n) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & z \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\}$$

Une autre généralisation du groupe de Heisenberg est le groupe :

$$U := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 1 & a_{23} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{(n-2)n} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 & a_{(n-1)n} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a_{ij} \in \mathbb{R} \ \forall (j-i) \geq 1 \right\}$$

Mais cette fois-ci, U n'est pas 2-nilpotent mais $(n-1)$-nilpotent, en effet :

$$U_2 := [U, U] = \{ I + (a_{ij})_{ij} \mid a_{ij} \in \mathbb{R} \text{ et } a_{ij} = 0 \ \forall (j-i) < 2 \}$$

$$U_3 := [U_2, U] = \{ I + (a_{ij})_{ij} \mid a_{ij} \in \mathbb{R} \text{ et } a_{ij} = 0 \ \forall (j-i) < 3 \}$$

Puis en itérant, il vient : $U_{(n-1)} = \{I\}$. On peut encore définir le sous-groupe discret :

$$\Gamma := \{ I + (a_{ij})_{ij} \mid a_{ij} \in \mathbb{Z} \text{ et } a_{ij} = 0 \ \forall (j-i) < 1 \}$$

On peut encore définir la transformation S sur $X := G \backslash \Gamma$ issue de l'action d'un groupe nilpotent G par translation à droite : $S(x) := xg$ pour un $g \in G$ fixé. On pose alors :

$$\tau := \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n & \delta \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \beta_1 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \beta_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \beta_n \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Théorème (Généralisation du théorème principal pour H_n). *Pour la transformation précédente $S(x) := x\tau$ sur X avec $G = H_n$, on a équivalence entre :*
(i) S est uniquement ergodique.
(ii) S est ergodique relativement à m_X
(iii) Avec les notations de la matrice τ : $1, \alpha_1, \cdots, \alpha_n, \beta_1, \cdots, \beta_n$ sont linéairement $\mathbb{Q}$-indépendants.

Démonstration. On reprend toute la première démonstration du théorème principal, notons simplement que le $(2n)$-tore $\mathbb{T}^{2n}$ est ici le facteur du système par l'application de projection sur le quotient :

$$\phi_X : X := G\backslash\Gamma \to \frac{(G/Z(G))}{(\Gamma Z(G)/Z(G))} \simeq \mathbb{T}^{2n}$$

apparentée à l'application :

$$\Gamma \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n & z \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & y_1 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & y_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & y_n \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto (x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n) \mod \mathbb{Z}^{2n}$$

Le reste de la preuve est alors identique grâce au lemme 2 avec $k = 2n$. Seul le calcul $\tau^n g \tau^{-n}$ est à généraliser. En notant que :

$$\tau^p := \begin{pmatrix} 1 & p\alpha_1 & p\alpha_2 & \cdots & p\alpha_n & p\delta + \binom{p}{2}\sum_{i=1}^n \alpha_i\beta_i \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & p\beta_1 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & p\beta_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & p\beta_n \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et son inverse :

$$\tau^{-p} := \begin{pmatrix} 1 & -p\alpha_1 & -p\alpha_2 & \cdots & -p\alpha_n & -p\delta + \binom{p+1}{2}\sum_{i=1}^n \alpha_i\beta_i \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -p\beta_1 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -p\beta_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & -p\beta_n \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le calcul de $\tau^p g \tau^{-p}$ avec une matrice g similaire à la première démonstration donne une matrice dont tous les coefficients non diagonaux tendent vers 0 quand $\epsilon \to 0$ sauf le coin supérieur droit dont le coefficient est $-p\epsilon\beta_1$. On peut alors conclure comme dans la première preuve. $\square$

On définit un ensemble de couples d'indices :

$$\mathcal{I} := \left\{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \mid j - i > 1 \text{ et } (i,j) \neq (1,n)\right\}$$

qui permet donc de parcourir les coefficients d'une matrice de U en exceptant le coefficient dans le coin supérieur droit. On note maintenant $\tau := \{I + (u_{ij})_{ij} \mid u_{ij} \in \mathbb{R} \text{ et } u_{ij} = 0\ \forall (j-i) < 1\} \in U$. On peut alors énoncer :

Théorème (Généralisation du théorème principal pour U). *Pour la transformation précédente $S(x) := x\tau$ sur X avec $G = U$, on a équivalence entre :*
(i) S est uniquement ergodique.
(ii) S est ergodique relativement à m_X
(iii) Avec les notations de la matrice τ : 1 et tous les u_{ij} pour $(i,j) \in \mathcal{I}$ sont linéairement $\mathbb{Q}$-indépendants.

