

Mouvement brownien: théorème de Pitman et chemins de Littelmann

Charlie HÉRENT

Stage encadré par Philippe BIANE - Université de Paris-Est

Mars - Juin 2021

Résumé

Le théorème de Pitman, découvert en 1975, transforme un mouvement brownien à une dimension en un processus de Bessel. Le processus de Bessel ainsi obtenu peut être vu comme un brownien conditionné à rester positif. Nous étudions ici le théorème originel, ainsi que ses généralisations au cadre d'espace vectoriel et d'algèbre de Lie que l'on doit à Biane-Bougerol-O'Connell dans l'article [1], dont on suivra la ligne directrice.

Table des matières

1	Introduction	2
2	Théorème de Pitman pour le mouvement brownien à une dimension	3
2.1	Notations et prérequis pour le théorème de Pitman	3
2.2	Marches aléatoires approchées	5
2.3	Théorème de Pitman en temps discret	11
2.4	Démonstration du théorème de Pitman en temps continu	15
3	Transformation de Pitman	17
3.1	Définition de la transformée de Pitman et propriétés fondamentales	17
3.2	Relations de tresse pour la transformée de Pitman	21
3.3	Transformation de Pitman et groupes de Coxeter	26
4	Opérateurs de Littelmann et transformation de Pitman	30
4.1	Définition des opérateurs de Littelmann et propriétés fondamentales	30
4.2	Relation entre transformation de Pitman et opérateurs de Littelmann	33
5	Algèbres de Lie, Groupes de Lie et transformation de Pitman	36
5.1	Vocabulaire sur les algèbres de Lie, systèmes de racines et chambres de Weyl	36
5.2	Module de Littelmann et chemin dominant	44
5.3	Formule de représentation théorique pour la transformée de Pitman	47
6	Généralisation du théorème de Pitman	49
6.1	Dualité et co-transformation de Pitman	49
6.2	Théorème de représentation du mouvement brownien dans une chambre de Weyl	55
7	Conclusion	62

Je tiens vivement à remercier Monsieur Biane, pour son soutien, sa grande disponibilité et notamment pour m'avoir proposé ce sujet passionnant. Je souhaite également remercier Madame Defosseux pour notre discussion très enrichissante au MAP5. Enfin, je remercie aussi Monsieur Gradinaru pour son soutien et son cours doctoral qui m'a facilité la compréhension de plusieurs concepts dans ce stage.

1 Introduction

Le théorème de Pitman, découvert en 1975, affirme que si $(B_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien à une dimension, alors $(2 \sup_{0 \leq s \leq t} B_s - B_t)_{t \geq 0}$ est un processus de Bessel.

Grâce à la symétrie du mouvement brownien, on peut aussi énoncer le théorème en disant que $(B_t - 2 \inf_{0 \leq s \leq t} B_s)_{t \geq 0}$ est un processus de Bessel.

Autrement dit, si l'on pose l'application « transformation de Pitman » comme étant la transformation qui associe à une fonction f continue réelle nulle en 0 définie sur \mathbb{R}^+ , la fonction :

$$\mathcal{P}f(t) := f(t) - 2 \inf_{0 \leq s \leq t} f(s) \quad \text{pour } t \geq 0$$

Le théorème de Pitman de 1975 affirme que $(\mathcal{P}B_t)_{t \geq 0}$ est un processus de Bessel.

Comme l'on peut aussi voir le processus de Bessel comme un mouvement brownien conditionné au sens de Doob à rester positif, le théorème de Pitman transforme un mouvement brownien à valeurs dans \mathbb{R} en un mouvement brownien (au sens de Doob) à valeurs dans \mathbb{R}^+ .

L'article [1], datant de 2005, de Philippe Biane, Philippe Bougerol et Neil O'Connell établit une généralisation du théorème de Pitman. Il établit en particulier que si $(X_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien à valeurs dans un espace vectoriel V (ou une algèbre de Lie), alors $\mathcal{P}_{w_0}X$ est un mouvement brownien à valeurs dans la chambre de Weyl fondamentale (fermée). Dans cet énoncé, la transformation de Pitman est généralisée et associée au plus long élément w_0 du groupe de Weyl relativement à un système de racines. La chambre de Weyl fondamentale peut s'interpréter comme un cône dans l'espace V délimité par certains hyperplans.

Entre 1995 et 1998, Peter Littelmann s'est intéressé à la théorie des représentations pour les groupes et algèbres de Lie. On peut citer notamment ses articles [10], [11] et [12] dans lesquels il introduit des opérateurs sur les chemins. Ces opérateurs que l'on appelle « opérateurs de Littelmann » dans la littérature actuelle, partagent des liens profonds avec la transformation de Pitman introduite par Biane, Bougerol et O'Connell. Pour un certain type de chemins, la transformation de Pitman peut s'écrire comme une itération des opérateurs de Littelmann. Ce lien particulier est notamment mis en lumière dans l'article [1] en généralisant tout d'abord les opérateurs de Littelmann à l'aide de « l'inversion de Biane-Bougerol-O'Connell ». Cette inversion permet à partir d'un chemin donné et d'une information appelée « coordonnée en corde » de fournir un antécédent au chemin pour la transformation de Pitman.

Nous présenterons dans ce mémoire tout d'abord, en section 2, la démonstration du théorème de Pitman de 1975, en suivant la ligne directrice de sa démonstration originelle dans [2]. On y trouvera en particulier une preuve du théorème de Pitman en version discrète. En section 3, on s'intéressera aux premières propriétés de la transformation de Pitman avec notamment sa propriété de « tresse » et sa généralisation aux groupes de Coxeter. Puis, la section 4 sera consacrée à la construction des opérateurs de Littelmann, leurs premières propriétés et liens avec la transformation de Pitman. La section 5 aura pour objectif de se familiariser au contexte d'algèbre et de groupe de Lie. On y trouvera de façon détaillée toutes les définitions utilisées dans l'article à étudier, ainsi que des exemples et notions importantes pour aborder la dernière section. Enfin, en section 6, seront données deux preuves de la généralisation du théorème de Pitman. On y rencontrera notamment d'autres transformations sur les chemins et en particulier la co-transformation de Pitman.

2 Théorème de Pitman pour le mouvement brownien à une dimension

2.1 Notations et prérequis pour le théorème de Pitman

• Soit $(W_t)_{t \geq 0}$ un processus à valeurs réelles. Soit $c \in \mathbb{R}$, on définit le premier et le dernier moment où W atteint c :

$$\tau_c^W := \inf \{t > 0 \mid W_t = c\} \quad \text{avec convention : } \inf \emptyset = \infty \quad (1)$$

$$\sigma_c^W := \sup \{t > 0 \mid W_t = c\} \quad \text{avec convention : } \sup \emptyset = 0 \quad (2)$$

• La position de départ pour un processus sera noté en exposant. Par exemple pour un mouvement brownien conditionné à commencer en $B_0 = c$ on notera MB^c pour un tel processus. On rappelle la définition d'un processus de Bessel (en dimension 3) ci-dessous.

Définition 1. Un processus de Bessel (en dimension 3) est un processus Y qui peut s'écrire comme : $Y_t = \|B_t^{(3)}\|$ où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne de \mathbb{R}^3 et $B_t^{(3)}$ un mouvement brownien en dimension 3 i.e. $B_t^{(3)} := (B_t^1, B_t^2, B_t^3)$ avec B^i des mouvements browniens en dimension 1 indépendants.

On notera $Bes(3)$ un processus de Bessel (en dimension 3).

• On présente les deux résultats suivants que l'on doit à Williams prouvés dans [3], qui établissent une première dualité entre le mouvement brownien et le processus de Bessel en dimension 3 dans le sens où : $Bes(3)$ est un "upward conditioned MB" et MB est un "downward conditioned Bes(3)".

Proposition 1 (Williams). Soit $0 < b, c < +\infty$ et on suppose que $X := MB^b$ et $Y := Bes(3)^b$. Alors on a les deux conséquences :

$$(i) \text{ Pour } b < c : \mathcal{L} \left((X_t)_{0 \leq t \leq \tau_c^X} \mid \tau_c^X < \tau_0^X \right) = \mathcal{L} \left((Y_t)_{0 \leq t \leq \tau_c^Y} \right)$$

$$(ii) \text{ Pour } c < b : \mathcal{L} \left((Y_t)_{0 \leq t \leq \tau_c^Y} \mid \tau_c^Y < +\infty \right) = \mathcal{L} \left((X_t)_{0 \leq t \leq \tau_c^X} \right)$$

Proposition 2 (Williams). Soit $X := MB^0$ et $Y := Bes(3)^0$, on se donne $0 < c < +\infty$. Alors, on a l'égalité en loi :

$$\left(c - X_{\tau_c^X - t} \right)_{0 \leq t \leq \tau_c^X} \stackrel{\text{Loi}}{=} (Y_t)_{0 \leq t \leq \sigma_c^Y}$$

• Pour un processus $W := (W_t)_{t \geq 0}$ à valeurs réelles, on définit M^W le processus donnant la borne supérieure (passée) du processus W par :

$$M_t^W := \sup_{0 \leq s \leq t} W_s$$

• On définit F^W le processus donnant la borne inférieure (future) du processus W par :

$$F_t^W := \inf_{s \geq t} W_s$$

On s'attachera donc dans cette section 2 à démontrer la version (plus complète) du théorème de Pitman suivante :

Théorème 1 (Pitman). Soit $X := MB^0$ et $Y := Bes(3)^0$. Alors, on a les trois conséquences :

(i) $2M^X - X$ est un processus de Bessel (en dimension 3) $Bes(3)^0$.

(ii) $2F^Y - Y$ est un mouvement brownien MB^0 .

(iii) On a l'égalité en loi des processus suivante :

$$M^X \stackrel{\text{Loi}}{=} F^Y$$

Géométriquement, les trajectoires du processus $2M^X - X$ sont donc obtenues par les trajectoires de X par réflexion de ces dernières en chaque point du niveau de son précédent maximum.

On démontre ci-dessous le point (iii) et que si l'on admet le point (i), on peut démontrer le point (ii) du théorème de Pitman :

Démonstration de (iii) et du fait que (i) \implies (ii) :

Montrons tout d'abord que si l'on pose $Y := 2M^X - X$, alors on a $M^X = F^Y$ p.s. Soit $t \geq 0$ fixé, on a par définition de M^X pour tout $s \geq t$:

$$Y_s = 2M_s^X - X_s \geq M_s^X$$

Puis comme $M_s^X = \sup_{r \leq s} X_r$ et que $s \geq t$:

$$M_s^X \geq M_t^X$$

D'où l'on obtient :

$$\forall s \geq t : Y_s \geq M_t^X$$

Donc en passant à la borne inférieure dans l'inégalité, on a :

$$F_t^Y := \inf_{s \geq t} Y_s \geq M_t^X \tag{3}$$

Notons que par la loi du 0 – 1 de Blumenthal pour le mouvement brownien :

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} X_t = +\infty \text{ p.s.}$$

Et donc par définition de M^X :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} M_t^X = +\infty \text{ p.s.}$$

On en déduit qu'il existe $s_0 \geq t$ tel que $M_{s_0}^X > M_t^X$. Comme M^X est continu et croissant, on peut définir s_1 qui existe bien par :

$$s_1 := \inf \{s \geq 0 \mid M_s^X > M_t^X\}$$

On a donc $M_{s_1}^X = M_t^X$ et par définition de s_1 : $X_{s_1} = M_t^X$. Et ainsi :

$$Y_{s_1} := 2M_{s_1}^X - X_{s_1} = M_t^X$$

Par l'égalité précédente, on en déduit que :

$$F_t^Y := \inf_{s \geq t} Y_s = \inf_{s_1 \geq t} Y_{s_1} \leq M_t^X \text{ p.s.}$$

Puis en combinant cette inégalité avec (3), on obtient :

$$F^Y = M^X \text{ p.s.}$$

Ainsi on a montré (iii), puis en combinant (i) et (iii), on a donc $F^Y = M^X$ p.s. et $Y := 2M^X - X$ qui est un processus de Bessel $\text{Bes}(3)^0$, d'où :

$$Y := 2M^X - X = 2F^Y - X \text{ p.s.}$$

Ainsi : $X = 2F^Y - Y$ est un mouvement brownien MB^0 . Ce qui prouve le point (ii). \square
Il suffit donc pour achever la preuve du théorème de Pitman de démontrer le point (i).

2.2 Marches aléatoires approchées

• Soit $C := \mathcal{C}([0, +\infty[, \mathbb{R})$ l'espace de Wiener i.e. l'espace des fonctions continues de $[0, +\infty[$ à valeurs dans \mathbb{R} . Soit $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ la tribu borélienne de \mathbb{R} et \mathcal{C} la plus petite tribu sur C rendant les applications coordonnées mesurables sur \mathbb{R} . On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et un mouvement brownien $B := (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, (B_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$.

