

Marches aléatoires sur les groupes et bord de Poisson

Charlie HÉRENT

Stage encadré par Anna ERSCHLER - DMA ENS Paris

Mai - Juillet 2019

Résumé

L'étude des marches aléatoires sur les groupes a débuté dans la deuxième partie du XXe siècle et se poursuit de nos jours. La motivation pour une telle étude est double, il s'agit de trouver des invariants probabilistes par utilisation de la théorie des groupes, mais aussi à partir d'informations probabilistes déduire des propriétés algébriques sur des groupes. Nous présenterons tout d'abord, le cadre général de la théorie, puis nous détaillerons l'étude sur deux grandes familles de groupes. Nous évoquerons également les recherches actuelles dans cette théorie à travers particulièrement de nouveaux outils pour décrire le bord de Poisson. Enfin, nous donnerons quelques utilisations de la théorie.

Table des matières

1	Introduction	2
2	Cadre d'étude	3
2.1	Marche aléatoire sur un groupe	3
2.1.1	Notations utiles	4
2.1.2	Une mesure de probabilité sur l'espace des trajectoires G^∞	4
2.1.3	Rappels sur la récurrence et la transience d'une marche aléatoire	5
2.2	Bord de Poisson d'une marche aléatoire	6
2.2.1	Fonctions μ -harmoniques et propriété de Liouville	6
2.2.2	Bord de Poisson dans les cas abéliens, nilpotents, moyennables	7
2.2.3	Préliminaires pour l'étude du bord sur un produit en couronne	10
3	Bord de Poisson d'une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^d \wr \mathbb{Z}$	12
3.1	Méthode des points de coupures	12
3.2	Description complète du bord	21
4	Bord de Poisson d'une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^d \wr (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$	22
4.1	Conjecture de Kaimanovich-Vershik	22
4.2	Critère entropique	23
4.3	Description complète du bord	24
5	Quelques utilisations de la théorie des marches aléatoires sur les groupes	25
5.1	Réseau électrique et théorie du potentiel	25
5.2	Étude de l'équation de Poisson	26
5.3	Équation de Schrödinger discrète en milieu aléatoire sur \mathbb{Z}	27
6	Conclusion	29

Je tiens vivement à remercier Madame Erschler, qui m'a encadré pour le stage, pour son soutien et sa grande disponibilité. Je souhaite également remercier le personnel de l'ENS de Paris qui m'a très bien accueilli pendant les deux mois de stage et notamment Madame Elmîr pour sa grande gentillesse.

1 Introduction

Les recherches autour du concept de marche aléatoire dans sa globalité sur un groupe commencèrent dans les années 1950 avec notamment les travaux de H. Kesten (1959) et U. Grenander (1963) qui ont posé les bases de la théorie en s'intéressant notamment aux marches aléatoires symétriques et dans des cas abéliens. Depuis l'étude de la théorie dans le cas abéliens notamment avec les travaux de F. Spitzer (1964), il y a eu de nombreuses avancées dans cette branche des mathématiques qui s'insère dans la théorie des groupes, la théorie ergodique ou encore la théorie des probabilités.

Un problème qui s'est posé dans le développement de cette théorie est de pouvoir décrire le comportement asymptotique des marches aléatoires en fonction de la nature du groupe et de la mesure qui s'y attache. Pour ce faire, il fut introduit la notion de *bord* d'une marche aléatoire et plusieurs types de bord furent décrits. Ils furent introduits dans les travaux de H. Fustenberg (1974). La définition de bord qui nous intéressera dans notre travail sera celle de bord de Poisson où il sera question de sa trivialité ou non.

Plusieurs outils furent introduits dans les années 1970 afin d'explicitier des critères de trivialité du bord de Poisson. À cet effet on peut noter le critère entropique que l'on retrouve dans les travaux précurseurs de A. Avez (1972), V. A. Kaimanovich et A. M. Vershik (1979) et J. M. Rosenblatt (1981).

Les recherches actuelles dans ce domaine portent toujours sur la question de la description du bord de Poisson pour certains types de groupes, plus exotiques que ceux traités dans les années 1970. De nombreuses recherches ont porté sur les groupes construits sur un produit en couronne. Une conjecture importante de Kaimanovich et Vershik (qui est un objectif principal de ce stage) fut notamment démontrée au cours de la dernière décennie grâce aux travaux de A. Erschler (2011) ou encore ceux de R. Lyons et Y. Peres (2017).

Enfin, outre le double intérêt d'obtenir des propriétés algébriques et/ou probabilistes, le développement des marches aléatoires dans son cadre général sur les groupes, fut motivé aussi pour des questions physiques. On peut à cet égard citer particulièrement les problèmes liés à la théorie du potentiel et réseaux électriques par C. St J. A. Nash-Williams dès 1959 ou encore des équations de convolutions par G. Choquet et J. Deny au début des années 1960.

On présentera tout d'abord le cadre d'étude des marches aléatoires en partie 2. Cela consistera à introduire toutes les définitions et premières propriétés d'étude classique d'une marche aléatoire sur un groupe donné. Dans cette même partie, nous définirons notamment le concept de bord de Poisson qui est un outil central pour l'étude asymptotique d'une marche aléatoire. Nous présenterons à cet effet plusieurs résultats non démontrés en section 2.2.2 permettant de reconnaître le bord de Poisson dans des cas usuels : abélien, nilpotents, moyennables. Nous définirons aussi le produit en couronne de deux groupes afin d'aborder dans la partie 3 l'étude complète du bord de Poisson d'une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^d \wr \mathbb{Z}$. Dans la partie 4, nous détaillerons, de la même manière, l'étude sur $\mathbb{Z}^d \wr (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ en procédant par analogie avec la partie précédente et en précisant les différences notables. En finalité, nous illustrerons en partie 5, l'intérêt de la théorie des marches aléatoires sur des groupes par divers exemples liés à la physique.

2 Cadre d'étude

Nous donnerons tout d'abord quelques notions qui vont définir le cadre de notre étude à travers notamment le concept de marche aléatoire sur un groupe. Puis nous aborderons le concept de *bord d'une marche aléatoire*, outil central dans l'étude de cette dernière.

2.1 Marche aléatoire sur un groupe

Dans la totalité de ce mémoire, les marches aléatoires seront étudiées sur des groupes discrets, au plus dénombrables. Toutefois, on peut généraliser la notion de marches aléatoires pour des groupes localement compacts. L'ingrédient principal dans les deux cas étant la nécessité de mettre une mesure de Haar et la compacité locale est l'hypothèse principale pour son existence.

En outre, il nous sera toujours possible de mettre une mesure¹ sur les groupes que l'on considèrera.

Définition 1. Un groupe G muni d'une mesure μ sera noté (G, μ) .

- On note $\text{supp}(\mu)$ le support de la mesure μ défini par :

$$\text{supp}(\mu) := \{g \in G \mid \mu(g) > 0\}$$

- On notera $\check{\mu}$ la réflexion de la mesure μ comme étant définie par :

$$\forall g \in G, \check{\mu}(g) := \mu(g^{-1})$$

- On dira que la mesure μ est *non dégénérée* sur G si le semi-groupe engendré par son support est G . Notons que le semi-groupe engendré par un sous-ensemble A de G est composé des éléments de la forme $a_1 *_G \cdots *_G a_k$ où $a_i \in A$ et $*_G$ la loi de G .
- On dira que la mesure μ est *irréductible* sur G si le groupe engendré par son support est G . Notons que le groupe engendré par un sous-ensemble A de G est composé des éléments de la forme $a_1^{\pm 1} *_G \cdots *_G a_k^{\pm 1}$ où $a_i \in A$ et $*_G$ la loi de G .
- On dira que la mesure μ est *finie* si $\text{supp}(\mu)$ est fini.
- On dira que la mesure μ est *symétrique* si $\mu = \check{\mu}$

Définition 2. Une marche aléatoire (droite) sur (G, μ) est une chaîne de Markov homogène à temps discret avec pour espace d'état G et probabilités de transitions :

$$\forall x, y \in G, p(x, y) := \mu(x^{-1}y)$$

Où l'on note $p(x, y)$ la probabilité de transition entre x et y .

Remarque 1. • On parle d'une marche aléatoire car l'on ne spécifie pas la distribution initiale sur G pour le moment.

- On peut également définir le concept de marche aléatoire gauche en prenant pour probabilités de transitions :

$$\forall x, y \in G, p_{\text{Gauche}}(x, y) := \mu(yx^{-1})$$

On retrouve :

$$p_{\text{Gauche}}(x^{-1}, y^{-1}) = \mu(y^{-1}x) = \check{\mu}(x^{-1}y)$$

Donc, l'étude de marche aléatoire gauche se réduit à celle de marche aléatoire droite en remplaçant μ par $\check{\mu}$. Par la suite, on sous-entendra marche aléatoire droite quand on parlera de marche aléatoire.

Exemple 1. Si l'on prend $G = \mathbb{Z}$ et $\mu = \frac{1}{2}\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_1$ on retrouve la marche aléatoire canonique sur \mathbb{Z} . Notons qu'ici les inverses sont des opposés par le fait que le groupe est additif. Remarquons aussi que la mesure est symétrique, finie, non dégénérée et irréductible. On verra plus tard qu'une telle marche aléatoire est *récurrente*.

1. Les mesures seront considérées positives.

Exemple 2. Si l'on prend encore $G = \mathbb{Z}$ et $\mu = \delta_1$, on ne fait qu'avancer vers la droite avec probabilité 1. On ne visite au plus qu'une seule fois chaque point de \mathbb{Z} et donc la marche aléatoire est *transiente*. D'où l'importance de bien considérer le couple (G, μ) lorsqu'on parle de marche aléatoire, car l'on peut changer radicalement de comportement en changeant la mesure. Notons qu'ici la mesure est irréductible mais dégénérée.

Pour étudier le comportement asymptotique des marches aléatoires, il est nécessaire de définir plusieurs espaces dans lesquels s'inscrivent les trajectoires de nos marches.

Définition 3. • On appelle *espace des trajectoires* associé à G l'ensemble $G^\infty := \prod_{k=0}^{+\infty} G$ muni de la topologie produit. Un élément $x \in G^\infty$ s'écrit $x = (x_0, x_1, \dots)$ et désigne une trajectoire.

• On appelle *espace des incréments* associé à (G, μ) l'ensemble $G^{\mathbb{N}^+} := \prod_{k=1}^{+\infty} G$ muni de la tribu

produit et de la mesure produit notée $\mu^{\otimes \mathbb{N}^+}$.

Dans cet espace, les applications coordonnées sont des variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées (i.i.d.), de loi commune μ .

2.1.1 Notations utiles

- On note C_n les applications coordonnées de G^∞ sur G :

$$\begin{aligned} C_n : G^\infty &\longrightarrow G \\ x = (x_0, x_1, \dots) &\longmapsto x_n \end{aligned}$$

- On désigne par *sous-ensemble cylindrique du point $g \in G$* l'ensemble :

$$C_g^n := C_n^{-1}(g) = \{x \in G^\infty \mid C_n(x) = g\}$$

C'est à dire l'ensemble des trajectoires qui passent par le point $g \in G$ à l'instant $n \in \mathbb{N}$.

- On peut généraliser cette notation :

$$C_{g_1, \dots, g_k}^{n_1, \dots, n_k} := \bigcap_{i=1}^k C_{g_i}^{n_i} = \{x \in G^\infty \mid C_{n_i}(x) = g_i \forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket\}$$

C'est à dire l'ensemble des trajectoires qui passent par les points $g_i \in G$ respectivement aux instants $n_i \in \mathbb{N}$ avec $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$.

2.1.2 Une mesure de probabilité sur l'espace des trajectoires G^∞

Si l'on se donne une distribution initiale θ sur G , on peut munir l'espace des trajectoires G^∞ associé à (G, μ) d'une mesure de probabilité notée θP^μ définie en tant que mesure image de la mesure $\theta \otimes \mu^{\otimes \mathbb{N}^+}$ par l'application :

$$\begin{aligned} G \times \prod_{k=1}^{+\infty} G &\longrightarrow G^\infty \\ (x_0, x_1, x_2, \dots) &\longmapsto (x_0, x_0x_1, x_0x_1x_2, \dots) \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient par exemple :

$$\theta P^\mu(C_{g_1, \dots, g_k}^{n_1, \dots, n_k}) = \theta(g_0) \mu(g_0^{-1}g_1) \cdots \mu(g_{k-1}^{-1}g_k) = \theta(g_0) p(g_0, g_1) \cdots p(g_{k-1}, g_k)$$

Ce qui justifie ce choix de mesure de probabilité car on "saute" de l'élément g_i à l'élément g_{i+1} par multiplication (en notation multiplicative) à droite.