Démonstration. Démonstration similaire au théorème précédent en notant que $Z(U) = Z(H_n)$ (exercice classique) et que l'application de projection sur le quotient devient en notant $G_2 := [G, G]$:

$$\phi_X : X := G\backslash\Gamma \to \frac{(G/G_2)}{(\Gamma G_2/G_2)} \simeq \mathbb{T}^\gamma \quad \text{avec } \gamma := \frac{n(n-1)}{2} - 1 = \#\mathcal{I}$$

qui s'apparente à :

$$\Gamma \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 1 & a_{23} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{(n-2)n} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 & a_{(n-1)n} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto (a_{ij})_{(i,j)\in\mathcal{I}} \mod \mathbb{Z}^\gamma$$

□

Remarque 3. Ma preuve à la proposition 2 reste inchangée pour le groupe H_n et le groupe U. On en déduit donc que les transformations ci-dessous ne sont pas mélangeantes.

On peut également prouver le théorème précédent grâce à la généralisation suivante pour les nilsystèmes :

Théorème (Généralisation du théorème principal aux nilsystèmes). *Soit $(X, S) := (G\backslash\Gamma, x \mapsto xg)$ un nilsystème avec G connexe et simplement connexe. En notant $G_2 := [G, G]$, on peut définir le facteur de Kronecker $X_2 := \frac{(G/G_2)}{(\Gamma G_2/G_2)}$. On a équivalence entre :*
(i) S est uniquement ergodique.
(ii) S est ergodique relativement à m_X
(iii) La transformation sur X_2 induite par S est ergodique.

Démonstration. La preuve du lemme 3 avec X_2 à la place de T montre que $(ii) \implies (iii)$. Donc il est clair que $(i) \implies (ii) \implies (iii)$. La proposition 1 montre que $(ii) \implies (i)$. La référence de Terence Tao [4] page 340 (théorème 2.16.18.) montre qu'on a équivalence entre $(ii) \Leftrightarrow (iii)$. Le théorème est donc prouvé. □

Remarque 4. Les hypothèses de connexité et de simple connexité peuvent être enlevées avec plus de travail comme on peut le voir dans [5].

Proposition 5 (Equidistribution des orbites)**.** *Si une des conditions du théorème principal (ou de ses généralisations) est vérifiée, alors pour tout $x \in X$ l'orbite $(S^n x)_{\in\mathbb{Z}}$ est équidistribuée.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer l'équivalence du cours lorsqu'une transformation est uniquement ergodique : pour toute fonction $f \in C(X)$ on a $\forall x \in X$:

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N-1} f(S^n x) = \int_X f dm_X$$

Ce qui donne l'équidistribution des orbites. □

4 Conclusion

Nous avons pu nous familiariser avec le groupe de Heisenberg dans la partie 1 où nous avons posé les bases pour analyser la dynamique. En outre, on a vu qu'il était intéressant de considérer le tore comme facteur du système pour en déduire des propriétés d'ergodicité. En particulier, j'ai démontré la proposition 1 en partie 2 en généralisant la démonstration d'un théorème du cours. Cette généralisation est applicable non seulement dans le contexte des groupes de Heisenberg mais aussi aux nilsystèmes dans leur généralité comme on l'a vu en partie 3. Enfin, nous avons pu donner deux démonstrations (dont une en annexe) du théorème principal, puis nous l'avons généralisé aux nilsystèmes. Ce théorème conclut sur l'unique ergodicité de la transformation de départ. On peut en déduire en proposition 2 un résultat qui n'était pas dans les références à étudier : la transformation est non faiblement mélangeante, comme conséquence du théorème principal. Nous avons pu également constater que lorsqu'il n'y a pas unique ergodicité sur l'espace général, il y a quand même une structure d'unique ergodicité locale à travers les propositions 3 et 4. Enfin, pour conclure, on peut retenir que la transformation étudiée tout au long du rapport possède de bonnes propriétés d'ergodicité, n'est pas mélangeante et que les orbites en chaque point sont équidistribuées.