Définition 2 (Mesure de Wiener). On considère l'application :

$$\begin{aligned} \Phi : (\Omega, \mathcal{F}) &\longrightarrow (C, \mathcal{C}) \\ \omega &\longmapsto \{t \mapsto B_t(\omega)\} \end{aligned}$$

La mesure de Wiener sur (C, \mathcal{C}) notée \mathbb{W} est la mesure image de \mathbb{P} par Φ i.e. :

$$\forall f \in C : \mathbb{W}(f) := \mathbb{P}(\Phi^{-1}(f))$$

On peut montrer qu'elle est unique et ne dépend pas du brownien qui a servi à la construire.

Définition 3 (Probabilités P^x et Q^x).

- Pour $x \in \mathbb{R}$, on définit une probabilité P^x sur (C, \mathcal{C}) comme la distribution d'un MB^x : autrement dit, P^x est la mesure de Wiener sur (C, \mathcal{C}) correspondante à un mouvement brownien commençant en $x \in \mathbb{R}$.
- Pour $x \geq 0$, de même on définit une probabilité Q^x sur (C, \mathcal{C}) comme la distribution d'un Bes(3)^x : autrement dit on remplace le mouvement brownien dans Φ de la définition précédente par un processus de Bessel commençant en $x \geq 0$.

Remarque 1. Sous P^x , la trajectoire de $f \in C$ suit à chaque instant une distribution gaussienne car P^x est la mesure image par la trajectoire d'un mouvement brownien.

• Soit C^* l'espace des fonctions $f \in C$ telles que $\limsup_{t \rightarrow +\infty} f(t) = +\infty$. On a clairement $C^* \subset C$ et par la loi du 0 – 1 de Blumenthal on a $\limsup_{t \rightarrow +\infty} B_t = +\infty$ p.s. pour un mouvement brownien B et donc on en déduit que pour tout processus de Bessel X on a aussi : $\limsup_{t \rightarrow +\infty} X_t = +\infty$ p.s. On en déduit que :

$$P^x(C^*) = Q^x(C^*) = 1$$

- On définit par Z_δ le réseau des multiples de $\delta > 0$ par :

$$Z_\delta := \{j\delta \mid j \in \mathbb{Z}\}$$

Définition 4. Soit $m \in \mathbb{N}$, on définit une fonction $\rho_\delta^{(m)} : C^* \rightarrow [0, +\infty[$ par :

$$\begin{aligned} \rho_\delta^{(0)}(w) &:= \inf \{t \geq 0 \mid w(t) \in Z_\delta\} \\ \rho_\delta^{(m+1)}(w) &:= \inf \left\{ t \geq \rho_\delta^{(m)}(w) \mid w(t) \in Z_\delta \text{ et } w(t) \neq w(\rho_\delta^{(m)}(w)) \right\} \end{aligned}$$

Donc les temps $0 \leq \rho_\delta^{(0)}(w) < \rho_\delta^{(1)}(w) < \dots$ sont les temps successifs sur lesquels la trajectoire d'une fonction $w \in C^*$ atteint un nouveau point du réseau (grillage) Z_δ comme on peut le voir dans la figure 1 ci-dessous.

Les points $\rho_\delta^{(m)}(w)$ sont des temps et figurent donc sur l'axe des abscisses. Il conviendra donc de garder en mémoire les informations des valeurs prises par w en ces points, c'est à dire la suite des $w(\rho_\delta^{(m)}(w))$ pour $m \in \mathbb{N}$.

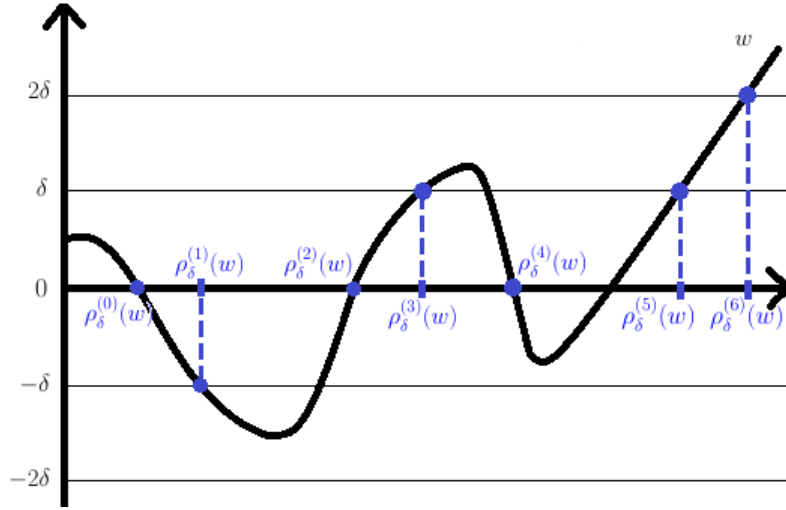


FIGURE 1 – Représentations des points $\rho_\delta^{(m)}(w)$ pour une fonction $w \in C^*$

Exemple 1. Pour la fonction w tracée sur la figure précédente, on a le début de la suite : $w(\rho_\delta^{(0)}(w)) = 0$, $w(\rho_\delta^{(1)}(w)) = -\delta$, $w(\rho_\delta^{(2)}(w)) = 0$, $w(\rho_\delta^{(3)}(w)) = \delta$, $w(\rho_\delta^{(4)}(w)) = 0$, $w(\rho_\delta^{(5)}(w)) = \delta$ et $w(\rho_\delta^{(6)}(w)) = 2\delta \dots$

Au regard de l'importance de cette dernière suite, on pose la définition :

Définition 5. Soit $m \in \mathbb{N}$, on définit une fonction $V_\delta^{(m)} : C^* \rightarrow Z_\delta$ par :

$$V_\delta^{(m)}(w) := w(\rho_\delta^{(m)}(w))$$

Exemple 2. On peut donc reformuler l'exemple 1 avec cette nouvelle notation. On obtient en particulier pour la fonction w tracée : $V_\delta^{(0)}(w) = 0$, $V_\delta^{(1)}(w) = -\delta$, $V_\delta^{(2)}(w) = 0$, $V_\delta^{(3)}(w) = \delta$, $V_\delta^{(4)}(w) = 0$, $V_\delta^{(5)}(w) = \delta$, $V_\delta^{(6)}(w) = 2\delta \dots$

Donc la suite $(V_\delta^{(m)}(w))_{m \in \mathbb{N}}$ est la suite des points du réseau/grille Z_δ visités par la trajectoire de w avec la condition $V_\delta^{(m+1)}(w) \neq V_\delta^{(m)}(w)$.

Remarque 2. Sous P^x ou Q^x , la suite $(V_\delta^{(m)}(w))_{m \in \mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov (à temps discret) avec probabilités de transitions stationnaires par propriété de Markov forte issue de P^x ou Q^x . La propriété Markovienne provient directement des définitions précédentes, nous précisons le reste ci-dessous.

Proposition 3.

Sous P^x : la chaîne de Markov $(V_\delta^{(m)}(w))_{m \in \mathbb{N}}$ est la marche aléatoire symétrique simple sur Z_δ avec probabilités de transitions de $i\delta$ à $j\delta$ données par $p_{i,j}$ où $P := (p_{i,j})_{i,j \in \mathbb{Z}}$ est la matrice sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ définie par :

$$p_{i,j} := \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } j = i + 1 \text{ ou } j = i - 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

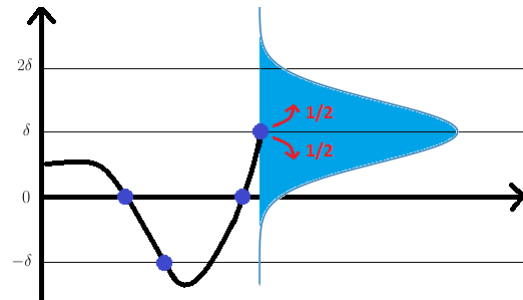


FIGURE 2 – Intuition de la proposition 3 grâce à la remarque 1

Proposition 4. Sous Q^x : la chaîne de Markov $(V_\delta^{(m)}(w))_{m \in \mathbb{N}}$ est la marche aléatoire sur Z_δ avec probabilités de transitions de $i\delta$ à $j\delta$ données par $q_{i,j}$ où $Q := (q_{i,j})_{i,j \in \mathbb{Z}}$ est la matrice sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ définie par :

$$q_{0,1} = 1, \quad q_{0,j} = 0 \text{ si } j \neq 1 \text{ et } \forall i \geq 1 : \quad q_{i,j} := \begin{cases} \left(\frac{1}{i}\right) \left(\frac{1}{2}\right) j & \text{si } j = i + 1 \text{ ou } j = i - 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

• Pour démontrer ces deux dernières propositions, on doit introduire la notion de **fonction d'échelle** pour une diffusion¹ $\{\mathbb{P}_x\}$. On note plus simplement τ_x le temps d'atteinte de niveau x d'un processus X lorsque celui-ci est clair :

$$\tau_x := \inf \{t \geq 0 \mid X_t = x\}$$

• Soit $x \in [a, b]$ (avec $a < b$), on définit la **probabilité d'échelle** par :

$$s_{ab}(x) := \mathbb{P}_x(\tau_b < \tau_a)$$

Grâce à la propriété de Markov (pour un Brownien ou un Bessel par exemple), on peut démontrer que s_{ab} est toujours strictement croissante et continue.

Par le théorème 4 page 9 de [4], on a la définition et l'existence de la fonction d'échelle :

Lemme 1. *Il existe une fonction continue strictement croissante S appelée **fonction d'échelle** de la diffusion $\{\mathbb{P}_x\}$ telle que :*

$$\forall x \in [a, b], \quad s_{ab}(x) := \mathbb{P}_x(\tau_b < \tau_a) = \frac{S(x) - S(a)}{S(b) - S(a)}$$

Nous calculons ci-dessous la fonction d'échelle associée à un mouvement brownien ou à un processus de Bessel.

Calcul de la fonction d'échelle pour une diffusion brownienne :

Soit $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien réel et soit $a < b$ avec $x \in [a, b]$. On note :

$$\tau := \inf \{t \geq 0 \mid B_t = a \text{ ou } B_t = b\}$$

On peut vérifier aisément que τ est un temps d'arrêt pour la filtration canonique du mouvement brownien B considéré. Comme le mouvement brownien est une martingale, on a par le théorème d'arrêt :

$$\mathbb{E}_x[B_\tau] = \mathbb{E}_x[B_0] = x$$

Par ailleurs, on a le calcul suivant :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x[B_\tau] &= \mathbb{E}_x[B_\tau \mathbf{1}_{\tau_b < \tau_a}] + \mathbb{E}_x[B_\tau \mathbf{1}_{\tau_b \geq \tau_a}] \\ &= b\mathbb{E}_x[\mathbf{1}_{\tau_b < \tau_a}] + a\mathbb{E}_x[\mathbf{1}_{\tau_b \geq \tau_a}] \\ &= b\mathbb{P}_x(\tau_b < \tau_a) + a(1 - \mathbb{P}_x(\tau_b < \tau_a)) \\ &= (b - a)\mathbb{P}_x(\tau_b < \tau_a) + a \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient :

$$s_{ab}(x) := \mathbb{P}_x(\tau_b < \tau_a) = \frac{x - a}{b - a} \tag{4}$$

On en déduit en particulier que la fonction d'échelle pour un mouvement brownien est donnée par $S(x) = x$ et on dit alors que le mouvement brownien est à *échelle naturelle*.

1. On rappelle qu'une probabilité \mathbb{P}_x sur Ω définit une diffusion sur \mathbb{R} si pour tout $x \in \mathbb{R} : \mathbb{P}_x(X_0 = x) = 1$ et X vérifie la propriété de Markov forte.

Pour le calcul de la fonction d'échelle pour une diffusion de Bessel, on aura besoin de résoudre un problème de Dirichlet, cela nous sera aussi utile ultérieurement. Nous rappelons donc ci-dessous la formulation générale d'un problème de Dirichlet ainsi que sa résolution.

Problème de Dirichlet :

Soit D un ouvert borné de \mathbb{R}^d et soit A un opérateur elliptique (par exemple le laplacien). Le problème de Dirichlet consiste à trouver une fonction u de classe \mathcal{C}^2 sur D telle que :

$$\begin{cases} Au - ku = -g \text{ sur } D \\ u = f \text{ sur } \partial D \end{cases}$$

où $k \in \mathcal{C}(\overline{D}, \mathbb{R}_+)$ et $g \in \mathcal{C}(\overline{D}, \mathbb{R})$ et $f \in \mathcal{C}(\partial D, \mathbb{R})$.