On désignera par abus de notation ${}_g P^\mu$ la mesure de probabilité obtenue pour $\theta = \delta_g$. En général, nos marches aléatoires commenceront en l'identité e de nos groupes, et on notera donc plus simplement P^μ à la place de ${}_{\delta_e} P^\mu$.

2.1.3 Rappels sur la récurrence et la transience d'une marche aléatoire

Une fois avoir défini une marche aléatoire sur une groupe, il est légitime de se demander si l'on visite une infinité de fois un élément ou pas. Cela nous amène donc aux notions de récurrence et de transience, rappelées ci-dessous.

Définition 4. (Cas sur $G := \mathbb{Z}^d$) Soit $g \in G$ un élément (ou état) et soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une marche aléatoire sur G avec les variables aléatoires X_n définies sur un espace probabilisé² $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

- L'élément g est dit *récurrent* si :

$$\mathbb{P}(X_n = g \text{ infiniment souvent}) = 1$$

- L'élément g est dit *transient* si :

$$\mathbb{P}(X_n = g \text{ infiniment souvent}) = 0$$

Les deux cas couvrent tous les cas d'après la loi du 0 – 1 de Kolmogorov.

Autrement dit, un élément est transient s'il n'est pas récurrent.

On peut aussi dire que la récurrence signifie que l'on visitera une infinité de fois un état et la transience seulement un nombre fini de fois. La récurrence et la transience sont des propriétés de classe et donc on parlera de marche aléatoire récurrente ou transiente lorsque celle-ci sera irréductible (i.e. tous les états communiquent - c'est à dire que de n'importe quel élément $g \in G$ on peut trouver un chemin qui atteint $h \in G$) car alors tous les éléments $g \in G$ auront le même comportement : soit récurrent soit transient.

Dans tout notre travail, sauf mention contraire, on considérera des mesures irréductibles³.

Définition 5. On peut donc résumer :

- Une marche aléatoire est dite *récurrente* si tous les états sont récurrents.
- Une marche aléatoire est dite *transiente* si tous les états sont transients.

Un premier exemple important qui montre l'utilité d'une théorie de marches aléatoires sur les groupes, est donné par le théorème de Pólya :

Théorème 1. (Pólya) On considère une marche aléatoire sur $G = \mathbb{Z}^d$ avec la mesure uniforme :

$$\mu = \frac{1}{2d} \sum_{i=1}^d (\delta_{e_i} + \delta_{-e_i})$$

Où e_i est le vecteur ayant uniquement 0 selon toutes ses coordonnées excepté en la i -ième coordonnée qui vaut 1.

Autrement dit, la probabilité d'aller dans la direction e_i est $\frac{1}{2d}$ et de même pour $-e_i$.

Alors :

- La marche aléatoire est récurrente si $d = 1$ ou $d = 2$.
- La marche aléatoire est transiente si $d \geq 3$.

On résume souvent ce théorème avec l'heuristique "Un marcheur bourré finit par rentrer chez lui, mais un oiseau bourré ne retrouve pas son nid!"

On pourra trouver une preuve de ce théorème en [5], mais l'on peut déjà remarquer qu'il suffit de ne pas changer beaucoup le groupe (ici par exemple \mathbb{Z}^2 à \mathbb{Z}^3) pour obtenir un comportement radicalement différent de la marche aléatoire.

2. L'existence d'un tel espace est assuré par le théorème d'extension de Kolmogorov

3. On peut toujours se ramener à une mesure irréductible en ne travaillant plus sur G mais sur le sous-groupe engendré par μ .

Définition 6. On appelle *fonction de Green* associé à (G, μ) l'application $\mathcal{G} : G \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ définie par :

$$\forall x \in G, \mathcal{G}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu^{*n}(x) \text{ si la série converge et } +\infty \text{ sinon}$$

où μ^{*n} désigne le produit de convolution : $\mu^{*n} := \underbrace{\mu * \cdots * \mu}_{n \text{ fois}}$

La fonction de Green traduit l'espérance du nombre de visites en un point $x \in G$ par la marche aléatoire partant de l'identité e_G . Dans le cas convergent, on peut en effet écrire par théorème de Fubini :

$$\mathcal{G}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{X_n=x}] = \mathbb{E} \left[\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{X_n=x} \right]$$

Remarque 2. Sous l'hypothèse que la marche aléatoire est transiente, on a donc la finitude de la fonction de Green en tout point.

2.2 Bord de Poisson d'une marche aléatoire

Un outil puissant dans l'étude asymptotique des marches aléatoires, est le concept de *bord d'une marche aléatoire*. Dans notre travail, nous nous limiterons à celui de *bord de Poisson*, qui est très efficace dans la retranscription du comportement asymptotique.

Définition 7. Le bord de Poisson $\partial_\mu G$ de (G, μ) est le quotient mesurable de l'espace des trajectoires G^∞ par la relation d'équivalence :

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \Leftrightarrow \exists n_0, k_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, x_n = y_{k_0+n}$$

Remarque 3. On dira que le bord de Poisson est trivial s'il est mesurablement isomorphe à un point.

On appelle souvent la tribu associée à cet espace, la *tribu invariante* dans la littérature.

La question qui se pose usuellement dans le cadre de la théorie des marches aléatoires sur des groupes, est de savoir si le bord de Poisson est trivial ou non.

Nous verrons plus tard plusieurs critères pour déterminer si celui-ci est trivial ou non.

Cependant un critère très important pour lever cette incertitude est donné par la propriété de Liouville que nous détaillons ci-dessous.

2.2.1 Fonctions μ -harmoniques et propriété de Liouville

Définition 8. On dira qu'une fonction $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ est μ -harmonique sur (G, μ) si :

$$\forall x \in G, f(x) = \sum_{y \in G} f(xy) \mu(y)$$

Cette définition se comprend mieux si l'on considère le Laplacien discret d'une fonction f définie sur le groupe G comme étant :

$$\Delta f(x) := \sum_{y \in G} \mu(x^{-1}y)(f(y) - f(x)) = \sum_{y \in G} p(x, y)(f(y) - f(x))$$

Ainsi on retrouve la définition d'harmonicité du cadre continu avec l'égalité : $\Delta f(x) = 0$

Pour vérifier l'équivalence entre les deux définitions, il suffit de noter que :

$$f(x) = \sum_{y \in G} f(xy) \mu(y) = \sum_{y \in G} f(y) \mu(x^{-1}y)$$

par le changement de variable $y \mapsto x^{-1}y$ (qui est bien une bijection car G est un groupe). Rappelons également que $\sum_{y \in G} p(x, y) = 1$ car $p(x, \cdot)$ est une mesure de probabilité sur G .

Un exemple de fonction μ -harmonique est donnée par la fonction de Green (sous-section 2.1.3). Cette propriété de cette fonction nous sera notamment utile dans la section 3.

Lemme 1. *La fonction de Green associée à (G, μ) (on suppose μ symétrique) est μ -harmonique sur $G \setminus \{e_G\}$.*

Démonstration. On note $(X_n)_n$ notre marche aléatoire, on a les égalités :

$$\mathcal{G}(x) = \mathbb{E} \left[\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{1}_{X_n=x} \right] = \mathbb{E}_x \left[\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{1}_{X_n=e_G} \right]$$

par symétrie de la mesure μ et en notant \mathbb{E}_x l'espérance de la marche aléatoire conditionnée à débiter en x . De plus :

$$\mathcal{G}(x) = \delta(x) + \sum_{y \in G} p(x, y) \mathbb{E}_y \left[\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{1}_{X_n=e_G} \right] = \delta(x) + \sum_{y \in G} p(x, y) \mathcal{G}(y)$$

D'où l'harmonicité de \mathcal{G} si $x \neq e_G$ car alors $\delta(x) = 0$ □

Définition 9. On dira qu'un groupe mesuré (G, μ) vérifie la **propriété de Liouville** si toute fonction μ -harmonique bornée est constante.

Nous admettrons l'important critère de trivialité du bord de Poisson suivant :

Théorème 2. *Le bord de Poisson $\partial_\mu G$ est trivial si et seulement si (G, μ) vérifie la propriété de Liouville.*

Une preuve de ce théorème se trouve dans [1], pour des raisons d'espace et de contenu (plusieurs pages de démonstration). Nous considérerons ce théorème acquis.

2.2.2 Bord de Poisson dans les cas abéliens, nilpotents, moyennables

Dans cette sous-section, nous énonçons plusieurs théorèmes qui caractérisent le bord de Poisson dans des grandes familles de groupes. Nous admettons ces théorèmes vus au cours du stage, dont les démonstrations parfois longues ne furent pas l'objectif du stage.

Théorème. *(Choquet-Deny)*

Soit G un groupe abélien et μ une mesure non dégénérée sur G . Alors toute fonction μ -harmonique bornée est constante. En particulier par le théorème 2, $\partial_\mu G$ est trivial.

Démonstration. On pourra se référer à [11] pour l'article d'origine de ce théorème, ainsi qu'à [12] pour une démonstration utilisant des martingales. □

Ce théorème fut plus tard généralisé à la classe des groupes nilpotents dont nous rappelons la définition ci-dessous.

Rappel. *Soit G un groupe d'élément neutre e_G , si A et B sont deux sous-groupes de G , on note $[A, B]$ le sous-groupe engendré par les commutateurs de la forme $[x, y] := xyx^{-1}y^{-1}$ avec $x \in A$ et $y \in B$. On définit une suite de sous-groupes $(C^n(G))_{n \geq 0}$ par :*

$$C^0(G) := G \text{ et } \forall n \geq 0, C^{n+1}(G) := [G, C^n(G)]$$

*On dit que G est **nilpotent** s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $C^n(G) = \{e_G\}$.*

Théorème. Soit G un groupe (localement compact) nilpotent à base séparable et μ une mesure de probabilité sur G . Alors toute fonction μ -harmonique bornée est constante. En particulier par le théorème 2, $\partial_\mu G$ est trivial.

Démonstration. On pourra consulter [13] pour une preuve complète du résultat due à Raugi, mais on pourra aussi consulter [14] pour le même résultat démontré avec des hypothèses supplémentaires sur la marche aléatoire (démonstration plus courte). \square

Un résultat qui présente maintenant l'autre "sens" de la théorie : à partir d'informations probabilistes déduire des informations algébriques, est donné par le théorème suivant portant sur les groupes résolubles (qui jouent un grand rôle dans la théorie de Galois) dont nous rappelons la définition tout d'abord.

Rappel. En utilisant les notations du précédent rappel, on définit la suite des dérivées $(D^n(G))_{n \geq 0}$ du groupe G par :

$$D^0(G) := G \text{ et } \forall n \geq 0, D^{n+1}(G) := D(D^n(G)) = [D^n(G), D^n(G)]$$

On dit que G est **résoluble** s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $D^n(G) = \{e_G\}$.

Théorème. Si le bord de Poisson $\partial_\mu G$ de (G, μ) est non trivial pour une mesure de probabilité μ symétrique ayant un premier moment fini et G un groupe résoluble de type fini, alors G contient un sous-groupe ayant une infinité de générateurs (i.e. pas de type fini).

Démonstration. Une preuve de ce résultat se situe dans [14] (théorème 4.4). \square

Les groupes résolubles forment une classe de groupe intermédiaire entre les groupes nilpotents (pour lesquels le bord de Poisson est trivial) et les groupes non-moyennables (pour lesquels le bord de Poisson est non trivial pour toute mesure non dégénérée). Introduisons donc les groupes moyennables.

Rappel. Soit G un groupe discret et on note \mathcal{G} son graphe de Cayley⁴. On se donne A un sous-ensemble de \mathcal{G} et on définit ∂A comme étant l'ensemble des arêtes du graphe \mathcal{G} qui ont exactement un sommet dans A . On dit que G est **moyennable**⁵ si son graphe de Cayley est de constante isopérimétrique nulle, i.e. :

$$\inf \left\{ \frac{\#\partial A}{\#A} \mid A \subset \mathcal{G} \text{ fini non vide} \right\} = 0$$

Exemple 3. Établissons la moyennabilité des groupes \mathbb{Z}^d en utilisant la définition ci-dessus. Pour montrer la moyennabilité de \mathbb{Z} , il suffit de considérer les ensembles $A_n := \llbracket -n, n \rrbracket$ du graphe de Cayley de \mathbb{Z} (qui est représenté par la droite des entiers ci-dessous).