5 Annexe

On donne ici les grandes lignes d'une deuxième démonstration ne faisant pas référence à la proposition 1. On considère toujours $1, \alpha, \beta$ linéairement $\mathbb{Q}$-indépendants et on se donne μ une mesure de probabilité S-invariante et ergodique sur X. On montre que $\mu = m_X$. On aura besoin du lemme suivant :

Lemme 4. *Soit $S : X \to X$ une application continue sur un espace métrique compact X muni d'une mesure de probabilité μ ergodique et S-invariante. Soit $R : X \to X$ une autre application continue qui commute avec S. Si il existe $x \in X$ qui est (S, μ)-générique et tel que $R(x)$ soit aussi (S, μ)-générique, alors R préserve μ.*

Démonstration. Soit $f \in C(X)$, il suffit de montrer que :

$$\int_X f \circ R d\mu = \int_X f d\mu$$

Par continuité de R, on a $f \circ R \in C(X)$ et comme x est (S, μ)-générique il vient :

$$\begin{aligned}
\int_X f \circ R d\mu &= \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=0}^{N-1} f(RS^n x) \quad (\text{car } f \circ R \in C(X)) \\
&= \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=0}^{N-1} f(S^n Rx) \quad (\text{car } RS = SR) \\
&= \int_X f d\mu \quad (\text{car } Rx \text{ est générique})
\end{aligned}$$

Ce qui démontre le lemme. □

Soit x, x' deux points "assez proches" dans X de telle sorte que il existe $g \in G$ proche de l'identité tel que $x' = xg$ (on dira que g est un déplacement entre x et x'). On va regarder la dynamique de ces points sous S en posant $g := \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Comme on a $Sx = x\tau$ et $Sx' = x'\tau$ on remarque que le nouveau déplacement entre Sx et Sx' est donné par $\tau^{-1} g \tau$ puisque :

$$Sx(\tau^{-1} g \tau) = (x\tau)(\tau^{-1} g \tau) = x'\tau = Sx'$$

En itérant, on obtient :

$$S^n x' = (S^n x)(\tau^{-n} g \tau^n)$$

Remarquons que la dynamique montre que les points s'écartent lorsque $g_n := (\tau^{-n} g \tau^n)$ devient grand pour n grand :

$$\tau^{-n} g \tau^n = \begin{pmatrix} 1 & -n\alpha & \binom{n+1}{2}\alpha\beta - n\delta \\ 0 & 1 & -n\beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & n\alpha & \binom{n}{2}\alpha\beta + n\delta \\ 0 & 1 & n\beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a & c + n(a\beta - b\alpha) \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si $a\beta - b\alpha = 0$ alors le déplacement entre les points reste constant : $g_n = g$, sinon les points s'écartent de manière linéaire.
Comme μ est S-ergodique, on sait d'après le cours que l'ensemble E des points (S, μ)-génériques est de mesure

pleine $\mu(E)=1$ donc il existe un compact $K\subset E$ tel que $\mu(K)>0.99$.
On se place dans le cas où les points s'écartent de manière linéaire i.e. $a\beta-b\alpha\neq 0$ et que g est très proche de l'identité. On suppose donc que g_n est très proche de $\begin{pmatrix}1&0&t\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\in Z(G)$ pour un $t\in\mathbb{R}$ fixé. On peut aisément vérifier que si les points de départ x et x' sont génériques alors $S^n x$ et $S^n x'$ le sont aussi. Ici, ces deux derniers points diffèrent donc approximativement d'un élément de $Z(G)$. On aimerait prendre la limite des points $S^n x$ et $S^n x'$ pour des valeurs de n telles que le déplacement entre les points est proche de $\begin{pmatrix}1&0&t\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ tout en garantissant que les points restent génériques. On aimerait pouvoir appliquer le lemme 4, pour cela on a besoin que $S^n x$ et $S^n x'$ soient dans K mais en général l'ensemble des point génériques n'est pas fermé. On peut néenmoins appliquer le théorème maximal ergodique à l'ensemble $B:=X\backslash K$ et l'on obtient l'ensemble :