En particulier, on pourra consulter la proposition 7.2 page 364 de [6] pour une démonstration de la résolution du problème de Dirichlet :

Résolution du problème de Dirichlet :

Si X est solution d'une équation différentielle stochastique de la forme :

$$X_s = x + \int_t^s b(u, X_u) du + \int_t^s \sigma(u, X_u) dB_u \quad (5)$$

avec $0 \leq t \leq s < +\infty$ et $X_t = x$ et des hypothèses de continuité et de croissance au plus linéaires pour b ou σ (voir [6], proposition 7.2 page 364). Si l'on pose : $T_D := \inf \{t \geq 0 \mid X_t \notin D\}$ le temps de sortie de D et que l'on suppose que : $\forall x \in D : \mathbb{E}_x[T_D] < +\infty$, alors l'unique solution au problème de Dirichlet est donnée par :

$$\forall x \in \overline{D} : u(x) = \mathbb{E}_x \left[f(X_{T_D}) \exp \left(- \int_0^{T_D} k(X_s) ds \right) + \int_0^{T_D} g(X_t) \exp \left(- \int_0^t k(X_s) ds \right) dt \right]$$

Nous pouvons donc maintenant effectuer le calcul de la fonction d'échelle pour une diffusion de Bessel :

Calcul de la fonction d'échelle pour une diffusion de Bessel :

Soit $Y_t = \|B_t^{(3)}\|$ où $B_t^{(3)}$ un mouvement brownien en dimension 3. Soit $a < b$ et $x \in [a, b]$. On note D le domaine de \mathbb{R}^3 compris strictement entre les boules $\overline{B}(0, a)$ et $\overline{B}(0, b)$ (c'est à dire la couronne centrée en 0 de rayons a et b). Le mouvement brownien $B_t^{(3)}$ satisfait évidemment une équation différentielle stochastique de la forme (5). En prenant donc le problème de Dirichlet avec $A = \Delta$ (laplacien), $k = 0$ et f définie sur ∂D par :

$$\begin{cases} f(x) = 1 \text{ si } \|x\| = b \\ f(x) = 0 \text{ si } \|x\| = a \end{cases}$$

L'unique solution au problème de Dirichlet s'écrit pour tout $x \in \overline{D}$:

$$\begin{aligned} u(x) &= \mathbb{E}_x \left[f \left(B_{T_D}^{(3)} \right) \right] \\ &= \mathbb{E}_x \left[f \left(B_{\inf(\tau_a, \tau_b)}^{(3)} \right) \right] \\ &= \mathbb{E}_x \left[f \left(B_{\tau_a}^{(3)} \right) \mathbf{1}_{\tau_a < \tau_b} \right] + \mathbb{E}_x \left[f \left(B_{\tau_b}^{(3)} \right) \mathbf{1}_{\tau_b < \tau_a} \right] \\ &= \mathbb{E}_x \left[f \left(B_{\tau_b}^{(3)} \right) \mathbf{1}_{\tau_b < \tau_a} \right] \quad (\text{car } f \text{ est nulle sur le cercle de rayon } a) \\ &= \mathbb{P}_x (\tau_b < \tau_a) \quad (\text{car } f \text{ vaut 1 sur le cercle de rayon } b) \end{aligned}$$

Par ailleurs on peut vérifier que la fonction $\tilde{u}(x) := \frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{\|x\|}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}$ vérifie le même problème de Dirichlet, il s'en suit par unicité de la solution que :

$$\forall x \in \overline{D} : u(x) = \tilde{u}(x)$$

D'où finalement :

$$s_{ab}(x) := \mathbb{P}_x(\tau_b < \tau_a) = \frac{-\frac{1}{x} + \frac{1}{a}}{-\frac{1}{b} + \frac{1}{a}} \quad (6)$$

On en déduit en particulier que la fonction d'échelle pour une diffusion de Bessel est donnée par $S(x) = -\frac{1}{x}$.

On peut donc maintenant conclure les preuves des propositions 3 et 4 :

Démonstration de la proposition 3 :

On peut donc maintenant calculer les probabilités de transitions de $(V_\delta^{(m)}(w))_{m \in \mathbb{N}}$ sous P^x , grâce à (4) on a :

$$P^{i\delta}(\tau_{(i+1)\delta} < \tau_{(i-1)\delta}) = \frac{i\delta - (i-1)\delta}{(i+1)\delta - (i-1)\delta} = \frac{1}{2}$$

Puis également :

$$P^{i\delta}(\tau_{(i-1)\delta} < \tau_{(i+1)\delta}) = \frac{i\delta - (i+1)\delta}{(i-1)\delta - (i+1)\delta} = \frac{1}{2}$$

On obtient donc :

$$p_{i,j} := P^x \left(V_\delta^{(m+1)}(w) = j\delta \mid V_\delta^{(m)}(w) = i\delta \right) = \begin{cases} P^{i\delta}(\tau_{(i+1)\delta} < \tau_{(i-1)\delta}) & \text{si } j = i + 1 \\ P^{i\delta}(\tau_{(i-1)\delta} < \tau_{(i+1)\delta}) & \text{si } j = i - 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

D'où la conclusion de la proposition 3 :

$$p_{i,j} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } j = i + 1 \text{ ou } j = i - 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

□

Démonstration de la proposition 4 :

On peut donc maintenant calculer les probabilités de transitions de $(V_\delta^{(m)}(w))_{m \in \mathbb{N}}$ sous Q^x , grâce à (6) on a pour $i \geq 1$:

$$Q^{i\delta}(\tau_{(i+1)\delta} < \tau_{(i-1)\delta}) = \frac{-\frac{1}{i\delta} + \frac{1}{(i-1)\delta}}{-\frac{1}{(i+1)\delta} + \frac{1}{(i-1)\delta}} = \frac{i+1}{2i}$$

Puis également :

$$Q^{i\delta}(\tau_{(i-1)\delta} < \tau_{(i+1)\delta}) = \frac{-\frac{1}{i\delta} + \frac{1}{(i+1)\delta}}{-\frac{1}{(i-1)\delta} + \frac{1}{(i+1)\delta}} = \frac{i-1}{2i}$$

On obtient donc :

$$q_{i,j} := Q^x \left(V_\delta^{(m+1)}(w) = j\delta \mid V_\delta^{(m)}(w) = i\delta \right) = \begin{cases} Q^{i\delta}(\tau_{(i+1)\delta} < \tau_{(i-1)\delta}) & \text{si } j = i + 1 \\ Q^{i\delta}(\tau_{(i-1)\delta} < \tau_{(i+1)\delta}) & \text{si } j = i - 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

D'où la conclusion de la proposition 4 :

$$q_{0,1} = 1, \quad q_{0,j} = 0 \text{ si } j \neq 1 \text{ et } \forall i \geq 1 : q_{i,j} := \begin{cases} \left(\frac{1}{i}\right) \left(\frac{1}{2}\right) j & \text{si } j = i + 1 \text{ ou } j = i - 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

□

Remarque 3. Les marches aléatoires $(V_\delta^{(m)}(w))_{m \in \mathbb{N}}$ héritent des propriétés des processus à temps continu qui ont servi à les définir. Par exemple, le mouvement brownien et la P^x -marche correspondante $(V_\delta^{(m)}(w))_{m \in \mathbb{N}}$ admettent tous deux 0 comme point récurrent alors que le processus de Bessel et la Q^x -marche correspondante $(V_\delta^{(m)}(w))_{m \in \mathbb{N}}$ sont transitoires.

- On va maintenant regarder ce qu'il se passe lorsqu'on fait tendre $\delta \rightarrow 0$:

On s'attend intuitivement à ce que les marches aléatoires "convergent" vers le processus à temps continu dont elles sont issues. Cependant, pour étudier le passage à la limite, il faut que les processus soient définis sur le même espace : injectons donc les marches aléatoires dans C . On a déjà construit l'application $w \rightarrow (V_\delta^{(m)}(w))_{m \in \mathbb{N}}$ qui envoie une fonction de C^* dans l'espace des chaînes de Markov. Il faut maintenant renvoyer la chaîne de Markov dans l'espace des fonctions continues : **il suffit de prendre la fonction affine par morceaux obtenue en reliant les points de la chaîne de Markov mais il faut encore choisir le pas de temps.**

Le pas de temps le plus naturel pour les convergences qui apparaîtra ultérieurement est donné par :

$$\mathbb{E}_{P^x} \left[\rho_\delta^{(m+1)} - \rho_\delta^{(m)} \right] = \delta^2$$

Explicitons donc formellement comment on relie les points, on définit l'application V_δ par :

$$\begin{aligned} V_\delta : C^* &\longrightarrow C \\ w &\longmapsto V_\delta(w) \end{aligned}$$

Avec :

$$\begin{cases} V_\delta(w)(m\delta^2) := V_\delta^{(m)}(w) \quad \forall m \in \mathbb{N} \\ V_\delta(w) \text{ affine par morceaux sinon de façon à relier les points.} \end{cases}$$

En particulier, grâce à l'exemple 2, on peut tracer la fonction $V_\delta(w)$ correspondante :

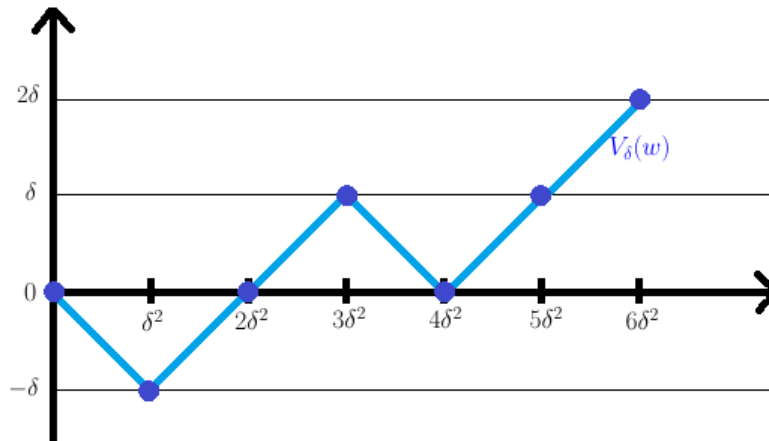


FIGURE 3 – Fonction $V_\delta(w)$ correspondante à la fonction w de la figure 1

Remarque 4. L'importance de la construction précédente réside dans le fait que $V_\delta(w)$ est une fonction affine par morceaux qui suit la même séquence des points de Z_δ atteints par w mais en des temps $(m\delta^2)_{m \in \mathbb{N}}$ déterministes et non des temps aléatoires comme c'était le cas avec les $(\rho_\delta^{(m)}(w))_{m \in \mathbb{N}}$.

- On définit maintenant les mesures sur C^* qui ne chargent que les chemins obtenus par ce procédé relativement au mouvement brownien et au processus de Bessel :

$$P_\delta^x := P^x V_\delta \quad \text{et} \quad Q_\delta^x := Q^x V_\delta \tag{7}$$

- On munit C de la topologie de convergence uniforme sur tout compact qui en fait un espace polonais.
- On munit l'espace $Prob(C)$ des probabilités sur C de la topologie faible-* associée : i.e. une suite de mesure $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge faiblement vers $\mu \Leftrightarrow \forall f : C \rightarrow \mathbb{R}$ continue et bornée $\int f d\mu_n \rightarrow \int f d\mu$.

On peut alors décrire précisément la convergence des marches aléatoires par le théorème :

Théorème 2. Soit $x \geq 0$ fixé.

(i) La mesure $P_{1/\sqrt{n}}^x$ converge faiblement vers la mesure de Wiener P^x .

(ii) La mesure $Q_{1/\sqrt{n}}^x$ converge faiblement vers la mesure de Bessel Q^x .

Démonstration. (i) C'est un cas particulier du théorème de Donsker, on pourra consulter [7] et [8], pour une démonstration.

(ii) Ce point est assez long et difficile à démontrer, cela découle de l'article de Lamperti [9] sur la convergence de chaînes de Markov dont la matrice de transition est asymptotiquement d'une certaine forme. \square

Remarque 5. On peut aussi donner des arguments heuristiques pour cette démonstration par des considérations sur les générateurs infinitésimaux. Cela est traité dans l'article [4] de Bertin et Hoscheit.

En conséquence immédiate du théorème 2, on peut énoncer la version suivante qui sera utilisée pour achever la preuve du théorème de Pitman :

Théorème 3. Si δ converge vers 0 en suivant $\frac{1}{\sqrt{n}}$, alors :

(i) La mesure P_δ^δ converge faiblement vers la mesure de Wiener P^0 .

(ii) La mesure Q_δ^δ converge faiblement vers la mesure de Bessel Q^0 .

Enfin, on aura aussi besoin pour conclure la preuve du théorème de Pitman, du lemme technique suivant qui est un lemme classique de théorie de la mesure :

Lemme 2. Soit $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de mesure sur C convergente vers une mesure μ et soit $\Phi : C \rightarrow C$ une transformation mesurable et continue μ -p.p. Alors, $\mu_n \Phi$ converge faiblement vers $\mu \Phi$.