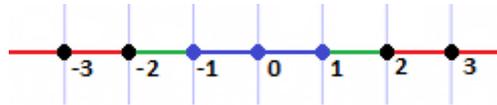


FIGURE 1 – Moyennabilité de \mathbb{Z}

Sur la figure les points bleus représentent l'ensemble A_1 et les arêtes vertes représentent l'ensemble ∂A_1 . On déduit assez facilement que $\#\partial A_n = 2$ et que $\#A_n = 2n + 1$. Ainsi :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\#\partial A_n}{\#A_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{2n + 1} = 0$$

4. On pourra consulter [4] pour un rappel de la notion.

5. Il existe de nombreuses définitions équivalentes pour définir la moyennabilité. Nous privilégions ici celle faisant intervenir l'aspect géométrique directement lié au graphe de Cayley du groupe, qui se prête mieux à une éventuelle étude probabiliste.

Donc \mathbb{Z} est de constante isopérimétrique nulle et est moyennable.

Pour montrer la moyennabilité de \mathbb{Z}^2 , il suffit de considérer les ensembles A_n définis par :

$$A_n := \{(k, l) \in \mathbb{Z}^2 \mid |k|, |l| \leq n\}$$

Autrement dit, A_n est le carré (plein) de \mathbb{Z}^2 centré en $(0, 0)$ et de longueur de côté $2n + 1$. Le graphe de Cayley de \mathbb{Z}^2 correspond à la représentation géométrique du réseau \mathbb{Z}^2 (un quadrillage infini).

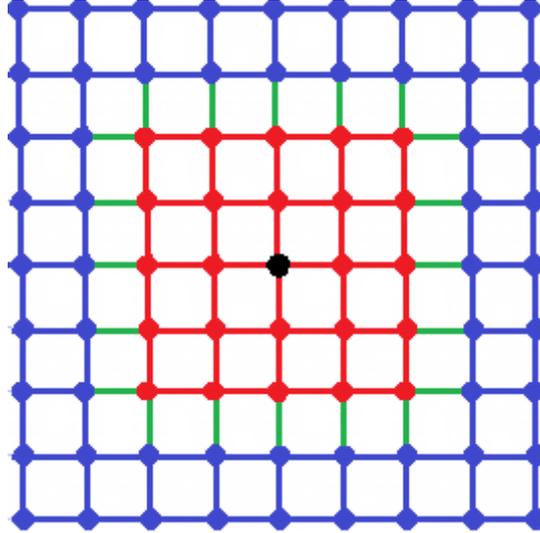


FIGURE 2 – Moyennabilité de \mathbb{Z}^2

Sur la figure, les points rouges représentent l'ensemble A_2 et les arêtes vertes représentent l'ensemble ∂A_2 . On déduit assez facilement que $\#\partial A_n = 4(2n + 1)$ et que $\#A_n = (2n + 1)^2$. Ainsi :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\#\partial A_n}{\#A_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4(2n + 1)}{(2n + 1)^2} = 0$$

Donc \mathbb{Z}^2 est de constante isopérimétrique nulle et est moyennable.

Par le même type d'arguments, en considérant des hypercubes de \mathbb{Z}^n , on montre que \mathbb{Z}^n est de constante isopérimétrique nulle et est donc moyennable pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Théorème. (*Kaimanovich-Vershik et Rosenblatt*)

Un groupe est moyennable si et seulement s'il admet une mesure non dégénérée pour laquelle le bord de Poisson est trivial.

Démonstration. La démonstration de ce théorème se trouve à la fois dans [1] et de manière plus détaillée dans [15]. □

Théorème. (*Correspondances entre les groupes*)

On a les inclusions suivantes :

- (i) *Un groupe abélien est nilpotent*
- (ii) *Un groupe nilpotent est résoluble*
- (iii) *Un groupe résoluble est moyennable*

Démonstration. (i) Il suffit de noter que $C^1(G) = \{e_G\}$ car les éléments commutent et donc pour tout $x, y \in G$, $xyx^{-1}y^{-1} = e_G$.

(ii) On montre par récurrence que pour tout $k \geq 1$, $D^k(G) \subset C^k(G)$, l'initialisation ne pose pas de problème car $D^1(G) = D(G) = C^1(G)$. Supposons le résultat vrai au rang $k \geq 1$, donc

$D^k(G) \subset C^k(G)$. Par définition, $C^{k+1}(G) = [G, C^k(G)]$ et $D^{k+1}(G) = [D^k(G), D^k(G)]$. Soit $g = xyx^{-1}y^{-1}$ avec $x, y \in D^k(G)$, en particulier on peut voir g comme étant $g = xyx^{-1}y^{-1}$ avec $x \in G, y \in C^k(G)$ par hypothèse de récurrence. Donc, par structure de groupe, cela étant vrai pour les éléments de la forme $g = [x, y]$, ça l'est aussi pour tout élément. Ce qui prouve et achève la récurrence.

(iii) Pour montrer cette inclusion, il est préférable d'utiliser d'autres caractérisations de la moyennabilité. Une preuve complète de cela se trouve dans [16]. \square

Au regard des correspondances ci-dessus, on peut déjà y voir plus clair pour chercher des groupes dont le bord de Poisson n'est pas trivial.

2.2.3 Préliminaires pour l'étude du bord sur un produit en couronne

Une autre question possible, est de trouver des groupes moyennables dont le bord de Poisson n'est pas trivial pour une certaine mesure (et ainsi fournir un contre-exemple au théorème de Kaimanovich-Vershik et Rosenblatt de la section précédente). Une famille "simple" de groupes moyennables vérifiant cela s'avérera être celle des groupes construits sur un produit en couronne.

Définition 10. On définit le produit en couronne de deux groupes $(A, *_A)$ et $(B, *_B)$, que l'on note $A \wr B$ par le produit semi-direct de A et B^A (applications de A dans B) où A agit par translation sur B^A . Ainsi un élément de $A \wr B$ s'écrit : (a, f) où $a \in A$ et $f : A \rightarrow B$. La multiplication de deux éléments est donc donnée par :

$$(a, f) \wr (b, g) = (a *_A b, [f(\cdot)] *_B [T_a(g)(\cdot)])$$

où $\forall y \in A, (T_a(g))(y) = g(a^{-1} *_A y)$.

Pour donner un exemple de produit en couronne et mieux comprendre ce qu'est un tel produit, intéressons nous au groupe de l'allumeur de réverbères.

Définition 11. On appelle **groupe de l'allumeur de réverbères** le groupe défini par le produit en couronne $\mathbb{Z} \wr (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$

La métaphore pour comprendre ce groupe consiste à imaginer une route infinie (représentée par \mathbb{Z}) et en chaque entier un réverbère sur cette route. Les réverbères peuvent être allumés ou éteints (états représentés par $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$). Chaque élément $(a, f) \in \mathbb{Z} \wr (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ donne l'emplacement d'un réverbère (par l'entier a) et une configuration de tous les réverbères (par la fonction f). Considérer une marche aléatoire sur $\mathbb{Z} \wr (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ est donc similaire à considérer une marche aléatoire sur \mathbb{Z} modulo le fait qu'on ajoute la possibilité de ne pas bouger d'un entier et ainsi modifier l'état du réverbère.

Après avoir compris la métaphore précédente, on assimile mieux n'importe quel produit en couronne $A \wr B$ en regardant A comme le groupe des emplacements d'un marcheur et B comme un groupe d'états possibles pour un réverbère se situant sur un emplacement.

Lemme 2. (Erschler) Soit $G = A \wr B$ et μ une mesure sur G ayant un moment d'ordre 1. On suppose que la projection de la mesure μ sur A définit une marche aléatoire transiente. Alors pour tout $a_* \in A$ et P^μ -presque toute trajectoire $X_i := (Y_i, f_i)$ (pour $i = 1, 2, \dots$) la valeur $f_i(a_*)$ est constante à partir d'un certain rang, i.e. $f_i(a_*) = f_{i+1}(a_*)$ à partir d'un certain entier $i \in \mathbb{N}$.

Démonstration. On peut écrire :

$$X_{i+1} = (Y_{i+1}, f_{i+1}) = (Y_i, f_i) \wr (A_i, F_i) = X_i \wr (A_i, F_i)$$

où $(A_i, F_i) \in \text{supp}(\mu)$ avec $f_{i+1}(a_*) = f_i(a_*) *_B F_i(Y_i^{-1} *_A a_*)$

De plus,

$$P(F_i(Y_1^{-1} *_A a_*) \neq e_B) = \sum_{a \in A} \mu_A^{*i}(a) \sum_{(x,f) \in G} (1 - \delta(f(a^{-1} *_A a_*))) \mu((x, f))$$

avec μ_A la projection de μ sur A et $\delta(x) = 0$ si $x \neq e_B$ et $\delta(e_B) = 1$. Donc :

$$\sum_i P(F_i(Y_1^{-1} *_A a_*) \neq e_B) \leq \sum_{a \in A} (\mathcal{G}(a) + 1) \sum_{(x,f) \in G} (1 - \delta(f(a^{-1} *_A a_*))) \mu((x, f))$$

où ici $\mathcal{G}(a) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu_A^{*n}(a)$ est la fonction de Green de la projection de la marche aléatoire sur A . Comme la marche aléatoire projeté est supposée transiente, on a : $\mathcal{G}(a) < +\infty$ et $\mathcal{G}(a) \leq \mathcal{G}(e_A) + 1$ pour tout $a \in A$. Ainsi on a :

$$\sum_i P(F_i(Y_1^{-1} *_A a_*) \neq e_B) \leq \text{Const} \sum_{(x,f) \in G} \mu((x, f)) \sum_{a \in A} (1 - \delta(f(a^{-1} *_A a_*)))$$

$$\sum_i P(F_i(Y_1^{-1} *_A a_*) \neq e_B) \leq \text{Const} \sum_{(x,f) \in G} \mu((x, f)) \# \text{supp}(f)$$

$$\sum_i P(F_i(Y_1^{-1} *_A a_*) \neq e_B) \leq \text{Const} \sum_{(x,f) \in G} \mu((x, f)) l_G((x, f)) < +\infty$$

car le premier moment de μ est fini et où l'on note l_G la longueur d'un mot écrit avec les générateurs. Ainsi on a bien :

$$\sum_i P(f_i(a_*) \neq f_{i+1}(a_*)) = \sum_i P(F_i(Y_1^{-1} *_A a_*) \neq e_B) < +\infty$$

Donc pour tout $a_* \in A$, on a $f_i(a_*) \neq f_{i+1}(a_*)$ que pour un nombre fini d'entiers i . \square

Le lemme précédent montre qu'avec probabilité 1, on peut attribuer à chaque trajectoire $X_1 := (Y_1, f_1), \dots, X_i := (Y_i, f_i)$ sur $G = A \wr B$ une configuration limite $F : A \rightarrow B$ telle que pour tout $a \in A$, $F(a) = \lim_{i \rightarrow +\infty} f_i(a)$.

Corollaire 1. Sous les hypothèses du lemme ci-dessus, en supposant en outre la mesure μ irréductible sur $G = A \wr B$ alors le bord de Poisson d'une marche aléatoire sur (G, μ) n'est pas trivial.

Démonstration. Supposons par l'absurde que le bord soit trivial. Par le lemme, il existe donc une configuration F telle que la configuration limite soit F avec probabilité 1 pour toute trajectoire de la marche aléatoire commençant en e_G . Autrement dit, cela implique que pour tout $x \in G$, toutes les trajectoires commençant en x ont la même configuration limite F_x avec probabilité 1. Notons que pour $y \in \text{supp}(\mu)$ on a : $F_x = y F_{x \wr y}$ par définition du produit en couronne. Or si μ génère $G = A \wr B$ en tant que groupe, cela ne peut se produire. \square

3 Bord de Poisson d'une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^d \wr \mathbb{Z}$

Une méthode importante pour déterminer si le bord de Poisson de certains groupes de la forme $\mathbb{Z}^d \wr \mathbb{Z}$ est trivial ou non, est la méthode des points de coupures que l'on expose dans cette section.

On considérera dans cette section un groupe G de **type-fini, infini, discret** et μ une mesure **symétrique, non-dégénérée** de probabilité sur G et les marches aléatoires seront considérées **transientes**.

3.1 Méthode des points de coupures

On notera plus facilement $U := \text{supp}(\mu)$ et :

$$\mu_{\min} := \min_{u \in U} \mu(u)$$

Un point $y \in G$ sera dit *voisin* de $x \in G$ si $y \in xU$ et l'on définit :

$$\forall n \geq 1, U^n := \{u_1 u_2 \cdots u_n \in G \mid u_i \in U\} \text{ et } U^0 := \{e_G\}$$

Autrement dit, U^n est l'ensemble des mots de longueur n dans G . On notera la longueur :

$$\rho(x) := \min \{n \in \mathbb{N} \mid x \in U^n\}$$

On définit U_n la boule de centre e_G et de rayon n par :

$$U_n := \bigcup_{k=0}^n U^k$$

C'est à dire, l'ensemble des mots de longueur inférieur ou égale à n dans G .