$$X_1:=\left\{x\in X \mid \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\mathbb{1}_K(S^n x)\geq 0.9\ \forall N\in\mathbb{N}^*\right\}$$

qui vérifie donc $\mu(X_1)>0.9$. Donc si l'on choisit x et x' dans X_1 on peut montrer que pour la plus part (au moins 80%) des entiers $n\in[0,N-1]$, $S^n x$ et $S^n x'$ sont dans K. On admet que l'on peut trouver pour tout $\epsilon_l:=\frac{1}{l}>0$ deux points x_l et x_l' dans X_1 avec un déplacement :

$$g^{(l)}:=\begin{pmatrix}1&a_l&c_l\\0&1&b_l\\0&0&1\end{pmatrix}$$

tel que $|a_l|,\ |b_l|,\ |c_l|<\frac{1}{l}$ avec $a_l\beta-b_l\alpha\neq 0$. Soit $t>0$, on peut définir :

$$N_l:=\left\lfloor\frac{t}{|a_l\beta-b_l\alpha|}\right\rfloor$$

Pour au moins 80% des $n_l\in[0,N_l-1]$ on a $S^{n_l}x, S^{n_l}x'\in K$. On prend $n_l\in[\frac{N_l-1}{2},N_l-1]$, on obtient donc pour l assez grand : $\frac{t}{3}<|a_l\beta-b_l\alpha|n_l\leq t$. On prend alors une suite $l_i\to+\infty$ telle que : $S^{n_{l_i}}x\to z\in K$ et $S^{n_{l_i}}x'\to z'\in K$ avec $\tau^{-n_{l_i}}g^{(l_i)}\tau^{n_{l_i}}\to c:=\begin{pmatrix}1&0&t'\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ avec $|t'|\in[\frac{t}{3},t]$. Par le lemme 4, μ est préservée par c. Comme $t>0$ est quelconque on obtient que μ est invariante par un sous-groupe de $Z(G)$. On peut montrer qu'alors μ est $Z(G)$-invariante. Comme $(\phi_X)_*\mu$ est T-invariante sur $\mathbb{T}^2$ et par hypothèse sur $1,\alpha,\beta,T$ est uniquement ergodique (lemme 2). D'où : $(\phi_X)_*\mu=m_{\mathbb{T}^2}$ et l'on obtient $\forall f\in C(X)$:

$$\int_X f d\mu=\int_{\mathbb{T}}\int_X f(xc)d\mu(x)dm_{\mathbb{T}}(c)=\int_X\int_{\mathbb{T}} f(xc)dm_{\mathbb{T}}d\mu=\int_X\int_{\mathbb{T}} f(xc)dm_{\mathbb{T}}dm_X=\int_X f dm_X$$

La première égalité étant obtenue par la $Z(G)$-invariance, la deuxième par Fubini, la troisième en notant que $(\phi_X)_*\mu=(\phi_X)_*m_X$. Donc $\mu=m_X$ ce qui termine la seconde preuve.

Références

[1] **M. Einsiedler et T. Ward** , *Ergodic Theory : With a View Towards Number Theory*, Springer, 2010, Chapitre 10.

[2] **T. Tao**, *Poincarés legacies : pages from year two of a mathematical blog*, American Mathematical, 2009.

[3] **B. Bekka**, *Notes de cours manuscrites*, Cours de M2 - Théorie ergodique et systèmes dynamiques.

[4] **A. Debreil**, *Groupes finis et treillis de leurs sous-groupes*, Calvage & Mounet, 2016.

[5] **A. Leibman**, *Pointwise convergence of ergodic averages for polynomial sequences of translations on a nilmanifold*, Ergodic Theory Dynam. Systems 25, 2005, no. 1, pp. 201-213.