2.3 Théorème de Pitman en temps discret

- On note $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la marche aléatoire simple sur \mathbb{Z} , c'est à dire la chaîne de Markov ayant pour matrice de transition la matrice P de la proposition 3.

- On note $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la chaîne de Markov ayant pour matrice de transition la matrice Q de la proposition 4.

Dans cette section 2.3, nous démontrons une version discrète du théorème de Pitman :

Théorème 4 (Pitman discret). Soient $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les marches aléatoires précédentes issues de 1. Alors :

$$(2M_n^X - X_n)_{n \in \mathbb{N}} := \left(2 \sup_{0 \leq k \leq n} X_k - X_n \right)_{n \in \mathbb{N}} \stackrel{Loi}{=} (Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

On va tout d'abord vérifier les propositions 1 et 2 en temps discret, pour cela on démontre les deux lemmes suivants :

Lemme 3. Si $0 \leq b \leq c$ sont entiers et que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est issue de b alors :

$$\mathbb{P}_b(\tau_c^X < \tau_0^X) = \frac{b}{c}$$

Démonstration. Pour démontrer ce lemme, on résout un problème de Dirichlet (concept rappelé en section 2.2). On prend ici l'ouvert $D :=]0, c[$ et donc $\partial D = \{0, c\}$. On prend f définie sur ∂D par $f(0) = 0$ et $f(c) = 1$. On prend par ailleurs $g = 0$ avec l'opérateur $A = \Delta$ et $k = 0$. L'unique solution u au problème de Dirichlet ainsi considéré s'écrit pour tout $x \in \bar{D}$:

$$\begin{aligned} u(x) &= \mathbb{E}_x [f(X_{T_D})] \\ &= \mathbb{E}_x \left[f \left(X_{\inf(\tau_0^X, \tau_c^X)} \right) \right] \\ &= \mathbb{E}_x \left[\mathbb{1}_{\tau_c^X < \tau_0^X} \right] \quad (\text{par définition de } f) \\ &= \mathbb{P}_x(\tau_c^X < \tau_0^X) \end{aligned}$$

Le problème de Dirichlet s'écrivant ici :

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ sur } D \\ u = f \text{ sur } \partial D \end{cases}$$

On vérifie sans mal que $u'(x) = \alpha \in \mathbb{R}$ (constante) et donc que $u(x) = \alpha x + \beta$. Avec les conditions aux bords, on déduit que :

$$u(x) = \frac{x}{c}$$

Par unicité de la solution du problème de Dirichlet, on a donc :

$$\mathbb{P}_x (\tau_c^X < \tau_0^X) = \frac{x}{c}$$

D'où la conclusion du lemme 3 car X est issue de b : $\mathbb{P}_b (\tau_c^X < \tau_0^X) = \frac{b}{c}$. □

Lemme 4. Si $0 \leq b \leq c$ sont entiers et que $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est issue de b alors :

$$\mathbb{P}_b (\tau_c^Y < +\infty) = \frac{b}{c}$$

Démonstration. La démonstration est moins directe que la précédente car l'ouvert D pourrait être considéré n'est pas borné. Cependant on peut appliquer la même méthode que précédemment avec l'ouvert $D :=]d, c[$ pour $d < c$. En résolvant le problème de Dirichlet avec f telle que $f(c) = 1$ et $f(d) = 0$ de manière identique à la démonstration précédente, on obtient :

$$\mathbb{P}_b (\tau_c^Y < \tau_d^Y) = \frac{b}{c}$$

Puis, par théorème de convergence dominée, on obtient bien la conclusion du lemme 4 :

$$\mathbb{P}_b (\tau_c^Y < +\infty) = \lim_{d \rightarrow -\infty} \mathbb{P}_b (\tau_c^Y < \tau_d^Y) = \frac{b}{c}$$

□

Démonstration de la proposition 1 en temps discret :

(i) Soit $b < c$ démontrons donc la première égalité en loi :

Soit (b, j_1, \dots, j_n) une trajectoire s'arrêtant en c . Cela signifie que l'on fait des sauts de 1 vers le haut ou vers le bas et que $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket : 0 < j_k < c$ avec $j_n = c$.

La probabilité sachant que $\tau_c^X < \tau_0^X$ pour que (X_n) parcourt cette trajectoire est donc donnée par :

$$\mathbb{P}_b (X_0 = b, X_1 = j_1, \dots, X_n = j_n \mid \tau_c^X < \tau_0^X) = \frac{p_{b,j_1} p_{j_1,j_2} \cdots p_{j_{n-1},j_n}}{\mathbb{P}_b (\tau_c^X < \tau_0^X)} = \frac{1}{2^n} \times \frac{c}{b}$$

Où l'on a remplacé le dénominateur par sa valeur grâce au lemme 3.

Pour (Y_n) la probabilité de suivre cette trajectoire est :

$$\mathbb{P}_b (Y_0 = b, Y_1 = j_1, \dots, Y_n = j_n) = q_{b,j_1} q_{j_1,j_2} \cdots q_{j_{n-1},j_n} = \left(\frac{1}{2} \frac{j_1}{b}\right) \left(\frac{1}{2} \frac{j_2}{j_1}\right) \cdots \left(\frac{1}{2} \frac{c}{j_{n-1}}\right) = \frac{1}{2^n} \times \frac{c}{b}$$

Les deux probabilités respectives sont donc identiques, le point (i) de la proposition 1 version discrète est donc prouvé.

(ii) Soit $c < b$ démontrons donc la deuxième égalité en loi :

On reprend la trajectoire (b, j_1, \dots, j_n) décrite au premier point. La probabilité pour que (X_n) parcourt cette trajectoire est :

$$\mathbb{P}_b (X_0 = b, X_1 = j_1, \dots, X_n = j_n) = p_{b,j_1} p_{j_1,j_2} \cdots p_{j_{n-1},j_n} = \frac{1}{2^n}$$

La probabilité sachant $\tau_c^Y < +\infty$ pour que (Y_n) parcourt la trajectoire est :

$$\mathbb{P}_b(Y_0 = b, Y_1 = j_1, \dots, Y_n = j_n \mid \tau_c^Y < +\infty) = \frac{q_{b,j_1} q_{j_1,j_2} \cdots q_{j_{n-1},j_n}}{\mathbb{P}_b(\tau_c^Y < +\infty)} = \frac{1}{2^n}$$

Où l'on a remplacé le dénominateur par sa valeur grâce au lemme 4. Les deux probabilités respectives sont donc identiques, le point (ii) de la proposition 1 version discrète est donc prouvé. \square

Démonstration de la proposition 2 en temps discret :

Soit $0 < c$ avec (X_n) et (Y_n) issues de 0, montrons que :

$$\left\{ \left(c - X_{\tau_c^X - n} \right) : 0 \leq n \leq \tau_c^X \right\} \stackrel{Loi}{=} \left\{ (Y_n) : 0 \leq n \leq \sigma_c^Y \right\}$$

On procède de la même manière que la précédente démonstration : on se donne $(0, j_1, \dots, j_n)$ une trajectoire possible sur \mathbb{Z} pour les deux chaînes ; c'est à dire que l'on fait des sauts de 1 vers le haut ou vers le bas et que $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket : 0 < j_k < c$ avec $j_n = c$.

On a donc d'une part : $\mathbb{P}_0 \left(c - X_{\tau_c^X - 0} = 0, c - X_{\tau_c^X - 1} = j_1, \dots, c - X_{\tau_c^X - \tau_c^X} = c \right) =$

$$\mathbb{P}_0(X_0 = 0, X_1 = c - j_{n-1}, \dots, X_{n-1} = c - j_1, X_n = c) = \frac{1}{2^n}. \quad (\#)$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_0(Y_0 = 0, Y_1 = j_1, \dots, Y_{n-1} = j_{n-1}, Y_n = c, n = \sigma_c^Y) \\ &= \mathbb{P}_0(Y_0 = 0, Y_1 = j_1, \dots, Y_{n-1} = j_{n-1}, Y_n = c) \mathbb{P}_0(n = \sigma_c^Y \mid Y_0 = 0, Y_1 = j_1, \dots, Y_{n-1} = j_{n-1}, Y_n = c) \\ &= 1 \left(\frac{1}{2} \frac{j_2}{j_1} \right) \cdots \left(\frac{1}{2} \frac{j_{n-1}}{j_{n-2}} \right) \left(\frac{1}{2} \frac{c}{j_{n-1}} \right) \mathbb{P}_0(n = \sigma_c^Y \mid Y_0 = 0, Y_1 = j_1, \dots, Y_{n-1} = j_{n-1}, Y_n = c) \\ &= \frac{c}{2^{n-1}} \mathbb{P}_0(n = \sigma_c^Y \mid Y_0 = 0, Y_1 = j_1, \dots, Y_{n-1} = j_{n-1}, Y_n = c) \end{aligned}$$

Par ailleurs, on a :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_0(n = \sigma_c^Y \mid Y_0 = 0, Y_1 = j_1, \dots, Y_{n-1} = j_{n-1}, Y_n = c) \\ &= \mathbb{P}_0(\forall k > n, Y_k \neq c \mid Y_0 = 0, Y_1 = j_1, \dots, Y_{n-1} = j_{n-1}, Y_n = c) \\ &= \mathbb{P}_0(\forall k > n, Y_k \neq c \mid Y_n = c) \quad (\text{par propriété de Markov}) \\ &= \mathbb{P}_0(\forall k > n, Y_k \neq c \mid Y_{n+1} = c + 1) \mathbb{P}_0(Y_{n+1} = c + 1 \mid Y_n = c) \\ &= \left(1 - \frac{c}{c+1} \right) \times \left(\frac{1}{2} \frac{c+1}{c} \right) = \frac{1}{2c} \end{aligned}$$

Donc finalement :

$$\mathbb{P}_0(Y_0 = 0, Y_1 = j_1, \dots, Y_{n-1} = j_{n-1}, Y_n = c, n = \sigma_c^Y) = \frac{1}{2^n} \quad (\#\#)$$

Comme les deux probabilités $(\#)$ et $(\#\#)$ sont égales, on a donc démontré la version discrète de la proposition 2. \square

• On termine cette section avec la preuve du théorème de Pitman en temps discret (théorème 4).

Démonstration du théorème de Pitman en temps discret :

On pose $Z_n := 2M_n^X - X_n$ et on veut montrer que (Z_n) est une chaîne de Markov issue de 1 avec matrice de transition Q (matrice de la proposition 4).

On procède de la même manière que la précédente démonstration : on se donne $(1, j_1, \dots, j_n)$ une trajectoire possible sur \mathbb{Z} pour Z ; c'est à dire que $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket : 0 < j_k$ avec $j_n = i$.

Comme $Z_n = i$ sur cette trajectoire, on en déduit que $M_n^X \in \llbracket 1, i \rrbracket$. Puis, par la démonstration du point (iii) du théorème de Pitman explicitée en section 2.1 (où l'on établit une égalité presque sûre) on a²

$$\forall 0 \leq k \leq n : M_k^X = F_k^Z \quad (8)$$

2. Notons que la même démonstration s'applique ici pour la chaîne de Markov (X_n) à la place du mouvement brownien car on sait que pour la marche aléatoire simple sur \mathbb{Z} : $\limsup_{n \rightarrow +\infty} X_n = +\infty$.

Que l'on peut réécrire :

$$\forall 0 \leq k \leq n : M_k^X = \inf_{k \geq n} Z_k = \min \{Z_k, \dots, Z_{n-1}, F_n^Z\}$$

Puis à nouveau par (8), on peut encore réécrire :

$$\forall 0 \leq k \leq n : M_k^X = \min \{Z_k, \dots, Z_{n-1}, M_n^X\}$$

Cette dernière expression permet de calculer M_k^X pour tout $0 \leq k \leq n$ à la seule condition de connaître M_n^X . De plus, $X_k = 2M_k^X - Z_k$ et comme on a vu que $M_n^X \in \llbracket 1, i \rrbracket$, il y a donc i chemins décrits par X (chaque chemin étant associée à une valeur de M_n^X) tels que Z suive la trajectoire considérée. Comme X est la marche aléatoire simple, les chemins décrits par X sont équiprobables.

- Si $M_n^X \neq X_n$ (i.e. $M_n^X \neq i$) alors Z_{n+1} est augmenté ou diminué de 1 par rapport à Z_n avec probabilité $1/2$.
 - Si $M_n^X = X_n$ (i.e. $M_n^X = i$) alors Z_{n+1} est nécessairement augmenté de 1 par rapport à Z_n .
- Ces deux points se visualisent très bien si l'on regarde Z_n comme réflexion de X_n autour de son maximum, comme on peut le voir sur la figure suivante.