Définition 12. On dira que le groupe G a une *croissance polynomiale* s'il existe $d \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\#U_n = O(n^d)$$

Le plus petit entier d vérifiant cela est appelé *degré de croissance* de G .

Exemple 4. Montrons que \mathbb{Z}^2 est un groupe de croissance polynomiale de degré 2.

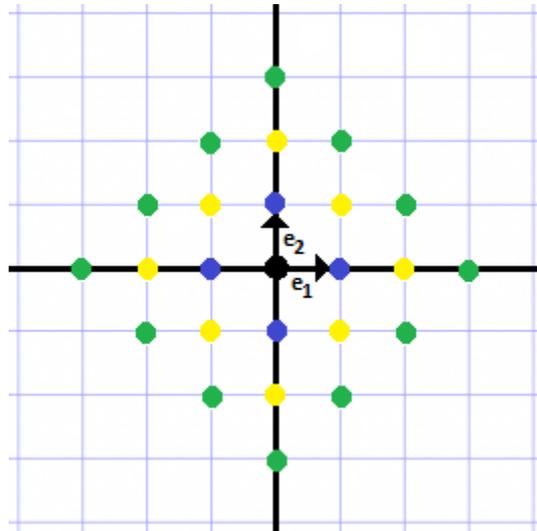


FIGURE 3 – Réseau $(\mathbb{Z}^2, +)$ avec générateurs e_1 et e_2

Sur la figure, en considérant $U := \{e_1, e_2\}$, le point noir désigne $U^0 := \{0\}$, les points bleus désignent les éléments de $U^1 := \{e_1, e_2, -e_1, -e_2\}$, les points jaunes désignent les éléments de U^2 puis les points verts les éléments de U^3 .

On remarque que $\#U^k = 4k$ pour $k \geq 1$ et $\#U^0 = 1$. Pour montrer ce résultat il suffit de remarquer que pour $k \geq 1$, il y a $k - 1$ points strictement inclus dans un quadrant du plan et exactement 4 points sur l'axe des abscisses réuni avec l'axe des ordonnées. Donc au total $4(k - 1) + 4 = 4k$ points dans U^k . Au final on peut écrire :

$$\#U_n = \sum_{k=0}^n \#U^k = 1 + 4 \frac{n(n-1)}{2} = O(n^2)$$

Et comme $\#U_n \neq O(n)$ on a bien \mathbb{Z}^2 groupe de croissance polynomiale de degré 2.

À titre anecdotique, on peut montrer par des arguments combinatoires similaires que \mathbb{Z}^d est de croissance polynomiale de degré d pour $d \geq 1$.

Rappelons que la fonction de Green (voir sous-section 2.1.3) est finie en tout point $x \in G$ dans cette section car les marches aléatoires sont transientes. On notera le gradient de la fonction de Green par :

$$\forall x \in G, \nabla \mathcal{G}(x) := \max_{y \in xU} |\mathcal{G}(y) - \mathcal{G}(x)|$$

On définit également les boules B_k dans G par :

$$\forall k \geq 1, B_k := \left\{ x \in G \mid \mathcal{G}(x) \geq \left(\frac{\delta}{k} \right)^{d-2} \right\}$$

où δ est un réel que l'on fixera ultérieurement et on définit les sphères ∂B_k associées aux B_k par :

$$\partial B_k := \{x \in B_k \mid \exists y \in xU \text{ tel que } y \notin B_k\}$$

On appellera *intérieur* de B_k l'ensemble $B_k \setminus \partial B_k$ et on peut remarquer que si x est dans l'intérieur de B_k et $y \notin B_k$ alors tout chemin reliant x à y intersecte ∂B_k .

On définit l'événement de coupure d'une trajectoire par l'événement suivant :

$$cut_k := \bigcup_{n=1}^{+\infty} \{\forall i < n : X_i \in B_k \setminus \partial B_k, X_n \in \partial B_k, \forall j > n : X_j \notin B_k\}$$

C'est à dire l'événement que la marche aléatoire $(X_n)_n$ commence dans l'intérieur de B_k et visite ∂B_k une unique fois.

Définition 13. • Soit $(X_n)_n$ une marche aléatoire sur (G, μ) , on dit qu'une *transition est permise* si l'on a :

$$p(x, y) := \mathbb{P}(X_{n+1} = y \mid X_n = x) = \mu(x^{-1}y) > 0$$

• S'il n'y a pas de transition permise entre X_i et X_j pour tout i, j tels que $0 \leq i < n < j$ alors X_n est appelé *point de coupure*.

Théorème 3. Si G est un groupe de croissance polynomiale de degré $d \geq 3$ et que les trois inégalités suivantes sont vérifiées pour des constantes $A_0, A_1, A_2, A_3 \in \mathbb{R}$:

$$(A_0 \rho(x))^{2-d} \leq \mathcal{G}(x) \leq \left(\frac{\rho(x)}{A_1} \right)^{2-d} \quad \forall x \in G \quad (1)$$

$$\nabla \mathcal{G}(x) \leq \left(\frac{\rho(x)}{A_2} \right)^{1-d} \quad \forall x \in G \quad (2)$$

$$(A_3 \rho(x))^{1-d} \leq \nabla \mathcal{G}(x) \text{ pour tout (sauf peut-être un nombre fini) } x \in G \quad (3)$$

Alors, avec probabilité 1 les événements cut_k se réalisent infiniment souvent, i.e. :

$$\mathbb{P}\left(\limsup_k cut_k\right) = \mathbb{P}(cut_k \text{ infiniment souvent}) = 1$$

Pour démontrer ce théorème nous avons besoin de 3 lemmes. Le premier lemme permet de séparer les sphères ∂B_k pour des entiers k distincts. On pose pour la lisibilité :

$$0 < \eta < d - 2, \quad r_k := \left(\frac{\delta}{k}\right)^{d-2} \quad \text{et} \quad R_k := \left(1 + \frac{\eta}{k}\right) r_k$$

On fixera les valeurs de η et de δ ultérieurement. On remarque déjà que r_k est le paramètre définissant la boule B_k et on suppose pour la suite $d \geq 3$ comme dans le théorème.

Lemme 3. *Si les inégalités (1) et (2) sont vérifiées, alors pour tout $k \geq 1$ et $x \in \partial B_k$, on a l'encadrement :*

$$r_k \leq \mathcal{G}(x) \leq R_k$$

Démonstration. L'inégalité de minoration de la fonction de Green est triviale par définition de la boule B_k . Montrons donc la deuxième inégalité.

Par définition, si $x \in \partial B_k$ alors $\exists y \in xU$ tel que $y \notin B_k$ et par définition de B_k et l'inégalité (1) on a :

$$(A_0 \rho(y))^{2-d} \leq \mathcal{G}(y) \leq \left(\frac{k}{\delta}\right)^{2-d}$$

D'où l'on tire puisque $d \geq 3$:

$$\rho(y) > \frac{k}{\delta A_0}$$

Par l'inégalité (2) on a donc :

$$\nabla \mathcal{G}(y) \leq \left(\frac{\delta A_0 A_2}{k}\right)^{d-1}$$

Ainsi une majoration de la fonction de Green est donc :

$$\mathcal{G}(x) \leq \mathcal{G}(y) + \nabla \mathcal{G}(y) \leq \left(1 + \frac{\delta(A_0 A_2)^{d-1}}{k}\right) \left(\frac{\delta}{k}\right)^{d-2} = R_k$$

□

On peut écrire les équivalents (lorsque $k \rightarrow \infty$) suivants concernant les différences entre les rayons r_k et R_k :

$$r_k - R_{k+1} \sim \delta^{d-2} \frac{d-2-\eta}{k^{d-1}} \quad (4)$$

$$R_k - r_{k+1} \sim \delta^{d-2} \frac{d-2+\eta}{k^{d-1}} \quad (5)$$

On a aussi les inégalités suivantes pour comparer r_k, R_k avec r_m, R_m pour $1 \leq k < m$:

$$0 < r_k - r_m \leq \delta^{d-2} (d-2) \frac{m-k}{mk^{d-2}} \quad (6)$$

$$R_k - R_m \geq \delta^{d-2} \frac{m-k}{mk^{d-2}} > 0 \quad (7)$$

Ces deux inégalités se montrent en utilisant directement la formule :

$$a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$$

avec $a = \frac{1}{k}, b = \frac{1}{m}$ et $n = d - 2$.

On peut remarquer que les sphères ∂B_k et ∂B_{k+1} sont disjointes pour k assez grand puisqu'alors $r_k - R_{k+1} > 0$.

Remarque 4. (Principe du maximum pour les fonctions μ -harmoniques)

Si f est une fonction μ -harmonique sur G et qu'elle atteint son maximum en un point $x \in G$ i.e. $f(x) = \max_{y \in G} f(y)$, alors elle est constante sur G .

Démonstration. Soit $x \in G$ tel que $f(x) = \max_{y \in G} f(y)$, par définition :

$$f(x) = \sum_{y \in G} f(xy)\mu(y) = \sum_{y \in G} f(y)\mu(x^{-1}y) \text{ et } \sum_{y \in G} \mu(x^{-1}y) = \sum_{y \in G} \mu(y) = 1$$

Donc on peut écrire :

$$\sum_{y \in G} (f(x) - f(y))\mu(x^{-1}y) = 0$$

Et comme $f(x) - f(y) \geq 0$ par définition de x , on a bien $\forall y \in xU$ (voisins de x) :

$$f(y) = f(x)$$

D'où la constance sur les voisins de x et donc sur G par irréductibilité. □

Passons maintenant au deuxième lemme pour démontrer le théorème précédent. Ce lemme consiste à évaluer la probabilité qu'une marche aléatoire percute deux sphères de rayons différents.

Lemme 4. *Si les inégalités (1) et (2) sont vérifiées, alors il existe un réel C et un entier $K \geq 1$ tels que si $K \leq k < m$ et pour tout point de départ $x \in \partial B_{k+1}$:*

$$\frac{m}{Ck(m-k)} \leq \mathbb{P}_x((X_n)_n \text{ visite } \partial B_m \text{ avant } \partial B_k) \leq \frac{Cm}{k(m-k)} \quad (8)$$

D'où l'on déduit pour tout $x \in \partial B_{k+1}$:

$$\frac{1}{Ck} \leq \mathbb{P}_x((X_n)_n \text{ ne visite jamais } \partial B_k) \leq \frac{C}{k} \quad (9)$$

Démonstration. On pose :

$$h(x) := \mathbb{P}_x((X_n)_n \text{ visite } \partial B_m \text{ avant } \partial B_k)$$

La fonction h est μ -harmonique dans la couronne $B_m \setminus (\partial B_m \cup B_k)$, en effet par formule des probabilités totales on a :

$$\forall x \in B_m \setminus (\partial B_m \cup B_k), h(x) = \sum_{y \in G} h(y)\mu(x^{-1}y) = \sum_{y \in G} h(y)p(x, y)$$

De plus, h vaut 0 sur ∂B_k et 1 sur ∂B_m par définition. On pose :

$$u(x) = \frac{r_k - \mathcal{G}(x)}{r_k - r_m} \text{ et } U(x) = \frac{R_k - \mathcal{G}(x)}{R_k - R_m}$$

On a l'inégalité suivante :

$$\forall x \in \partial B_k \cup \partial B_m, u(x) \leq h(x) \leq U(x)$$

En effet, si $x \in \partial B_k$, $h(x) = 0$ et par le lemme précédent $u(x) \leq 0$ et $U(x) \geq 0$, raisonnement analogue si $x \in \partial B_m$. Le principe du maximum (voir remarque précédente) permet de dire que l'inégalité précédente reste vraie pour $x \in B_m \setminus B_k$. Toujours par le lemme précédent (encadrement de la fonction de Green), on tire :

$$u(x) \geq \frac{r_k - R_{k+1}}{r_k - r_m} \quad \text{et} \quad U(x) \leq \frac{R_k - r_{k+1}}{R_k - R_m}$$

En remplaçant les expressions à l'aide de (4), (5), (6) et (7), on obtient bien :

$$\frac{m}{Ck(m-k)} \leq \mathbb{P}_x((X_n)_n \text{ visite } \partial B_m \text{ avant } \partial B_k) \leq \frac{Cm}{k(m-k)}$$

Et l'on obtient l'inégalité (9) en faisant tendre m vers $+\infty$ dans l'inégalité précédente. \square

Enfin le troisième lemme de cette section assure l'existence d'un chemin allant d'un point $x \in \partial B_k$ vers ∂B_{k+1} et qui ne re-entre pas dans ∂B_k . La longueur d'un tel chemin est bornée uniformément en x et k :

Lemme 5. *Si les inégalités (1), (2) et (3) sont vérifiées, alors il existe des entiers J et k_0 tels que pour tout $k \geq k_0$ et tout $x \in \partial B_k$, il existe un chemin fini $x_0 = x, x_1, \dots, x_j$ dans G de longueur $j \leq J$ qui termine en $x_j \in \partial B_{k+1}$ avec $x_i \in x_{i-1}U$ et $x_i \notin \partial B_k$ pour $i \in \llbracket 1, j \rrbracket$.*

Démonstration. Prenons k_0 suffisamment grand pour que l'inégalité (3) reste vraie pour x en dehors de B_{k_0} . Soit donc $k \geq k_0$ et $x \in \partial B_k$. Par définition de ∂B_k , il existe $y \in xU$ un voisin de x qui est en dehors de B_k . On pose donc $x_0 := x$ et $x_1 := y$ puis on va construire la suite du chemin en prenant les valeurs minimales de la fonction de Green :

Une fois avoir défini x_i , on prend : $x_{i+1} \in x_iU$ tel que :

$$\mathcal{G}(x_{i+1}) = \min_{z \in x_iU} \mathcal{G}(z)$$

Comme la fonction de Green est μ -harmonique (voir lemme section 2.2.1) et comme de plus $\mathcal{G}(x_0) > \mathcal{G}(x_1)$, on a la décroissance stricte de la suite $(\mathcal{G}(x_i))_{i \geq 0}$ par le principe du maximum (remarque précédente). On choisit donc j de la manière suivante :

$$\mathcal{G}(x_j) \geq r_{k+1} > \mathcal{G}(x_{j+1})$$

On va donc s'attacher à majorer j , on a déjà directement par télescopage :

$$(j-1) \min_{i < j} (\mathcal{G}(x_i) - \mathcal{G}(x_{i+1})) \leq \mathcal{G}(x_1) - \mathcal{G}(x_j) \tag{10}$$

Par définition de x_{i+1} et de $\nabla \mathcal{G}(x_i)$, on a l'inégalité :

$$\mathcal{G}(x_i) - \mathcal{G}(x_{i+1}) \geq \mu_{\min} \nabla \mathcal{G}(x_i) \tag{11}$$

où μ_{\min} est défini au début de cette sous-section. Comme $x_i \in B_{k+1}$ pour $i \leq j$ (les boules B_k forment une suite croissante d'ensemble), on a l'inégalité :

$$\left(\frac{\delta}{k+1} \right)^{d-2} \leq \mathcal{G}(x_i) \leq \left(\frac{A_1}{\rho(x_i)} \right)^{d-2}$$

Le côté gauche de l'inégalité découle directement de la définition de B_{k+1} et le côté droit de l'inégalité (1). On déduit donc de cette double inégalité :

$$\rho(x_i) \leq \frac{A_1(k+1)}{\delta} \quad \text{puis en injectant dans (3) : } \nabla \mathcal{G}(x_i) \geq \left(\frac{A_1 A_3 (k+1)}{\delta} \right)^{1-d}$$

D'autre part en utilisant l'inégalité (6) et un télescopage on obtient :

$$\mathcal{G}(x_1) - \mathcal{G}(x_j) \leq r_k - r_{k+1} \leq \delta^{d-2}(d-2)k^{1-d}$$

Et donc en particulier :

$$\mathcal{G}(x_1) - \mathcal{G}(x_j) \leq \delta^{d-2}(d-2)k^{1-d}$$

En injectant cette dernière inégalité dans (10) et (11) en utilisant aussi la dernière inégalité pour le gradient de la fonction de Green, on en déduit :

$$(j-1)\mu_{\min} \left(\frac{A_1 A_3 (k+1)}{\delta} \right)^{1-d} \leq \delta^{d-2}(d-2)k^{1-d}$$

En posant $\delta := \eta(A_0 A_2)^{1-d}$ on conclut sur la majoration de j :

$$j \leq 1 + (2A_0 A_1 A_2 A_3)^{d-1} \frac{d-2}{\eta \mu_{\min}} := J \quad \forall k \geq k_0$$

□

On aura besoin du lemme de Kochen-Stone ci-dessous, pour conclure la preuve du théorème 3, que l'on démontre en utilisant l'inégalité de Paley-Zygmund (elle aussi démontrée).

Proposition 1. Lemme de Kochen-Stone⁶

Soit $(A_n)_{n \geq 1}$ une suite d'événements tels que $\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(A_n) = +\infty$, on a l'inégalité de Kochen-Stone :

$$\mathbb{P} \left(\limsup_{n \rightarrow +\infty} A_n \right) \geq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(\sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k) \right)^2}{\sum_{i,j=1}^n \mathbb{P}(A_i \cap A_j)}$$

Démonstration. On utilise l'inégalité de Paley-Zygmund :

$$\forall \lambda \in [0, 1[, \mathbb{P}(X \geq \lambda \mathbb{E}[X]) \geq \frac{(1-\lambda)^2 \mathbb{E}^2[X]}{\mathbb{E}[X^2]}$$

où X est une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2. Pour établir cette inégalité on écrit :

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X \mathbf{1}_{X < \lambda \mathbb{E}[X]}] + \mathbb{E}[X \mathbf{1}_{X \geq \lambda \mathbb{E}[X]}]$$

De plus $\mathbb{E}[X \mathbf{1}_{X < \lambda \mathbb{E}[X]}] \leq \lambda \mathbb{E}[X]$ et par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\mathbb{E}[X \mathbf{1}_{X \geq \lambda \mathbb{E}[X]}] \leq (\mathbb{E}[X^2])^{\frac{1}{2}} (\mathbb{E}[\mathbf{1}_{X \geq \lambda \mathbb{E}[X]})^{\frac{1}{2}}$$

D'où :

$$\mathbb{E}[X] \leq \lambda \mathbb{E}[X] + (\mathbb{E}[X^2])^{\frac{1}{2}} (\mathbb{P}(X \geq \lambda \mathbb{E}[X]))^{\frac{1}{2}}$$

Et on en déduit l'inégalité de Paley-Zygmund. On applique maintenant cette inégalité à la variable aléatoire $X := \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{A_k}$ on obtient :

$$\mathbb{P} \left(\sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{A_k} \geq \lambda \mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{A_k} \right] \right) \geq \frac{(1-\lambda)^2 \mathbb{E}^2 \left[\sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{A_k} \right]}{\mathbb{E} \left[\left(\sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{A_k} \right)^2 \right]}$$

6. On peut voir ce lemme comme une amélioration du lemme de Borel-Cantelli.

Donc :

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(\sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{A_k} \geq \lambda \mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{A_k} \right] \right) \geq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{(1-\lambda)^2 \mathbb{E}^2 \left[\sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{A_k} \right]}{\mathbb{E} \left[\left(\sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{A_k} \right)^2 \right]}$$

Par le lemme de Fatou :

$$\mathbb{P}(\limsup_{n \rightarrow +\infty} Z_n) \geq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(Z_n)$$

Donc avec $Z_n := \left\{ \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{A_k} \geq \lambda \mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{A_k} \right] \right\}$ on obtient :

$$\mathbb{P} \left(\limsup_{n \rightarrow +\infty} \left\{ \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{A_k} \geq \lambda \mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{A_k} \right] \right\} \right) \geq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{(1-\lambda)^2 \mathbb{E}^2 \left[\sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{A_k} \right]}{\mathbb{E} \left[\left(\sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{A_k} \right)^2 \right]}$$

Or comme $\mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{A_k} \right] = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k) \rightarrow +\infty$ on a :

$$\mathbb{P} \left(\limsup_{n \rightarrow +\infty} \left\{ \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{A_k} \geq \lambda \mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{A_k} \right] \right\} \right) = \mathbb{P} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{A_k} = +\infty \right) = \mathbb{P} \left(\limsup_{n \rightarrow +\infty} A_n \right)$$

D'où finalement :

$$\mathbb{P} \left(\limsup_{n \rightarrow +\infty} A_n \right) \geq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{(1-\lambda)^2 \mathbb{E}^2 \left[\sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{A_k} \right]}{\mathbb{E} \left[\left(\sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{A_k} \right)^2 \right]}$$

On en déduit donc le lemme de Kochen-Stone en faisant tendre λ vers 0. \square

Preuve du théorème 3 :

Démonstration. Comme dans le lemme précédent, on choisit k_0 de manière à vérifier l'inégalité (3) pour x en dehors de B_{k_0} . Un chemin pour qu'une trajectoire (qui commence dans l'intérieur de B_k) se retrouve dans cut_k est de marcher aléatoirement avant d'atteindre ∂B_k puis de marcher en dehors de ∂B_{k+1} sans jamais revisiter ∂B_k .

Au départ de la trajectoire, la probabilité d'atteindre ∂B_k est 1 (on commence dans l'intérieur de B_k). D'après le lemme précédent, pour tout $x \in \partial B_k$ de départ, il existe un chemin de longueur au plus J qui atteint ∂B_{k+1} sans re-renter dans ∂B_k .

Ainsi la probabilité d'aller de $x \in \partial B_k$ vers ∂B_{k+1} est minorée par μ_{\min}^J . En utilisant l'inégalité gauche de (9) on obtient :

$$\mathbb{P}(cut_k) \geq \frac{\mu_{\min}^J}{Ck}$$

D'autre part, toute trajectoire dans cut_k doit visiter ∂B_{k+1} et ne jamais retourner en ∂B_k , donc par l'inégalité droite de (9), on en déduit :

$$\mathbb{P}(cut_k) \leq \frac{C}{k}$$

Soit $k_0 \leq k < m$ et considérons une trajectoire dans $cut_k \cap cut_m$. Une telle trajectoire visite ∂B_k puis visite un point $x \in \partial B_{k+1}$ et depuis x , atteint ∂B_m sans revisiter ∂B_k . Une fois avoir atteint ∂B_{m+1} la trajectoire ne re-rentre pas dans B_m . Ainsi par le lemme 4 on obtient :

$$\mathbb{P}(cut_k \cap cut_m) \leq \max_{x \in \partial B_{k+1}} \mathbb{P}_x((X_n)_n \text{ visite } \partial B_m \text{ avant } \partial B_k) \max_{y \in \partial B_{m+1}} \mathbb{P}_y \left(\bigcap_{n \geq 0} \{X_n \notin B_m\} \right)$$

$$\mathbb{P}(cut_k \cap cut_m) \leq \frac{Cm}{k(m-k)} \frac{C}{m} = \frac{C^2}{k(m-k)}$$

D'une part, par la minoration obtenue plus haut pour $\mathbb{P}(cut_k)$ on obtient :

$$\sum_{k=k_0}^K \mathbb{P}(cut_k) \geq \sum_{k=k_0}^K \frac{\mu_{\min}^J}{Ck} \sim \frac{\mu_{\min}^J}{C} \log K$$

Et par les majorations obtenues plus haut :

$$\sum_{k,m=k_0}^K \mathbb{P}(cut_k \cap cut_m) \leq 2 \sum_{k_0 \leq k < m \leq K} \frac{C^2}{k(m-k)} + \sum_{k=k_0}^K \frac{C}{k} \sim 2C^2 \log^2 K$$

Par le lemme de Kochen-Stone (proposition 1) en posant $A_k := cut_k$:

$$\mathbb{P} \left(\limsup_k cut_k \right) \geq \limsup_{K \rightarrow \infty} \frac{\left(\sum_{k=1}^K \mathbb{P}(cut_k) \right)^2}{\sum_{k,m=1}^K \mathbb{P}(cut_k \cap cut_m)} \geq \frac{\mu_{\min}^{2J}}{2C^4}$$

On suppose données les n premières étapes de la marche aléatoire. On choisit k_0 suffisamment grand pour que e_G, x_1, \dots, x_n soient tous dans l'intérieur de B_{k_0} , en re-applicant tout le raisonnement précédent, on obtient :

$$\mathbb{P} \left(\limsup_k cut_k \mid X_0 = e_G, \dots, X_n = x_n \right) \geq \frac{\mu_{\min}^{2J}}{2C^4}$$

Autrement dit la martingale $(\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\limsup_k cut_k} \mid X_0, \dots, X_n])_n$ qui converge p.s. (car bornée par 1 - théorème de convergence L^1 des martingales) vers $\mathbb{1}_{\limsup_k cut_k}$ est donc minorée strictement par 0. On en déduit donc que $\mathbb{P}(\limsup_k cut_k) = 1$. \square

Le théorème 3 permet de démontrer le théorème suivant qui va nous permettre de donner une description complète du bord (sous-section suivante) pour certains types de groupes de la forme $\mathbb{Z}^d \wr \mathbb{Z}$.