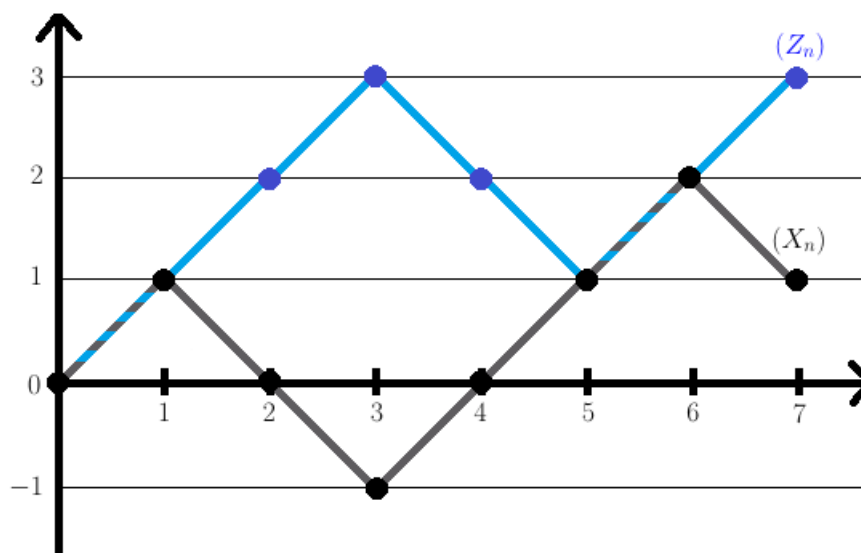


FIGURE 4 – Représentation (en gris) d'une chaîne de Markov (X_n) et de sa transformation de Pitman (Z_n) correspondante (en bleu)

Exemple 3. Sur la figure précédente, on considère une trajectoire possible pour (X_n) sur ses 8 premières valeurs :

$$X_0 = 0; X_1 = 1; X_2 = 0; X_3 = -1; X_4 = 0; X_5 = 1; X_6 = 2; X_7 = 1$$

Les points de (Z_n) et (X_n) se confondent pour $n = 0, 1, 5, 6$ car en ces points $M_n^X = X_n$. Puis les points $Z_2 = 2; Z_3 = 3; Z_4 = 2$ sont obtenus par réflexion/symétrie d'axe horizontal $y = 1$ par rapports aux points de (X_n) car les valeurs de (X_n) en ces points sont inférieures à son maximum. Enfin, de même pour $Z_7 = 3$, le maximum de $(X_n)_{n \in \llbracket 0, 7 \rrbracket}$ étant 2 et comme $X_7 = 1 < 2$ on prend la réflexion par rapport au maximum qui est 2 (i.e. symétrie par rapport à la droite $y = 2$).

- On obtient donc par résumé des deux derniers points avant la figure et l'exemple :

$$\mathbb{P}(Z_{n+1} = i + 1 \mid Z_0 = 1, \dots, Z_n = i) = \frac{1}{2} \times \mathbb{P}(M_n^X \neq i) + 1 \times \mathbb{P}(M_n^X = i) = \frac{1}{2} \frac{i-1}{i} + \frac{1}{i}$$

Donc :

$$\mathbb{P}(Z_{n+1} = i + 1 \mid Z_0 = 1, \dots, Z_n = i) = \frac{1}{2} \frac{i+1}{i} = q_{i,i+1}$$

Et de même :

$$\mathbb{P}(Z_{n+1} = i - 1 \mid Z_0 = 1, \dots, Z_n = i) = \frac{1}{2} \times \mathbb{P}(M_n^X \neq i) = \frac{1}{2} \frac{i-1}{i}$$

Donc :

$$\mathbb{P}(Z_{n+1} = i - 1 \mid Z_0 = 1, \dots, Z_n = i) = \frac{1}{2} \frac{i-1}{i} = q_{i,i-1}$$

Les deux égalités encadrées démontrent donc que $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov de matrice de transition $Q := (q_{i,j})_{i,j \in \mathbb{Z}}$ donnée à la proposition 4. Cela démontre donc le théorème de Pitman dans le cadre discret. \square

2.4 Démonstration du théorème de Pitman en temps continu

On achève ici la démonstration du théorème de Pitman en temps continu. Pour cela, on réutilise les marches aléatoires considérées en section 2.2 et 2.3, en particulier comme le théorème de Pitman est démontré dans le cas discret, il suffit de faire tendre $\delta \rightarrow 0$ pour obtenir sa version continue grâce au théorème 3. L'idée est d'obtenir une égalité des processus limites pour établir l'égalité en loi des processus stochastiques du mouvement brownien sous transformation de Pitman d'une part et du processus de Bessel d'autre part.

- On pose Φ qui à une fonction $w \in C$ associe sa transformation de Pitman :

$$\begin{aligned} \Phi : C &\longrightarrow C \\ w &\longmapsto (2 \sup_{0 \leq s \leq \cdot} w(s) - w(\cdot)) \end{aligned} \quad (9)$$

Remarquons que si X désigne la fonction identité de C , alors on peut écrire $\Phi = 2M^X - X$. On remarque aussi que Φ est continue. On définit la fonction de "scaling" par :

$$\begin{aligned} S_\delta : C &\longrightarrow C \\ w &\longmapsto S_\delta(w) \end{aligned}$$

où $\forall t \geq 0 : S_\delta(w)(t) := \delta w\left(\frac{t}{\delta^2}\right)$. Montrons, avec la notation de (7), que :

$$\forall \delta > 0 : P_\delta^{x\delta} = P_1^x S_\delta \quad \text{et} \quad Q_\delta^{x\delta} = Q_1^x S_\delta \quad (10)$$

Démonstration. En effet, par définition du "scaling", pour tout $x \geq 0$ et $\delta > 0 : P^x S_\delta = P^{x\delta}$ et $Q^x S_\delta = Q^{x\delta}$ et pour la fonction V_δ de la section 2.2, on peut réécrire avec le "scaling" :

$$V_\delta = S_{1/\delta} V_1 S_\delta$$

Donc par la définition (7) :

$$P_\delta^{x\delta} := P^{x\delta} V_\delta = P^{x\delta} S_{1/\delta} V_1 S_\delta = P^x V_1 S_\delta := P_1^x S_\delta$$

De même avec Q :

$$Q_\delta^{x\delta} := Q^{x\delta} V_\delta = Q^{x\delta} S_{1/\delta} V_1 S_\delta = Q^x V_1 S_\delta := Q_1^x S_\delta$$

Cela démontre donc les égalités dans (10). \square

On peut remarquer que Φ et V_δ ne commutent pas, cependant Φ et S_δ commutent (d'où l'intérêt du scaling pour conclure la preuve) :

$$\Phi S_\delta = S_\delta \Phi \quad (11)$$

Démonstration. On a pour $w \in C$ et $\delta > 0$ et $t \geq 0$:

$$S_\delta \Phi(w)(t) = S_\delta \left(2 \sup_{0 \leq s \leq t} w(s) - w(t) \right) = \delta \left(2 \sup_{0 \leq s \leq t/\delta^2} w(s) - w \left(\frac{t}{\delta^2} \right) \right)$$

$$\Phi S_\delta(w)(t) = \Phi \left(\delta w \left(\frac{t}{\delta^2} \right) \right) = 2 \sup_{0 \leq s \leq t} \delta w \left(\frac{s}{\delta^2} \right) - \delta w \left(\frac{t}{\delta^2} \right) = \delta \left(2 \sup_{0 \leq s \leq t/\delta^2} w(s) - w \left(\frac{t}{\delta^2} \right) \right)$$

Cela prouve donc l'égalité (11). \square

- Montrons enfin l'égalité clef qui permettra de terminer la démonstration :

$$\boxed{\forall \delta > 0 : P_\delta^\delta \Phi = Q_\delta^\delta} \quad (12)$$

Démonstration. On a les égalités suivantes pour $\delta > 0$:

$$\begin{aligned} P_\delta^\delta \Phi &= P_1^1 S_\delta \Phi \quad (\text{par la première équation (10) avec } x = 1) \\ &= P_1^1 \Phi S_\delta \quad (\text{par la relation de commutation (11)}) \\ &= Q_1^1 S_\delta \quad (\text{par le théorème de Pitman discret démontré : } P_1^1 \Phi = Q_1^1) \\ &= Q_\delta^\delta \quad (\text{par la deuxième équation (10) avec } x = 1) \end{aligned}$$

\square

- Enfin, en prenant $\delta \rightarrow 0$ en suivant la décroissance $\delta := 1/\sqrt{n}$, on a par le théorème 3 les convergences faibles suivantes :

$$\begin{cases} P_\delta^\delta \implies P^0 & (\text{mesure de Wiener}) \\ Q_\delta^\delta \implies Q^0 & (\text{mesure de Bessel}) \end{cases}$$

Puis par le lemme 2 de théorie de la mesure :

$$\begin{cases} P_\delta^\delta \Phi \implies P^0 \Phi \\ Q_\delta^\delta \implies Q^0 \end{cases}$$

Comme on a l'égalité (12) pour tout $\delta > 0$, on en déduit par égalité des limites :

$$\boxed{P^0 \Phi = Q^0}$$

On a donc démontré le théorème de Pitman sous sa forme générale. \square

3 Transformation de Pitman

Dans la section 2.4, on a établi le théorème de Pitman sous la forme :

$$\left(2 \sup_{0 \leq s \leq t} B_s - B_t \right)_{t \geq 0} \stackrel{\text{Loi}}{=} \text{Bes}(3)^0$$

Par symétrie du mouvement brownien et par le fait que $\sup(f) = -\inf(-f)$, le théorème de Pitman peut s'écrire sous la forme :

$$\left(B_t - 2 \inf_{0 \leq s \leq t} B_s \right)_{t \geq 0} \stackrel{\text{Loi}}{=} \text{Bes}(3)^0$$

Pour établir le théorème de Pitman sous sa première forme, on avait considéré la transformation de Pitman (9). C'est cette transformation que l'on va étudier dans la suite.

Cette transformation est étudiée dans l'article principal du stage [1] de Biane, Bougerol et O'Connell sous la forme associée à la deuxième écriture du théorème de Pitman ci-dessus.

Pour se conformer à la forme choisie dans l'article [1], on étudiera donc dans la suite la généralisation de la transformation de Pitman sous la forme :

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi} : C &\longrightarrow C \\ w &\longmapsto (w(\cdot) - 2 \inf_{0 \leq s \leq \cdot} w(s)) \end{aligned} \quad (13)$$

3.1 Définition de la transformée de Pitman et propriétés fondamentales

Soit V un espace vectoriel et V^\vee son dual. Soit $\alpha \in V$ et $\alpha^\vee \in V^\vee$ une forme linéaire telle que $\alpha^\vee(\alpha) = 2$. On définit la transformée de Pitman ci-dessous.

Définition 6 (Transformée de Pitman). La transformée de Pitman notée \mathcal{P}_α est définie sur l'ensemble des chemins continus $\pi : [0, T] \rightarrow V$ tels que $\pi(0) = 0$ par la formule :

$$\mathcal{P}_\alpha \pi(t) := \pi(t) - \inf_{0 \leq s \leq t} \alpha^\vee(\pi(s)) \alpha$$

On remarque que \mathcal{P}_α dépend du choix du couple (α, α^\vee) mais on notera \mathcal{P}_α pour la simplicité d'écriture et on considèrera que α^\vee est donné tel que $\alpha^\vee(\alpha) = 2$.

Remarque 6. Dans le cas où $V := \mathbb{R}$ avec $\alpha := 1$ et $\alpha^\vee := 2$ on retrouve que \mathcal{P}_1 est la transformation de Pitman (13) aperçue en section 2 sous son autre forme. Notons aussi que l'effet sur un chemin de la transformation de Pitman sous sa nouvelle forme (13) n'est pas le même que pour la forme (9). Par exemple, si $\tilde{Z}_n := X_n - 2 \inf_{0 \leq k \leq n} X_k$ le nouveau tracé de la figure 4 est donné par la figure ci-contre.