Théorème 4. *Toute marche aléatoire transiente sur $\mathbb{Z}^d \wr \mathbb{Z}$ avec des incréments⁷ bornés sur le réseau \mathbb{Z}^d a une infinité de points de coupures (définition 13) avec probabilité 1.*

Démonstration. • Considérons tout d'abord le cas où μ n'est pas de moyenne nulle sur $G = \mathbb{Z}^d \wr \mathbb{Z}$, c'est à dire lorsque $\sum_{g \in G} g\mu(g) \neq 0$. Supposons qu'il existe un morphisme de groupe entre G et un autre groupe G' qui transforme μ en μ' (mesure image) et X_n en X'_n ($\forall n \in \mathbb{N}$). On peut remarquer que si X_n est un point de coupure, alors X'_n aussi pour la nouvelle marche : supposons que $X'_n := f(X_n)$ où f est un morphisme de groupe entre G et G' et que X_n est un point de coupure, ainsi on a :

$$\forall 0 \leq i < n < j, \mu(X_i^{-1}X_j) = 0$$

Si X'_n n'est pas un point de coupure, il existe i, j tels que $0 \leq i < n < j$ et :

$$\mu'(X'_i{}^{-1}X'_j) > 0$$

Or par structure de morphisme de groupe et définition de la mesure image on a :

$$\mu'(X'_i{}^{-1}X'_j) = \mu'(f(X_i)^{-1}f(X_j)) = \mu'(f(X_i^{-1}X_j)) = \mu(X_i^{-1}X_j) > 0$$

7. Par incréments d'une marche aléatoire $(X_n)_n$, on entend les variables aléatoires $I_n := X_{n-1}^{-1}X_n$

Ce qui contredit que X_n est un point de coupure.

Comme μ n'est pas de moyenne nulle sur \mathbb{Z}^d , il existe une composante où la projection de μ sur cette composante est non nulle. On prend f la projection sur cette composante, c'est un morphisme de groupe entre G et \mathbb{Z} . Ainsi $(X'_n)_n$ est une marche aléatoire sur \mathbb{Z} avec des incréments bornés et non nuls (car la projection sur la composante est non nulle). Ainsi par loi des grands nombres (ou un théorème d'ergodicité) on en déduit que $(X'_n)_n$ admet une infinité de point de coupure et donc $(X_n)_n$ aussi par ce qui précède (comme f est surjectif, f^{-1} est bien un morphisme).

• Considérons le cas où μ est de moyenne nulle sur $G = \mathbb{Z}^d \wr \mathbb{Z}$. On rappelle que d doit être supérieur ou égal à 3 pour que la marche aléatoire soit transiente. Pour conclure la preuve, il suffit de vérifier les inégalités (1), (2) et (3) afin d'appliquer le théorème 3. On note $Y = (Y^{(1)}, \dots, Y^{(d)})$ une variable de \mathbb{Z}^d ayant une distribution p . On note Σ la matrice de covariance de p : $\Sigma = (\mathbb{E}[Y^{(i)}Y^{(j)}])_{i,j}$ et pour $x \in \mathbb{Z}^d$, on pose :

$$\|x\| := (x \cdot \Sigma^{-1}x)^{\frac{1}{2}} \text{ et } b := \frac{1}{2} \Gamma\left(-1 + \frac{d}{2}\right) \pi^{-\frac{d}{2}} (\det \Sigma)^{-\frac{1}{2}}$$

On peut alors utiliser le théorème central limite local (ou une approximation plus large que l'on traitera en remarque après la preuve) pour obtenir :

$$\mathcal{G}(x) = b\|x\|^{2-d} + o\left(\|x\|^{1-d}\right) \quad (12)$$

Pour obtenir l'égalité ci-dessus on pourra se référer à [6] (pages 672-673), cela étant un peu technique et long, nous admettons cette égalité pour plus de clarté. Soit $u \in \mathbb{Z}^d$ fixé, on a :

$$\|x + u\|^{2-d} = \|x\|^{2-d} + O\left(\|x\|^{1-d}\right) \quad (13)$$

Donc en combinant (12) et (13) on obtient :

$$\nabla \mathcal{G}(x) := \max_{u \in U} |\mathcal{G}(x + u) - \mathcal{G}(x)| = O\left(\|x\|^{1-d}\right)$$

où U est ici le support de p . Comme U génère \mathbb{Z}^d comme un semi-groupe, il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$, on peut choisir $u_x \in U$ tel que $u_x \cdot \Sigma^{-1}x \geq c\|x\|$

On obtient en développant au carré et en notant que $d \geq 3$:

$$\|x + u_x\|^{2-d} = (\|x\|^2 + 2u_x \cdot \Sigma^{-1}x + \|u_x\|^2)^{1-\frac{d}{2}} \leq \|x\|^{2-d} (1 + 2c\|x\|^{-1})^{1-\frac{d}{2}}$$

D'où :

$$\|x + u_x\|^{2-d} = \|x\|^{2-d} (1 - (d-2)c\|x\|^{-1} + o(\|x\|^{-1}))$$

Ainsi on obtient :

$$\mathcal{G}(x) - \mathcal{G}(x + u_x) \geq b(d-2)c\|x\|^{1-d} + o\left(\|x\|^{1-d}\right)$$

Comme $\rho(\cdot)$ et $\|\cdot\|$ sont équivalentes (car \mathbb{Z}^d est de dimension finie), on en déduit que (1), (2) et (3) sont vérifiées. D'où le théorème en appliquant le théorème 3. \square

Remarque 5. La référence [6] invoque le théorème central limite local pour établir (12). Cependant on peut s'en passer en donnant directement une estimation de $p_n(x) := p_n(0, x) = \mathbb{P}(X_n = x)$ à l'aide de la valeur exacte de $\mathbb{P}(X_n = x)$ pour une marche aléatoire sur \mathbb{Z} et utiliser ensuite la formule de Stirling : $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$. Il est alors possible de généraliser à \mathbb{Z}^d par passage à la mesure produit.

3.2 Description complète du bord

Dans cette sous-section nous établissons le critère dit du "tronc (d'arbre)" qui permet dans certains cas de reconnaître à quoi ressemble le bord de Poisson. Cette méthode a été établie dans [8] par Erschler et Kaimanovich.

Définition 14. On appelle *tronc* d'une chaîne de Markov (sur un espace d'état au plus dénombrable, noté E) un sous-ensemble infini $A \subset E$ qui a la propriété suivante : "Pour presque toute trajectoire de la chaîne issue de n'importe quel état initial, on visite tous les points de A sauf peut-être un nombre fini d'entre eux."

Définition 15. On dit qu'une chaîne de Markov possède la *propriété de convergence du tronc* relatif à un quotient B du bord de Poisson, si pour presque tout point $b \in B$, la chaîne de Markov conditionnée à converger vers un état déterminé par b (voir la relation d'équivalence définissant le bord de Poisson), possède un tronc.

Lemme 6. (*Critère du tronc*)

Si une chaîne de Markov possède la propriété de convergence du tronc relatif à un quotient B du bord de Poisson, alors B est le bord de Poisson de la chaîne.

Démonstration. On note $H^\infty(G, \mu)$ l'espace de Banach des fonction μ -harmoniques bornées de G muni de la norme sup. On définit le morphisme quotient :

$$\mathbf{bnd} : G^\infty \rightarrow \partial_\mu G$$

On définit la mesure image de \mathbb{P}_θ par le morphisme quotient :

$$\nu_\theta := \mathbf{bnd} \mathbb{P}_\theta$$

On appelle cette mesure, la *mesure harmonique* associée à la distribution initiale θ . En particulier on notera :

$$\nu := \mathbf{bnd} \mathbb{P}_{e_G}$$

On a donc : $\nu_\theta = \theta * \nu$ et $\nu_{\delta_g} = g\nu$ et remarquons que la mesure ν est μ -stationnaire :

$$\nu = \mathbf{bnd} \mathbb{P}_{e_G} = \mathbf{bnd}(T\mathbb{P}_{e_G}) = \mathbf{bnd} \mathbb{P}_\mu = \sum_g \mu(g)g\nu = \mu * \nu$$

Où T est l'opérateur de translation à droite, cela résulte aussi du fait que la trajectoire translatée d'un décalage à droite est envoyée sur le même point que la trajectoire initiale dans le bord de Poisson. On note V la classe des mesures équivalentes à ν_θ où $\text{supp}(\theta) = G$.

Pour toute fonction $\hat{f} \in L^\infty(\partial_\mu G, V)$, la formule de Poisson :

$$f(g) := \langle \hat{f}, g\nu \rangle$$

permet d'obtenir une fonction f qui est μ -harmonique. Cette formule de Poisson permet notamment de montrer qu'il y a un isomorphisme entre les espaces de Banach $L^\infty(\partial_\mu G, V)$ et $H^\infty(G, \mu)$.

En effet, si l'on considère une fonction μ -harmonique f alors la suite de fonction définies sur l'espace des trajectoires ($y \in G^\infty$) par :

$$F_n(y) := f(y_n)$$

est une $(\mathcal{A}_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ -martingale. Où l'on note \mathcal{A}_0^n la tribu associée aux n premières coordonnées sur l'espace des trajectoires. De plus par le théorème de convergence des martingales, la suite F_n converge presque sûrement vers une fonction F_∞ qui donne une fonction bornée \hat{f} . Réciproquement la formule de Poisson donne bien une fonction μ -harmonique par le calcul pour toute fonction \hat{f} bornée.

Considérons tout d'abord le cas où B est un singleton, c'est à dire que la chaîne de Markov d'origine possède un tronc. Toute fonction harmonique bornée f converge le long de presque toute trajectoire de la chaîne. Cependant par ce qui précède et la définition 15, les valeurs prises par f (vue dans $L^\infty(\partial_\mu G, V)$ par l'isomorphisme) sont presque sûrement les mêmes, donc f est constante et donc le bord de Poisson de la marche aléatoire est trivial (par le théorème 2) et coïncide donc avec le singleton B .

Considérons maintenant le cas général, en supposant les hypothèses de l'énoncé il suffit de conditionner la marche aléatoire par B et donc le bord de Poisson de toute marche aléatoire conditionnée comme cela est trivial par le premier cas. Autrement dit, B est le bord de Poisson de la chaîne. □

En notant encore $(X_n)_n$ une marche aléatoire sur un groupe G , on peut définir le nombre de visites de la marche en un point $x \in G$ jusqu'au temps t par :

$$N_t(x) := \#\{n \in \mathbb{N} \mid 0 \leq n \leq t, X_n = x\}$$

Avec les notations précédentes, on peut définir la chaîne de Markov d'occupation associé à $(X_n)_n$ par $(X_n, N_{n-1})_n$. Ainsi si $(X_n)_n$ est une marche aléatoire sur un groupe G avec pour mesure μ , la chaîne de Markov d'occupation associé est une marche aléatoire sur le produit en couronne $G \wr \mathbb{Z}$ avec la mesure $\mu \otimes \delta_\theta$ où δ_θ dénote la distribution initiale sur le groupe G .

Corollaire 2. Sous les hypothèses du théorème 4, le bord de Poisson $\partial_\nu G$ (où $G = \mathbb{Z}^d \wr \mathbb{Z}$ et $\nu = \mu \otimes \delta_\theta$) associée à la chaîne de Markov d'occupation, coïncide avec l'espace des fonctions d'occupation limite $N_\infty := \lim_{n \rightarrow +\infty} N_n$.

Démonstration. Il suffit de remarquer qu'une suite infinie de points de coupures est précisément un tronc pour la chaîne de Markov d'occupation conditionnée par la fonction limite d'occupation N_∞ . Ainsi en notant provisoirement \mathcal{C} l'espace des fonctions d'occupation limite. On remarque que pour presque tout point $b \in \mathcal{C}$ la chaîne de Markov conditionnée à converger vers un état dépendant de b possède un tronc (par l'infinité de points de coupures issue du théorème 4). Donc la chaîne de Markov d'occupation possède la propriété de convergence du tronc relatif à \mathcal{C} . Par le lemme 6, il s'agit en effet du bord de Poisson. □

4 Bord de Poisson d'une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^d \wr (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$

Dans l'étude du bord de Poisson d'une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^d \wr (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, la méthode des points de coupures ne peut s'appliquer aussi bien que dans le cas de $\mathbb{Z}^d \wr \mathbb{Z}$, principalement à cause du fait que l'on ne garde plus en mémoire le nombre de visites en un point du réseau. On efface en effet le nombre de visites au profit de la configuration allumée/éteinte des réverbères (voir sous-section 2.2.3).

Dans cette section, nous considérerons des marches aléatoires simple que l'on définit ci-dessous.

Définition 16. On appelle *marche aléatoire simple* sur le groupe (G, μ) , une marche aléatoire $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant les points suivants :

- $X_0 = e_G$
- $I_n := X_{n-1}^{-1} X_n$ (incrément) est indépendant de (X_0, \dots, X_n) .
- La mesure μ est non dégénérée.

4.1 Conjecture de Kaimanovich-Vershik

Conjecture. *Le bord de Poisson d'une marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}^d \wr (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ est donné par la configuration finale (limite) des lampes lorsque $d \geq 3$.*

Cette conjecture a été prouvée par Russell Lyons et Yuval Peres en 2015 dans [2], cependant elle fut déjà prouvée en 2011 pour $d \geq 5$ par Anna Erschler dans [7].

4.2 Critère entropique

Pour une distribution discrète de probabilité π sur un ensemble G , on peut définir l'entropie associée à π par :

$$H(\pi) := \sum_{g \in G} \pi(g) \log \pi(g)^{-1}$$

Pour une tribu \mathcal{F} et une variable aléatoire discrète X , on définit l'entropie de X par $H(X)$ et on note $H^{\mathcal{F}}(X)$ l'entropie de la distribution conditionnelle X sachant \mathcal{F} . Ainsi on peut remarquer que $H^{\mathcal{F}}(X)$ est \mathcal{F} -mesurable et on peut poser :

$$H(X|\mathcal{F}) := \mathbb{E} [H^{\mathcal{F}}(X)]$$

On prendra la notation \mathbb{P}_g pour désigner la loi d'une marche aléatoire $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur G commençant en $g \in G$.

Définition 17. On dira que deux tribus sont *égales mod 0* si leurs complétions sont égales par rapport à \mathbb{P}_{e_G} (i.e. égales à des ensembles \mathbb{P}_{e_G} -négligeables près).

Théorème 5. (*Critère entropique*)

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une marche aléatoire sur (G, μ) (au sens de la définition 2) telle que l'entropie vérifie $H(X_1) < +\infty$. On considère J une sous-tribu G -invariante de $\partial_\mu G$, i.e. $J \subseteq \partial_\mu G$. Alors si l'on définit l'entropie d'Avez associée à J par :

$$h^J := \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{H^J(X_n)}{n}$$

On a la convergence p.s. et dans L^1 de la suite de variables $\left(\frac{H^J(X_n)}{n} \right)_n$ vers la constante $H(X_1|J) - H(X_1|\partial_\mu G)$. Ainsi de plus on obtient :

$$h^J = 0 \Leftrightarrow J = \partial_\mu G \text{ mod } 0$$

Démonstration. On admet ce critère technique concernant l'identification du bord de Poisson. Une preuve de ce résultat se trouve dans [3] (théorème 14.35 et corollaire 14.36). \square

Corollaire 3. (*Corollaire critère entropique*)

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une marche aléatoire sur (G, μ) (au sens de la définition 2) telle que l'entropie vérifie $H(X_1) < +\infty$. On considère J une sous-tribu G -invariante de $\partial_\mu G$, i.e. $J \subseteq \partial_\mu G$. On suppose que pour tout $\epsilon > 0$, il existe une suite aléatoire $(Q_{n,\epsilon})_{n \in \mathbb{N}}$ de sous-ensembles finis de G tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} (i) \ Q_{n,\epsilon} \text{ est } J\text{-mesurable} \\ (ii) \ \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log(\#Q_{n,\epsilon})}{n} < \epsilon \text{ p.s.} \\ (iii) \ \limsup_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{e_G}(\exists m > n, X_m \in Q_{n,\epsilon}) > 0 \end{array} \right.$$

Alors $J = \partial_\mu G \text{ mod } 0$

Démonstration. Posons $p_n^J(x, y) := \mathbb{P}_x(X_n = y | J)$ pour les probabilités de transition de la chaîne de Markov conditionnée par J . D'après [9], on a le résultat suivant portant sur l'entropie :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log p_n^J(e_G, X_n)}{n} = -h^J \text{ p.s.} \quad (14)$$

Par le théorème précédent, il suffit de montrer que $h^J = 0$. On peut remarquer par la définition de H que l'on a toujours $h^J \geq 0$. Supposons donc par l'absurde que $h^J > 0$.

On définit :

$$S_m := \left\{ x \in G \mid p_m^J(e_G, x) \leq \exp\left(\frac{-mh^J}{2}\right) \right\}$$

Donc pour $\epsilon > 0$, on obtient :

$$\mathbb{P}_{e_G}(X_m \in Q_{n,\epsilon} \cap S_m \mid J) \leq \#Q_{n,\epsilon} \cdot \exp\left(\frac{-mh^J}{2}\right)$$

On en déduit ainsi :

$$\mathbb{P}_{e_G}(\exists m \geq n, X_m \in Q_{n,\epsilon} \cap S_m \mid J) = \mathbb{P}_{e_G}\left(\bigcup_{m \geq n} X_m \in Q_{n,\epsilon} \cap S_m \mid J\right) \leq \sum_{m \geq n} \#Q_{n,\epsilon} \cdot \exp\left(\frac{-mh^J}{2}\right)$$

Par sommation géométrique on obtient donc :

$$\mathbb{P}_{e_G}(\exists m \geq n, X_m \in Q_{n,\epsilon} \cap S_m \mid J) \leq \#Q_{n,\epsilon} \cdot c \exp\left(\frac{-nh^J}{2}\right)$$

où $c = c(h^J)$ est une constante dépendant de h^J . De plus par l'hypothèse (ii), on a la limite suivante :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \#Q_{n,\epsilon} \cdot c \exp\left(\frac{-nh^J}{2}\right) = 0 \text{ p.s.}$$

D'où l'on tire par ce qui précède :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{e_G}(\exists m \geq n, X_m \in Q_{n,\epsilon} \cap S_m) = 0 \text{ p.s.} \quad (15)$$

D'après (14), on déduit que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{e_G}(\exists m \geq n, X_m \notin S_m) = 0 \text{ p.s.} \quad (16)$$

En corrélant cela avec (15), on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_{e_G}(\exists m \geq n, X_m \in Q_{n,\epsilon}) = 0 \text{ p.s.}$$

Ce qui contredit la condition (iii) et termine la preuve du corollaire. \square

4.3 Description complète du bord

Nous donnons une preuve de la conjecture de Kaimanovich-Vershik en utilisant le critère entropique détaillé ci-dessus et en adaptant la méthode des points de coupures vue dans la section précédente pour une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^d \wr \mathbb{Z}$. Notons toutefois que nous formulons davantage d'hypothèse que sur la conjecture d'origine de Kaimanovich-Vershik.

Théorème 6. *Soit $d \geq 3$ et μ une mesure de probabilité d'entropie finie sur $\mathbb{Z}^d \wr (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. On suppose μ non dégénérée et concentrée en $\{(0, \delta^s) \mid s \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\} \cup \{(x, id) \mid x \in \mathbb{Z}^d\}$. Si en outre la projection de μ sur \mathbb{Z}^d a une moyenne nulle⁸ et est de support fini, alors le bord de Poisson de $(\mathbb{Z}^d \wr (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}), \mu)$ est $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathbb{Z}^d}$ muni de la tribu $\sigma(\Phi_\infty)$ où Φ_∞ est la configuration limite des lampes.*

Démonstration. On considère de nouveau les événements cut_k introduits dans la section 3 :

$$cut_k := \bigcup_{n=1}^{+\infty} \{\forall i < n : X_i \in B_k \setminus \partial B_k, X_n \in \partial B_k, \forall j > n : X_j \notin B_k\}$$

(On notera X_n la marche aléatoire projetée sur \mathbb{Z}^d d'une marche aléatoire \widehat{X}_n définie sur le produit en couronne).

On a vu dans la preuve du théorème 3 que l'on avait les inégalités suivantes si la projection de

8. Pour un rappel de la moyenne d'une mesure, on peut regarder la démonstration du théorème 4.

μ sur le réseau \mathbb{Z}^d était symétrique : $\mathbb{P}_0(\text{cut}_k) \geq \frac{C}{k}$ et $\mathbb{P}_0(\text{cut}_k \cap \text{cut}_{k+m}) \leq \frac{C^2}{km}$ où C est une constante. La preuve vue dans la section 3, n'utilise en fait qu'un encadrement de la fonction de Green. L'encadrement de cette fonction tient en fait tant que la projection de μ est de moyenne nulle, pour cette généralisation on peut se référer au théorème 4.3.1 de [10]. En reprenant la démonstration du lemme de Kochen-Stone et en appliquant l'inégalité de Paley-Zygmund non pas à $\sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{\text{cut}_k}$ mais à $\sum_{k=n}^{n^2} \mathbb{1}_{\text{cut}_k}$ on obtient :

$$\mathbb{P}_0 \left(\bigcup_{k=n}^{n^2} \text{cut}_k \right) \geq \frac{C(\log n)^2}{(\log n)^2} = C > 0$$

On définit les ensembles $Q_n := Q_{n,\epsilon}$ comme étant l'ensemble des couples (ϕ, x) tels que :

$$n \leq |x| \leq n^2$$

et vérifiant aussi :

$$\phi(z) = \begin{cases} \Phi_\infty(z) & \text{si } |z| < |x| \\ id(z) & \text{si } |z| \geq |x| \end{cases}$$

où $|x|$ dénote la distance de x à l'identité du groupe, en tant que métrique de mots.

Remarquons quand même que $\Phi_\infty := \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n$ existe bien d'après le lemme 2. Par définition de Q_n , on a donc :

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_0(\exists m \geq n, \widehat{X}_m \in Q_n) > 0$$

Et de plus,

$$\#Q_n \leq Const \cdot n^{2d}$$

Le corollaire 3 permet donc de conclure que $\sigma(\Phi_\infty)$ coïncide avec le bord de Poisson mod 0. \square

5 Quelques utilisations de la théorie des marches aléatoires sur les groupes

5.1 Réseau électrique et théorie du potentiel

Nous avons vu dans la section 2.1.3 les résultats de Pólya concernant le caractère récurrent ou transient d'une marche aléatoire sur \mathbb{Z}^d . Ces résultats possèdent une interprétation en termes de réseaux électriques assez importante, permettant notamment de nouvelles démonstrations en introduisant le concept d'énergie et du "principe de Dirichlet". Pour plus de détails concernant l'analogie des marches aléatoires avec le réseau électrique, on pourra consulter [17] et [18]. Néanmoins, nous allons présenter une utilisation possible.

On attribue à chaque arête de \mathbb{Z}^d la résistance 1 et on suppose valide les lois de l'électricité pour ce réseau de résistances. Le problème consiste à connaître en particulier quelle est la résistance effective R_{ef} du réseau lorsqu'une différence de potentiel unité est appliquée entre 0 et l'infini de \mathbb{Z}^d . En théorie électrique, la réponse générale est que le produit de R_{ef} par la probabilité de non retour à l'origine est un nombre strictement positif.

Ainsi, par les résultats de Pólya, R_{ef} est finie si et seulement si $d \geq 3$ et pour $d \leq 2$ la résistance effective est infinie. On peut interpréter physiquement cela comme l'absence de courant électrique entre 0 et l'infini pour $d \leq 2$. Et réciproquement, il y a un courant électrique pour $d \geq 3$.

En notant $(e_i)_{i \in \llbracket 1, d \rrbracket}$ la base canonique du réseau \mathbb{Z}^d , le laplacien⁹ discret d'une fonction

9. Voir la section 2.2.1

$f : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{R}$ s'écrit pour $x \in \mathbb{Z}^d$:

$$\Delta f(x) = \frac{1}{2d} \left[\sum_{i=1}^d f(x + e_i) + f(x - e_i) \right] - f(x)$$

Selon les équations de la physique, la fonction représentant le potentiel $v(x)$ pour $x \in \mathbb{Z}^d$ devrait satisfaire les équations :

$$\begin{aligned} v(0) &= 1 \\ \forall x \neq 0, \Delta v(x) &= 0 \text{ (harmonicité)} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} v(x) &= 0 \end{aligned}$$

L'équation d'harmonicité appar  it en physique par l'interprétation que la somme des courants issus de $x \in \mathbb{Z}^d$ doit être nulle (Loi de Kirchhoff).

Le problème considéré ici, appartient donc clairement à la théorie du potentiel. Par le fait que le bord de Poisson de toute marche aléatoire sur \mathbb{Z}^d est trivial (car \mathbb{Z}^d est abélien), on a par la propriété de Liouville (section 2.2.1) que si la fonction de potentiel est bornée (elle est harmonique par hypothèses physiques), alors elle est constante. C'est donc une illustration de l'application de la théorie des marches aléatoires à la théorie électrique et du potentiel.