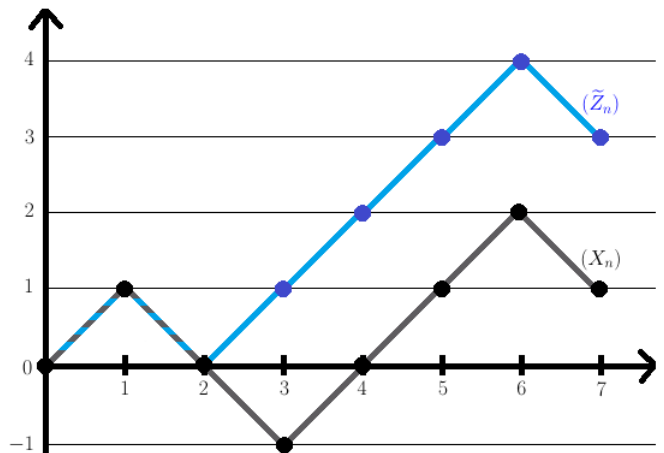


FIGURE 5 –
Effet de la (nouvelle) transformation de Pitman sur la chaîne de Markov (X_n)

Proposition 5. Soit $v \in V$. On définit la réflexion par rapport à α par : $s_\alpha(v) := v - \alpha^\vee(v)\alpha$. Alors on a pour le chemin $\pi(t) := tv$:

$$\begin{cases} \mathcal{P}_\alpha \pi = \pi & \text{si } \alpha^\vee(v) \geq 0 \\ \mathcal{P}_\alpha \pi = s_\alpha \pi & \text{si } \alpha^\vee(v) \leq 0 \end{cases}$$

Démonstration. Par définition : $\mathcal{P}_\alpha \pi(t) := \pi(t) - \inf_{0 \leq s \leq t} \alpha^\vee(\pi(s))\alpha$. On note qu'ici :

$$\alpha^\vee(\pi(s)) = \alpha^\vee(sv) = s\alpha^\vee(v)$$

• Si $\alpha^\vee(v) \geq 0$, alors on a :

$$\inf_{0 \leq s \leq t} \alpha^\vee(\pi(s)) = \alpha^\vee(v) \inf_{0 \leq s \leq t} s = 0 \text{ et donc } \mathcal{P}_\alpha \pi = \pi$$

• Si $\alpha^\vee(v) \leq 0$, alors on a :

$$\inf_{0 \leq s \leq t} \alpha^\vee(\pi(s)) = \inf_{0 \leq s \leq t} \alpha^\vee(v)s = \alpha^\vee(v)t \text{ et donc } \mathcal{P}_\alpha \pi = s_\alpha \pi$$

□

Proposition 6. La transformée de Pitman satisfait les propriétés suivantes :

(i) Pour tout $\lambda > 0$, la transformée de Pitman associée à $(\lambda\alpha, \frac{\alpha^\vee}{\lambda})$ est égale à la transformée de Pitman associée à (α, α^\vee) .

(ii) On a $\forall t \in [0, T] : \alpha^\vee(\mathcal{P}_\alpha \pi(t)) \geq 0$ et de plus :

$$\mathcal{P}_\alpha \pi = \pi \Leftrightarrow \forall t \in [0, T], \alpha^\vee(\pi(t)) \geq 0$$

(iii) La transformée de Pitman est idempotente : $\mathcal{P}_\alpha \mathcal{P}_\alpha \pi = \mathcal{P}_\alpha \pi$.

(iv) • Soit $\pi : [0, +\infty[\rightarrow V$ un chemin, alors :

$$- \inf_{0 \leq t \leq T} \alpha^\vee(\pi(t)) \in [0, \alpha^\vee(\mathcal{P}_\alpha \pi(T))]$$

• Réciproquement, si on se donne un chemin η tel que $\eta(0) = 0$ et tel que $\alpha^\vee(\eta(t)) \geq 0$ $\forall t \in [0, T]$ et que l'on se donne $x \in [0, \alpha^\vee(\eta(T))]$, alors il existe un unique chemin π tel que :

$$\begin{cases} \mathcal{P}_\alpha \pi = \eta \\ x = - \inf_{0 \leq t \leq T} \alpha^\vee(\pi(t)) \end{cases}$$

De plus, ce chemin est donné par la formule :

$$\pi(t) = \eta(t) - \min \left(x, \inf_{t \leq s \leq T} \alpha^\vee(\eta(s)) \right) \alpha \quad (14)$$

On peut voir cette formule comme une formule d'inversion de Pitman due à Biane-Bougerol-O'Connell dans [1].

Démonstration. (i) On a par définition d'une part : $\mathcal{P}_{(\alpha, \alpha^\vee)} \pi(t) := \pi(t) - \inf_{0 \leq s \leq t} \alpha^\vee(\pi(s))\alpha$. Et d'autre part : $\mathcal{P}_{(\lambda\alpha, \frac{\alpha^\vee}{\lambda})} \pi(t) := \pi(t) - \inf_{0 \leq s \leq t} \frac{1}{\lambda} \alpha^\vee(\pi(s))\lambda\alpha = \pi(t) - \inf_{0 \leq s \leq t} \alpha^\vee(\pi(s))\alpha$.

D'où le premier point.

(ii) Soit $t \in [0, T]$, par définition $\mathcal{P}_\alpha \pi(t) := \pi(t) - \inf_{0 \leq s \leq t} \alpha^\vee(\pi(s))\alpha$.

Donc par linéarité de α^\vee et le fait que $\alpha^\vee(\alpha) = 2$:

$$\alpha^\vee(\mathcal{P}_\alpha \pi(t)) = \alpha^\vee(\pi(t)) - \inf_{0 \leq s \leq t} \alpha^\vee(\pi(s))\alpha^\vee(\alpha) = \alpha^\vee(\pi(t)) - 2 \inf_{0 \leq s \leq t} \alpha^\vee(\pi(s))$$

Comme $\pi(0) = 0$ on a $\alpha^\vee(\pi(0)) = 0$ par linéarité. D'où :

$$\inf_{0 \leq s \leq t} \alpha^\vee(\pi(s)) \leq 0 \quad (15)$$

En particulier :

$$\alpha^\vee(\mathcal{P}_\alpha \pi(t)) = \alpha^\vee(\pi(t)) - 2 \underbrace{\inf_{0 \leq s \leq t} \alpha^\vee(\pi(s))}_{\geq 0} - \underbrace{\inf_{0 \leq s \leq t} \alpha^\vee(\pi(s))}_{\geq 0}$$

Donc on a bien :

$$\forall t \in [0, T] : \alpha^\vee(\mathcal{P}_\alpha \pi(t)) \geq 0$$

Montrons maintenant l'équivalence :

(\Rightarrow) Si $\mathcal{P}_\alpha \pi = \pi$, alors : $\pi(t) - \inf_{0 \leq s \leq t} \alpha^\vee(\pi(s)) \alpha = \pi(t)$. Donc on a :

$$\left(\inf_{0 \leq s \leq t} \alpha^\vee(\pi(s)) \right) \alpha = 0$$

Puis comme α n'est pas le vecteur nul (sans quoi on ne pourrait avoir $\alpha^\vee(\alpha) = 2$), il vient :

$$\inf_{0 \leq s \leq t} \alpha^\vee(\pi(s)) = 0$$

Donc on a bien : $\forall t \in [0, T] : \alpha^\vee(\pi(t)) \geq 0$.

(\Leftarrow) Si $\forall t \in [0, T] : \alpha^\vee(\pi(t)) \geq 0$, alors : $\inf_{0 \leq s \leq t} \alpha^\vee(\pi(s)) = 0$ car $\alpha^\vee(\pi(0)) = 0$. Donc :

$$\mathcal{P}_\alpha \pi(t) = \pi(t) - \inf_{0 \leq s \leq t} \alpha^\vee(\pi(s)) \alpha = \pi(t)$$

Ce qui démontre le point (ii).

(iii) Par le point (ii) : $\alpha^\vee(\mathcal{P}_\alpha \pi(t)) \geq 0$, puis par l'équivalence du point (ii) appliquée avec $\mathcal{P}_\alpha \pi$ à la place de π :

$$\mathcal{P}_\alpha \mathcal{P}_\alpha \pi = \mathcal{P}_\alpha \pi$$

(iv) • On a vu grâce à (15) que $-\inf_{0 \leq t \leq T} \alpha^\vee(\pi(t)) \geq 0$. Comme de plus :

$$\alpha^\vee(\mathcal{P}_\alpha \pi(t)) = \alpha^\vee(\pi(t)) - 2 \underbrace{\inf_{0 \leq s \leq t} \alpha^\vee(\pi(s))}_{\geq 0} - \inf_{0 \leq s \leq t} \alpha^\vee(\pi(s))$$

On obtient donc :

$$\alpha^\vee(\mathcal{P}_\alpha \pi(T)) \geq - \inf_{0 \leq t \leq T} \alpha^\vee(\pi(t))$$

Ainsi, on a bien :

$$- \inf_{0 \leq t \leq T} \alpha^\vee(\pi(t)) \in [0, \alpha^\vee(\mathcal{P}_\alpha \pi(T))]$$

• Soit π un chemin, on définit :

$$\eta := \mathcal{P}_\alpha \pi$$

On définit également $x := - \inf_{0 \leq t \leq T} \alpha^\vee(\pi(t))$ et $t_0 := \sup \{t \geq 0 \mid \alpha^\vee(\pi(t)) = -x\}$

◇ Si $t \geq t_0$, alors on a $\inf_{0 \leq s \leq t} \alpha^\vee(\pi(s)) = -x$ et de plus :

$$\begin{aligned} \alpha^\vee(\eta(t)) &= \alpha^\vee(\mathcal{P}_\alpha \pi(t)) \\ &= \alpha^\vee(\pi(t)) - 2 \inf_{0 \leq s \leq t} \alpha^\vee(\pi(s)) \\ &= \alpha^\vee(\pi(t)) + 2x \\ &= x + \underbrace{\alpha^\vee(\pi(t)) + x}_{\geq 0 \text{ par déf. de } x} \end{aligned}$$

Donc $\forall t \geq t_0 : \alpha^\vee(\eta(t)) \geq x$ et ainsi :

$$\forall t \geq t_0 : \min \left(x, \inf_{t \leq s \leq T} \alpha^\vee(\eta(s)) \right) = x \quad (16)$$

Comme $\mathcal{P}_\alpha \pi = \eta$, on obtient ainsi pour $t \geq t_0$:

$$\begin{aligned} \pi(t) - \inf_{0 \leq s \leq t} \alpha^\vee(\pi(s)) \alpha &= \eta(t) \\ \pi(t) &= \eta(t) - x\alpha \quad (\text{par définition de } x) \\ \pi(t) &= \eta(t) - \min \left(x, \inf_{t \leq s \leq T} \alpha^\vee(\eta(s)) \right) \alpha \quad (\text{par (16)}) \end{aligned}$$

◇ Si $t < t_0$, on pose :

$$u := \inf \left\{ s \geq t \mid \alpha^\vee(\pi(s)) = \inf_{0 \leq v \leq t} \alpha^\vee(\pi(v)) \right\}$$

Donc $t \leq u \leq t_0$ et en remarquant que :

$$\alpha^\vee(\pi(u)) = \inf_{0 \leq v \leq t} \alpha^\vee(\pi(v)) = \inf_{0 \leq s \leq u} \alpha^\vee(\pi(s)) \quad (17)$$

On obtient :

$$\begin{aligned} \alpha^\vee(\eta(u)) &= \alpha^\vee(\mathcal{P}_\alpha \pi(u)) \\ &= \alpha^\vee(\pi(u)) - 2 \inf_{0 \leq s \leq u} \alpha^\vee(\pi(s)) \\ &= -\alpha^\vee(\pi(u)) \quad (\text{par (17)}) \\ &= -\inf_{0 \leq v \leq t} \alpha^\vee(\pi(v)) \quad (\text{à nouveau par (17)}) \end{aligned}$$

On a donc :

$$\inf_{t \leq v \leq T} \alpha^\vee(\eta(v)) \leq -\inf_{0 \leq v \leq t} \alpha^\vee(\pi(v)) \leq x$$

Par ailleurs, pour $v \geq t$, on a :

$$\alpha^\vee(\eta(v)) = \alpha^\vee(\pi(v)) - 2 \inf_{0 \leq s \leq v} \alpha^\vee(\pi(s)) = \underbrace{\alpha^\vee(\pi(v)) - \inf_{0 \leq s \leq v} \alpha^\vee(\pi(s))}_{\geq 0} - \inf_{0 \leq s \leq v} \alpha^\vee(\pi(s))$$

D'où $\alpha^\vee(\eta(v)) \geq -\inf_{0 \leq s \leq v} \alpha^\vee(\pi(s))$ et ainsi :

$$\inf_{t \leq v \leq T} \alpha^\vee(\eta(v)) = -\inf_{0 \leq s \leq v} \alpha^\vee(\pi(s))$$

D'où finalement :

$$\forall t < t_0 : \pi(t) = \eta(t) - \min \left(x, \inf_{t \leq s \leq T} \alpha^\vee(\eta(s)) \right) \alpha$$

On a donc montré que si un tel chemin π existe, alors il est nécessairement donné par la formule (14). Cela démontre donc l'unicité.

Pour l'existence, il suffit de prendre π écrit comme (14) et en disjonctant les cas comme ci-dessus, on retrouve bien par les mêmes calculs que :

$$\begin{cases} \mathcal{P}_\alpha \pi = \eta \\ x = -\inf_{0 \leq t \leq T} \alpha^\vee(\pi(t)) \end{cases}$$

Ce qui termine la preuve de la proposition. □

Remarque 7. Cette formule d'inversion de Biane-Bougerol-O'Connell sera particulièrement utile ultérieurement pour définir une généralisation aux opérateurs de Littelmann.