5.2   tude de l'équation de Poisson

Pour un groupe G localement compact métrisable portant une mesure de probabilité p , la marche aléatoire (droite) sur G définie une chaîne de Markov d'espace d'  tats G et de noyau de transition P déterminé par :

$$P\phi(g) = \int \phi(gh) dp(h)$$

L'opérateur de convolution $P - Id$ associé à $p - \delta_{e_G}$ est l'analogue de l'opérateur Laplacien dans \mathbb{R}^d : $\Delta = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$. L'équation de Poisson dans la théorie classique du potentiel est l'équation :

$$\Delta f = -g$$

où f est le potentiel crée par la répartition de charges électriques donnée par g . Dans la situation des marches aléatoires sur des groupes, son analogue est l'équation intégrale :

$$(P - Id)f = -g$$

Par des méthodes de résolutions propre à cette théorie du potentiel, il faut introduire le "noyau potentiel" donné par :

$$V := \sum_{n=0}^{+\infty} P^n$$

Et dans beaucoup de cas étudiés dans la théorie, la solution de l'équation intégrale est donnée par :

$$f = \sum_{n=0}^{+\infty} P^n g = Vg$$

La bonne définition de cette solution repose donc sur la convergence de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} P^n$, ce qui

se ramène à l'étude de la convergence de la série $v := \sum_{n=0}^{+\infty} p^n$. En effet par arguments de la théorie, il est possible de montrer que la divergence de cette dernière série équivaut au fait que pour tout $g \geq 0$ (non identiquement nulle) l'équation $(P - Id)f = -g$ n'a pas de solution. Dans

la théorie classique du potentiel dans \mathbb{R}^d la convergence a lieu pour $d \geq 3$ et V correspond au potentiel newtonien :

$$V(x, y) = \frac{1}{\|x - y\|^{d-2}}$$

(Pour $d = 2$ il existe une théorie du potentiel logarithmique avec un analogue de V non positif donné par $\log \|x - y\|$) La notion de convergence de la série définissant V est intimement lié à l'existence de la fonction de Green vue dans la section 2.1.3.

Reprenons l'équation $(P - Id)f = -g$, si on suppose g connue alors f est clairement déterminée modulo les solutions f' de l'équation homogène :

$$(P - Id)f = 0$$

Les solutions f' de cette équation, sont appelées fonction p -harmoniques par analogie avec la théorie classique du potentiel. Et la résolution de l'équation de Poisson passe donc par la recherche de ces fonctions. Ainsi, à nouveau les groupes mesurés possédant la propriété de Liouville seront donc particulièrement intéressants pour les modélisations en théorie du potentiel.

5.3 Équation de Schrödinger discrète en milieu aléatoire sur \mathbb{Z}

On considère dans \mathbb{R}^d le laplacien Δ et un potentiel $V(x)$ qui sera considérée comme une fonction réelle. On introduit l'opérateur de Schrödinger qui associe à une fonction $u \in C^2$ la fonction $-\Delta u(x) + V(x)u(x)$. Avec quelques conditions sur V on peut montrer que c'est un opérateur auto-adjoint dans $L^2(\mathbb{R}^d)$. On s'intéresse en particulier à l'équation stationnaire suivante avec $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$-\Delta u + Vu = \lambda u$$

Au sens de la théorie d'étude de cette équation, on se demande s'il existe une base orthonormale de $L^2(\mathbb{R}^d)$ formée de fonctions satisfaisant cette équation, on dit alors que la particule est localisée. Pour cela, on s'intéresse plutôt au spectre de l'opérateur de Schrödinger et en utilisant le contexte de marches aléatoires, on discrétise l'équation en se plaçant sur \mathbb{Z}^d . On remplace donc $-\Delta + V$ par son opérateur discrétisé.

Une question qui s'est posée aux physiciens (notamment Mott et Anderson) dans les années 1960 est de savoir si dans le réseau \mathbb{Z}^3 , il y a localisation lorsque le potentiel discrétisé V_n ($n \in \mathbb{Z}^3$) est une famille de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. Le problème n'est pas encore entièrement résolu de nos jours. Néanmoins, nous pouvons présenter le problème en dimension 1.

Soit $(\epsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires bornées (par exemple le résultat d'un pile ou face modélisé par des Bernoulli ou des Rademacher). On définit l'opérateur borné S de $\ell^2(\mathbb{Z})$ par :

$$(Su)_n = -(u_{n+1} + u_{n-1}) + \epsilon_n u_n$$

La question qui se pose est de savoir si pour presque tout $\omega \in \Omega$ (univers), l'opérateur auto-adjoint S de $\ell^2(\mathbb{Z})$ admet une base de vecteurs propres.

Un théorème dû à Goldscheid-Molcanov-Pastur assure que oui sous certaines hypothèses sur les variables ϵ_n . À ce sujet on pourra consulter [19] et [20]. Il s'agit donc de chercher les vecteurs propres, et donc d'étudier :

$$(u_{n+1} + u_{n-1}) + \epsilon_n u_n = \lambda u_n$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$. On peut d'ailleurs mettre cette équation sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_n - \lambda & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix}$$

Ainsi, si l'on pose $A_n := \begin{pmatrix} \epsilon_n - \lambda & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ qui est donc une matrice de $SL_2(\mathbb{R})$ et $X_n := \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix}$ on obtient donc la relation de récurrence matricielle :

$$X_{n+1} = A_n X_n$$

En particulier, on obtient ainsi :

$$X_n = A_{n-1} \cdots A_0 X_0$$

Dans ce cas, l'étude de la localisation peut donc se ramener à l'étude de la marche aléatoire définie par :

$$Y_n(\omega) = A_{n-1} \cdots A_0 \quad \forall n \geq 0$$

Ce qui illustre à nouveau l'utilité d'une théorie des marches aléatoires sur les groupes, ici en particulier sur le groupe $SL_2(\mathbb{R})$.

6 Conclusion

L'introduction du contexte "général" de marche aléatoire sur les groupes réalisée dans les premières parties de ce rapport nous a permis de définir et de mieux appréhender le *bord de Poisson* d'une marche aléatoire. Cet outil, tout comme les résultats de *réurrence* ou de *transience*, permet en général de lier directement la nature du groupe et de la mesure qui s'y attache au comportement asymptotique de la marche aléatoire.

On peut donc voir dans le bord de Poisson, un pont entre certaines propriétés algébriques et certaines propriétés probabilistes dans l'étude d'une marche aléatoire sur un groupe. Nous avons remarqué qu'un premier critère de trivialité du bord était donné par la *propriété de Liouville* qui se retranscrit à l'aide de fonctions μ -harmoniques. Puis, nous avons constaté les différences le concernant en fonction de la nature du groupe : abélien, nilpotent, moyennable.

L'objectif de ce stage s'est ensuite focalisé sur l'étude de certains groupes moyennables qui n'ont pas forcément un bord trivial (information venant compléter le théorème de Kaimanovich-Vershik-Rosenblatt). Pour ce faire, nous avons donc vu la construction de *produits en couronne*. Afin de mener à bien cette étude, il nous a fallu comprendre et appliquer la *méthode des points de coupures*. Il s'agit dans cette méthode de prouver que la marche aléatoire possède presque sûrement une infinité de points de coupures. Les points de coupures étant grossièrement des "zones" où la marche aléatoire ne reviendra pas, une fois les avoir quittées.

Cette dernière méthode appliquée aux groupes $\mathbb{Z}^d \wr \mathbb{Z}$ permet une *description complète du bord* en utilisant le critère dit du "*tronc d'arbre*" explicité par A. Erschler et V. A. Kaimanovich. Cependant, pour appliquer ce critère pour l'étude du bord de Poisson pour les groupes $\mathbb{Z}^d \wr (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, il faut adapter la méthode des points de coupures et aussi utiliser le *critère entropique*. Il est intéressant de remarquer que dans les deux cas mentionnés ci-dessus, le bord de Poisson est donné par la configuration limite des lampes dans la métaphore du produit en couronne. Les résultats présentés confirment donc la conjecture de Kaimanovich-Vershik énoncée dans les années 1980 à propos de la non trivialité du bord de Poisson dans ces cas. Outre la non trivialité, la description complète du bord permet de comprendre le comportement asymptotique grâce à sa construction quotient.

Enfin, dans la dernière partie, nous avons illustré des exemples d'utilisation des marches aléatoires en physique. Dans ces exemples, nous avons constaté la profonde utilité du bord de Poisson avec son lien très fort qu'il noue avec la propriété de Liouville. Le dernier exemple donné par *l'équation de Schrödinger discrète* en milieu aléatoire sur \mathbb{Z} montre la nécessité d'une théorie générale des marches aléatoires sur un groupe quelconque. En effet, si l'on peut prédire le comportement d'une marche aléatoire sur $SL_2(\mathbb{R})$, on peut obtenir des informations sur l'existence de solutions à certaines équations de type Schrödinger. Il ne nous est donc pas difficile d'imaginer le gros potentiel de cette théorie sur d'autres équations discrètes dans le milieu de la physique. Il est donc toujours d'actualité de développer cette branche des mathématiques afin, par exemple, d'obtenir d'autres caractérisations asymptotiques ou d'autres invariants algébriques-probabilistes pour appréhender de nouveaux phénomènes physiques.

Table des figures

1	Moyennabilité de \mathbb{Z}	8
2	Moyennabilité de \mathbb{Z}^2	9
3	Réseau $(\mathbb{Z}^2, +)$ avec générateurs e_1 et e_2	12

Figures réalisées sous Geogebra et Paint

Références

- [1] **V. A. Kaimanovich et A. M. Vershik**, *Random Walks on Discrete Groups : Boundary and Entropy*, The Annals of Probability, 1983, Vol. 11, No. 3, pp. 457-490.
- [2] **R. Lyons et Y. Peres**, *Poisson Boundaries of Lamplighter Groups : Proof of the Kaimanovich-Vershik Conjecture*, 2017, arXiv :1508.01845v4
- [3] **R. Lyons et Y. Peres**, *Probability on Trees and Networks*, <http://pages.iu.edu/~rdlyons/prbtree/> Chap. 14 pp. 467-509.
- [4] **A. Debreil**, *Groupes finis et treillis de leurs sous-groupes*, Calvage & Mounet, 2016.
- [5] **E. Luçon**, *Théorème de Polya*, <https://www.lpsm.paris/pageperso/eric/polya.pdf>
- [6] **N. James et Y. Peres**, *Cutpoints and Exchangeable Events for Random Walks*, Theory Probab. Appl., 41(4), pp. 666–677.
- [7] **A. Erschler**, *Poisson-Furstenberg boundary of random walks on wreath products and free metabelian groups*, Commentarii Mathematici Helvetici, 2011, pp. 113-143.
- [8] **A. Erschler et V. Kaimanovich**, *Arboreal structures on groups and the associated boundaries*, 2019, arXiv :1903.02095
- [9] **V. A. Kaimanovich**, *The Poisson formula for groups with hyperbolic properties*, Annals of Mathematics, (152) 2000, pp. 659–692, arXiv :math/9802132
- [10] **G. F. Lawler et V. Limic**, *Random Walk : A Modern Introduction*, <https://www.math.uchicago.edu/~lawler/srwbook.pdf>
- [11] **G. Choquet et J. Deny**, *Sur l'équation de convolution $\mu = \mu * \sigma$* , 1959-1960, Séminaire BreLOT-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, Tome 4, Exposé no. 5, 11 p.
- [12] **A. Raugi**, *Une démonstration d'un théorème de Choquet-Deny par les martingales*, Annales de l'I. H. P., section B, tome 19, no1 (1983), p. 101-109
- [13] **A. Raugi**, *A general Choquet-Deny theorem for nilpotent groups*, Annales de l'I. H. P., Probab. Statist., 2004, 40(6) :677–683
- [14] **V. A. Kaimanovich**, *Poisson Boundaries of Random Walks on Discrete Solvable Groups*, Heyer H. (eds) Probability Measures on Groups X. Springer, Boston, MA, 1991, pp 205-238
- [15] **J. M. Rosenblatt**, *Ergodic and mixing random walks on locally compact groups*, Math. Ann. 257(1981), no. 1, 31–42, DOI 10.1007/BF01450653. MR630645 (83f :43002)
- [16] **P. Eymard, G. Schifmann, J. Faraut et R. Takahashi**, *Analyse harmonique sur les groupes de Lie*, Lecture Notes in Mathematics, Springer, 1973-1975, pp. 89-92
- [17] **C. St J. A. Nash-Williams**, *Random walks and electrical currents in networks*, Proc. Cambridge Phil. Soc. 55, 1959, pp 181-194
- [18] **P. G. Doyle et J. L. Snell**, *Random walks and electric networks*, Carus Math. Monographs 22
- [19] **I. Goldcheid, S. A. Molcanov et L. A. Pastur**, *A pure point spectrum of the one-dimensional Schrödinger operators*, Funct. Anal. Appl. 11, 1977 pp 1-10
- [20] **R. Carmona et J. Lacroix**, *Spectral theory of random Schroedinger operators*, Probability and its applications, Birkhäuser, 1990.