3.2 Relations de tresse pour la transformée de Pitman

Dans cette sous-section, on s'intéresse particulièrement à la composition de transformations de Pitman sous forme de tresse (c'est à dire de la forme $\mathcal{P}_\alpha \mathcal{P}_\beta \mathcal{P}_\alpha \dots$). Ce nom de "tresse" est directement issu de la théorie des groupes de tresses. On peut aussi noter que les groupes de tresses ont des relations très étroites avec les groupes de réflexions. Ces derniers seront aussi exploités ultérieurement dans ce mémoire.

Notations et hypothèses : On considérera pour les théorèmes suivants de cette sous-section :

$$\alpha, \beta \in V \text{ et } \alpha^\vee, \beta^\vee \in V^\vee \text{ tels que } \alpha^\vee(\beta) < 0 \text{ et } \beta^\vee(\alpha) < 0$$

De plus, par le point (i) de la proposition 6, on peut quitte à faire un changement d'échelle, supposer que :

$$\alpha^\vee(\beta) = \beta^\vee(\alpha)$$

qui ne change pas \mathcal{P}_α et \mathcal{P}_β . En effet, on a $\mathcal{P}_{(\alpha, \alpha^\vee)} = \mathcal{P}_{(\lambda\alpha, \frac{\alpha^\vee}{\lambda})}$ avec $\lambda := \frac{\alpha^\vee(\beta)}{\beta^\vee(\alpha)}$ et de même $\mathcal{P}_{(\beta, \beta^\vee)} = \mathcal{P}_{(\lambda'\beta, \frac{\beta^\vee}{\lambda'})}$ avec $\lambda' := \frac{\beta^\vee(\alpha)}{\alpha^\vee(\beta)}$.

On utilisera en outre les notations :

$$\rho := -\frac{1}{2}\alpha^\vee(\beta) = -\frac{1}{2}\beta^\vee(\alpha) ; X(s) := \alpha^\vee(\pi(s)) \text{ et } Y(s) := \beta^\vee(\pi(s))$$

Théorème 5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et on suppose que $\rho \geq \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$. Alors :

$$\underbrace{(\mathcal{P}_\alpha \mathcal{P}_\beta \mathcal{P}_\alpha \dots)}_{n \text{ termes}} \pi(t) = \pi(t) - \inf_{0 \leq s_{n-1} \leq \dots \leq s_0 \leq t} \left(\sum_{i=0}^{n-1} T_i(\rho) Z^{(i)}(s_i) \right) \alpha - \inf_{0 \leq s_{n-2} \leq \dots \leq s_0 \leq t} \left(\sum_{i=0}^{n-2} T_i(\rho) Z^{(i+1)}(s_i) \right) \beta$$

où : $Z^{(k)} = X$ si k est pair et $Z^{(k)} = Y$ si k est impair. Avec les T_k qui sont les polynômes de Tchebychev définis par : $T_0(x) := 1$, $T_1(x) := 2x$ et $\forall k \geq 1$: $T_{k+1}(x) := 2xT_k(x) - T_{k-1}(x)$.

Remarque 8. Les polynômes de Tchebychev satisfont l'égalité classique :

$$T_k(\cos \theta) = \frac{\sin((k+1)\theta)}{\sin(\theta)} \quad (18)$$

En particulier, sous nos hypothèses sur ρ et n , on a :

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket : T_k(\rho) \geq 0$$

On démontre maintenant le théorème 5. Pour cela on aura besoin des deux lemmes suivants.

Lemme 5. Soit $X : [0, t] \rightarrow \mathbb{R}$ fonction continue telle que $X(0) = 0$.

On pose $t_0 := \sup \{s \geq 0 \mid X(s) = \inf_{0 \leq u \leq s} X(u)\}$. Alors, pour tout $u \leq t_0$:

$$\inf_{u \leq s \leq t} \left(X(s) - 2 \inf_{0 \leq w \leq s} X(w) \right) = - \inf_{0 \leq v \leq u} X(v) \quad (19)$$

Démonstration. Soit $u \leq t_0$, on pose $r := \inf \{s \geq u \mid X(s) = \inf_{0 \leq v \leq u} X(v)\}$.

Donc $u \leq r \leq t_0$ et on remarque que :

$$X(r) = \inf_{0 \leq v \leq u} X(v) = \inf_{0 \leq v \leq r} X(v) \quad (20)$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned} X(r) - 2 \inf_{0 \leq w \leq r} X(w) &= - \inf_{0 \leq w \leq r} X(w) \quad (\text{par (20)}) \\ &= - \inf_{0 \leq v \leq u} X(v) \quad (\text{à nouveau par (20)}) \end{aligned}$$

Puisque $u \leq r \leq t_0$, on a donc :

$$\inf_{u \leq s \leq t} \left(X(s) - 2 \inf_{0 \leq w \leq s} X(w) \right) \leq X(r) - 2 \inf_{0 \leq w \leq r} X(w)$$

Et ainsi :

$$\inf_{u \leq s \leq t} \left(X(s) - 2 \inf_{0 \leq w \leq s} X(w) \right) \leq - \inf_{0 \leq v \leq u} X(v) \quad (21)$$

Par ailleurs, pour $s \geq u$:

$$X(s) - 2 \inf_{0 \leq w \leq s} X(w) = X(s) - \underbrace{\inf_{0 \leq w \leq s} X(w) - \inf_{0 \leq w \leq s} X(w)}_{\geq 0}$$

D'où l'on obtient :

$$X(s) - 2 \inf_{0 \leq w \leq s} X(w) \geq - \inf_{0 \leq w \leq s} X(w)$$

Et en rappelant que si $A \subset B$ alors $\inf_B f \leq \inf_A f$ on obtient :

$$X(s) - 2 \inf_{0 \leq w \leq s} X(w) \geq - \inf_{0 \leq w \leq u} X(w)$$

D'où finalement :

$$\inf_{u \leq s \leq t} \left(X(s) - 2 \inf_{0 \leq w \leq s} X(w) \right) \geq - \inf_{0 \leq v \leq u} X(v) \quad (22)$$

Donc en réunissant les inégalités (21) et (22), on obtient l'égalité (19) annoncée. \square

Lemme 6. Soient X et Y deux fonctions continues telles que $X(0) = Y(0) = 0$. Alors :

$$\inf_{0 \leq s \leq t} \left[X(s) + \inf_{0 \leq u \leq s} Y(u) \right] = \inf_{0 \leq s \leq t} X(s) + \inf_{0 \leq u \leq t} \left[X(s) - 2 \inf_{0 \leq u \leq s} X(u) + \inf_{0 \leq u \leq s} \left(Y(u) + \inf_{0 \leq v \leq u} X(v) \right) \right] \quad (23)$$

Démonstration. Le terme de gauche peut se réécrire : $I := \inf_{0 \leq u \leq s \leq t} [X(s) + Y(u)]$.

On pose t_0 comme dans le lemme précédent :

$$t_0 := \sup \left\{ s \geq 0 \mid X(s) = \inf_{0 \leq u \leq s} X(s) \right\}$$

On obtient donc par disjonction des cas :

$$I = \inf \left[\left(\inf_{0 \leq u \leq t_0} Y(u) + X(t_0) \right) ; \left(\inf_{0 \leq t_0 \leq u \leq s \leq t} (X(s) + Y(u)) \right) \right] \quad (24)$$

On note J le terme de droite dans l'égalité à démontrer. On peut réécrire :

$$\begin{aligned} J &= X(t_0) + \inf_{0 \leq s \leq t} \left[X(s) - 2 \inf_{0 \leq u \leq s} X(u) + \inf_{0 \leq u \leq s} \left(Y(u) + \inf_{0 \leq v \leq u} X(v) \right) \right] \\ &= X(t_0) + \inf_{0 \leq u \leq s \leq t} \left[X(s) - 2 \inf_{0 \leq w \leq s} X(w) + Y(u) + \inf_{0 \leq v \leq u} X(v) \right] \\ &= \inf(A; B) \end{aligned}$$

Avec :

$$A := \inf_{\substack{0 \leq u \leq s \leq t \\ u \leq t_0}} \left(X(t_0) + X(s) - 2 \inf_{0 \leq w \leq s} X(w) + Y(u) + \inf_{0 \leq v \leq u} X(v) \right)$$

Et :

$$B := \inf_{t_0 \leq u \leq s \leq t} \left(X(t_0) + X(s) - 2 \inf_{0 \leq w \leq s} X(w) + Y(u) + \inf_{0 \leq v \leq u} X(v) \right)$$

◇ Si $u \leq t_0$: par égalité (19) du lemme 5 :

$$\inf_{s \leq t} \left(X(s) - 2 \inf_{0 \leq w \leq s} X(w) \right) = - \inf_{0 \leq v \leq u} X(v)$$

◇ Si $u \geq t_0$: $\inf_{0 \leq w \leq s} X(w) = X(t_0)$. D'où finalement :

$$\begin{aligned} J &= \inf(A; B) \\ &= \inf \left[\inf_{0 \leq u \leq t_0} (X(t_0) + Y(u)) ; \inf_{t_0 \leq u \leq t} \left(Y(u) + \inf_{u \leq s \leq t} X(s) \right) \right] \\ &= \inf \left[\left(\inf_{0 \leq u \leq t_0} Y(u) + X(t_0) \right) ; \left(\inf_{0 \leq t_0 \leq u \leq s \leq t} (X(s) + Y(u)) \right) \right] \\ &= I \quad (\text{par (24)}) \end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration du lemme. □

Démonstration du théorème 5 :

On démontre le résultat par récurrence sur n en distinguant le cas n pair du cas n impair.

\boxed{I} : Pour $n = 1$ le résultat est clairement vrai en notant que la somme associée à β est vide donc nulle. En particulier comme $T_0(\rho) = 1$ et $Z^{(0)}(s_0) = \alpha^\vee(\pi(s_0))$ on retrouve bien la transformée de Pitman.

\boxed{H} : On suppose le résultat vrai au rang n . Démontrons qu'il reste vrai au rang $n + 1$. On suppose tout d'abord que n est pair. On a alors :

$$\underbrace{\mathcal{P}_\alpha \mathcal{P}_\beta \mathcal{P}_\alpha \cdots}_{n+1 \text{ termes}} = \underbrace{\mathcal{P}_\beta \mathcal{P}_\alpha \mathcal{P}_\beta \cdots}_{n \text{ termes}} \mathcal{P}_\alpha$$

De plus : $\alpha^\vee(\mathcal{P}_\alpha \pi(s)) = \alpha^\vee(\pi(s)) - 2 \inf_{0 \leq u \leq s} \alpha^\vee(\pi(u))$. Donc avec la notation X :

$$\alpha^\vee(\mathcal{P}_\alpha \pi(s)) = X(s) - 2 \inf_{0 \leq u \leq s} X(u) \quad (25)$$

De même pour $\beta^\vee(\mathcal{P}_\alpha \pi(s)) = \beta^\vee(\pi(s)) - 2 \inf_{0 \leq u \leq s} \alpha^\vee(\pi(u)) \beta^\vee(\alpha)$, avec la notation Y et ρ :

$$\beta^\vee(\mathcal{P}_\alpha \pi(s)) = Y(s) + 2\rho \inf_{0 \leq u \leq s} X(u) \quad (26)$$

Par hypothèse de récurrence au rang n , on obtient :

$$\begin{aligned} \underbrace{\mathcal{P}_\alpha \mathcal{P}_\beta \mathcal{P}_\alpha \cdots}_{n+1 \text{ termes}} \pi(t) &= \underbrace{(\mathcal{P}_\beta \mathcal{P}_\alpha \mathcal{P}_\beta \cdots)}_{n \text{ termes}} (\mathcal{P}_\alpha \pi(t)) \\ &= \pi(t) - \inf_{0 \leq s \leq t} X(s) \alpha - \inf_{0 \leq s_{n-1} \leq \cdots \leq s_0 \leq t} \left(\sum_{i=0}^{n-1} T_i(\rho) \widehat{Z}_\alpha^{(i)}(s_i) \right) \alpha \\ &\quad - \inf_{0 \leq s_{n-2} \leq \cdots \leq s_0 \leq t} \left(\sum_{i=0}^{n-2} T_i(\rho) \widehat{Z}_\alpha^{(i+1)}(s_i) \right) \beta \end{aligned}$$

Où l'on a posé, grâce à (25) et (26) :

$$\widehat{Z}_\alpha^{(i)}(s) := \begin{cases} X(s) - 2 \inf_{0 \leq u \leq s} X(u) & \text{pour } i \text{ pair} \\ Y(s) + 2\rho \inf_{0 \leq u \leq s} X(u) & \text{pour } i \text{ impair} \end{cases}$$

Le coefficient devant α dans l'expression précédente est égal à :

$$H_\alpha := - \inf_{0 \leq s \leq t} T_0(\rho) X(s) - \inf_{0 \leq s \leq t} \left[T_0(\rho) X(s) - 2 \inf_{0 \leq u \leq s} T_0(\rho) X(u) + \inf_{0 \leq u \leq s} \left(\Gamma(u) + \inf_{0 \leq v \leq u} T_0(\rho) X(v) \right) \right]$$

où Γ est donné par :

$$\Gamma(u) := T_1(\rho)Y(u) + 2\rho T_1(\rho) \inf_{0 \leq v \leq u} X(v) + \inf_{0 \leq u_{n-1} \leq \dots \leq u_2 \leq u} \left(\sum_{i=2}^{n-1} T_i(\rho) \widehat{Z}_\alpha^{(i)}(u_i) \right) - T_0(\rho) \inf_{0 \leq v \leq u} X(v)$$

Que l'on peut réécrire par relation des polynômes de Tchebychev :

$$\Gamma(u) := T_1(\rho)Y(u) + T_2(\rho) \inf_{0 \leq v \leq u} X(v) + \inf_{0 \leq u_{n-1} \leq \dots \leq u_2 \leq u} \left(\sum_{i=2}^{n-1} T_i(\rho) \widehat{Z}_\alpha^{(i)}(u_i) \right)$$

Par l'égalité (23) du lemme 6, on peut réécrire H_α en :

$$H_\alpha = - \inf_{0 \leq s \leq t} \left(T_0(\rho)X(s) + \inf_{0 \leq u \leq s} \Gamma(u) \right) \quad (27)$$

Prouvons maintenant par récurrence sur k que :

$$H_\alpha = - \inf_{0 \leq u_{2k} \leq \dots \leq u_1 \leq u_0 \leq t} \left(\sum_{i=0}^{2k} T_i(\rho) Z^{(i)}(u_i) + W_k(u_{2k-1}) \right)$$

où l'on a posé :

$$W_k(v) := \inf_{0 \leq u_{n-1} \leq \dots \leq u_{2k+1} \leq u_{2k} \leq v} \left(\sum_{i=2k}^{n-1} T_i(\rho) \widehat{Z}_\alpha^{(i)}(u_i) \right)$$

I La formule est clairement vraie pour $k = 1$ par l'équation (27).

H Supposons que la formule est vraie au rang k et démontrons la au rang $k + 1$. On a par hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} H_\alpha &= - \inf_{0 \leq u_{2k} \leq \dots \leq u_1 \leq u_0 \leq t} \left(\sum_{i=0}^{2k} T_i(\rho) Z^{(i)}(u_i) + W_k(u_{2k-1}) \right) \\ &= - \inf_{0 \leq u_{2k-1} \leq \dots \leq u_1 \leq u_0 \leq t} \left[\sum_{i=0}^{2k-1} T_i(\rho) Z^{(i)}(u_i) + \inf_{0 \leq v \leq u_{2k-1}} T_{2k}(\rho) Z^{(2k)}(v) + A \right] \end{aligned}$$

Avec :

$$A := \inf_{0 \leq v \leq u_{2k-1}} \left(T_{2k}(\rho)X(v) - 2 \inf_{0 \leq w \leq v} T_{2k}(\rho)X(w) + \inf_{0 \leq z \leq v} \left(R_k(z) + \inf_{0 \leq \tau \leq z} T_{2k}(\rho)X(\tau) \right) \right)$$

où l'on a posé :

$$R_k(z) := T_{2k+1}(\rho)Y(z) + 2\rho T_{2k+1}(\rho) \inf_{0 \leq \tau \leq z} X(\tau) + \inf_{0 \leq u_{n-1} \leq \dots \leq u_{2k+2} \leq z} \left(\sum_{i=2k+2}^{n-1} \widehat{Z}_\alpha^{(i)}(u_i) \right) - \inf_{0 \leq \tau \leq z} T_{2k}(\rho)X(\tau)$$

Par la relation de récurrence satisfaite par les polynômes de Tchebychev :

$$2\rho T_{2k+1}(\rho) - T_{2k}(\rho) = T_{2k+2}(\rho)$$

Il vient :

$$R_k(z) = T_{2k+1}(\rho)Y(z) + T_{2k+2}(\rho) \inf_{0 \leq \tau \leq z} X(\tau) + \inf_{0 \leq u_{n-1} \leq \dots \leq u_{2k+2} \leq z} \left(\sum_{i=2k+2}^{n-1} \widehat{Z}_\alpha^{(i)}(u_i) \right)$$

En appliquant (23) du lemme 6, il vient :

$$H_\alpha = - \inf_{0 \leq u_{2k-1} \leq \dots \leq u_0 \leq t} \left[\sum_{i=0}^{2k-1} T_i(\rho) Z^{(i)}(u_i) + \inf_{0 \leq v \leq u_{2k-1}} \left(T_{2k}(\rho)X(v) + \inf_{0 \leq z \leq v} R_k(z) \right) \right]$$

D'où finalement :

$$H_\alpha = - \inf_{0 \leq u_{2k+2} \leq \dots \leq u_1 \leq u_0 \leq t} \left(\sum_{i=0}^{2k+2} T_i(\rho) Z^{(i)}(u_i) + W_{k+1}(u_{2k+1}) \right)$$

En prenant $k = n$ on obtient bien le terme en α de la formule initiale à démontrer au rang $n + 1$. Pour le terme en β , il suffit de remarquer que :

$$\underbrace{\mathcal{P}_\alpha \mathcal{P}_\beta \mathcal{P}_\alpha \cdots}_{n+1 \text{ termes}} \pi(t) = \mathcal{P}_\alpha \underbrace{\mathcal{P}_\beta \mathcal{P}_\alpha \mathcal{P}_\beta \cdots}_{n \text{ termes}} \pi(t)$$

La formule au rang $n + 1$ s'obtient donc directement à partir de celle au rang n .

Le cas n impair se traite de manière analogue. \square

Théorème 6. Soit $\alpha, \beta \in V$ et $\alpha^\vee, \beta^\vee \in V^\vee$ tels que $\alpha^\vee(\alpha) = \beta^\vee(\beta) = 2$ avec $\alpha^\vee(\beta) < 0$ et $\beta^\vee(\alpha) < 0$ et $\alpha^\vee(\beta)\beta^\vee(\alpha) = 4 \cos^2\left(\frac{\pi}{n}\right)$. Alors, on a :

$$\underbrace{\mathcal{P}_\alpha \mathcal{P}_\beta \mathcal{P}_\alpha \cdots}_{n \text{ termes}} = \underbrace{\mathcal{P}_\beta \mathcal{P}_\alpha \mathcal{P}_\beta \cdots}_{n \text{ termes}}$$

Démonstration. Soit $\alpha^\vee(\beta) = \beta^\vee(\alpha) = -2 \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$ i.e. $\rho = \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$. On obtient donc par (18) :

$$T_{n-1}(\rho) = \frac{\sin(\pi)}{\sin(\pi/n)} = 0$$

En supprimant donc le terme ci-dessus de la formule du théorème 5, on obtient :

$$\begin{aligned} \underbrace{(\mathcal{P}_\alpha \mathcal{P}_\beta \mathcal{P}_\alpha \cdots)}_{n \text{ termes}} \pi(t) &= \pi(t) - \inf_{0 \leq s_{n-2} \leq \dots \leq s_0 \leq t} \left(\sum_{i=0}^{n-2} T_i(\rho) Z^{(i)}(s_i) \right) \alpha \\ &\quad - \inf_{0 \leq s_{n-2} \leq \dots \leq s_0 \leq t} \left(\sum_{i=0}^{n-2} T_i(\rho) Z^{(i+1)}(s_i) \right) \beta \end{aligned}$$

Puis, en échangeant les rôles (symétriques) de α et β on obtient :

$$\begin{aligned} \underbrace{(\mathcal{P}_\beta \mathcal{P}_\alpha \mathcal{P}_\beta \cdots)}_{n \text{ termes}} \pi(t) &= \pi(t) - \inf_{0 \leq s_{n-2} \leq \dots \leq s_0 \leq t} \left(\sum_{i=0}^{n-2} T_i(\rho) Z^{(i+1)}(s_i) \right) \beta \\ &\quad - \inf_{0 \leq s_{n-2} \leq \dots \leq s_0 \leq t} \left(\sum_{i=0}^{n-2} T_i(\rho) Z^{(i)}(s_i) \right) \alpha \end{aligned}$$

On obtient donc l'égalité annoncée : $\underbrace{\mathcal{P}_\alpha \mathcal{P}_\beta \mathcal{P}_\alpha \cdots}_{n \text{ termes}} = \underbrace{\mathcal{P}_\beta \mathcal{P}_\alpha \mathcal{P}_\beta \cdots}_{n \text{ termes}}$ \square

Remarque 9. • On a démontré ce théorème comme corollaire du théorème 5. On note que pour des angles particuliers (dits "cristallographiques") i.e. correspondants à : $n = 2, 3, 4, 6$, on peut déduire une preuve de ce théorème directement de la théorie de Littelmann. On peut notamment consulter [11] et [13] à ce sujet.

• Si l'on a $\alpha^\vee(\beta) = \beta^\vee(\alpha) = 0$, alors il vient assez simplement que : $\mathcal{P}_\alpha \mathcal{P}_\beta = \mathcal{P}_\beta \mathcal{P}_\alpha$.

En effet :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_\alpha \mathcal{P}_\beta \pi(t) &= \mathcal{P}_\alpha \left(\pi(\cdot) - \inf_{0 \leq s \leq \cdot} \beta^\vee(\pi(s)) \beta \right) (t) \\ &= \pi(t) - \inf_{0 \leq s \leq t} \beta^\vee(\pi(s)) \beta - \inf_{0 \leq s \leq t} \left[\alpha^\vee \left(\pi(s) - \inf_{0 \leq u \leq s} \beta^\vee(\pi(u)) \beta \right) \right] \\ &= \pi(t) - \inf_{0 \leq s \leq t} \beta^\vee(\pi(s)) \beta - \inf_{0 \leq s \leq t} \alpha^\vee(\pi(s)) \alpha \quad (\text{car } \alpha^\vee(\beta) = 0) \end{aligned}$$

Par symétrie des rôles de α et β , le calcul analogue donne :

$$\mathcal{P}_\beta \mathcal{P}_\alpha \pi(t) = \pi(t) - \inf_{0 \leq s \leq t} \alpha^\vee(\pi(s))\alpha - \inf_{0 \leq s \leq t} \beta^\vee(\pi(s))\beta$$

D'où : $\mathcal{P}_\alpha \mathcal{P}_\beta = \mathcal{P}_\beta \mathcal{P}_\alpha$. □

3.3 Transformation de Pitman et groupes de Coxeter

On va maintenant généraliser la transformation de Pitman en l'associant à $s \in S$ où S sera un ensemble de réflexion générateur d'un groupe de Coxeter.

Définition 7. Un groupe est dit de Coxeter s'il admet une présentation de la forme :

$$\langle s_1, \dots, s_n \mid (s_i s_j)^{m_{i,j}} \rangle$$

avec :

$$\begin{cases} m_{i,j} = m_{j,i} \in (\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}) \cup \{\infty\} \text{ si } i \neq j \\ m_{i,i} = 1 \text{ sinon} \\ (s_i s_j)^\infty \text{ signifie qu'il n'y a pas de relation entre } s_i \text{ et } s_j \end{cases}$$

Définition 8. Un groupe de réflexions (réelles) est un sous-groupe de $O(V)$ (le groupe orthogonal d'un espace euclidien V) engendré par des réflexions.

Théorème 7. *Tout groupe fini de Coxeter est un groupe de réflexions (réel).*

Démonstration. On ne fait figurer ici qu'une démonstration-résumée. Une preuve complète se trouve dans [15] (§68 chapitre 5) et [16].

Soit G un groupe de Coxeter, on munit $V = \mathbb{R}^{\#S}$ d'une forme bilinéaire symétrique définie par :

$$\begin{aligned} B : \mathbb{R}^{\#S} \times \mathbb{R}^{\#S} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (e_i, e_j) &\longmapsto -\cos\left(\frac{\pi}{m_{i,j}}\right) \end{aligned}$$

On construit ensuite l'application :

$$\varphi : S \rightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$$

de la manière suivante : pour tout $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$

$$\varphi(s_i)(e_j) = e_j - 2B(e_i, e_j)e_i$$

On montre que les $\varphi(s_i)\varphi(s_j)$ sont d'ordre $m_{i,j}$ et par propriété universelle qu'on a bien un morphisme étendu à G :

$$\varphi : G \rightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$$

On obtient ainsi une représentation linéaire du groupe G , on montre enfin qu'elle est fidèle (donc injective) et ainsi on obtient que φ réalise un isomorphisme de G sur $\varphi(G)$ qui est un groupe de réflexions réel. □

Remarque 10. La réciproque du théorème précédent est vraie, mais la preuve est assez longue. Elle utilise entre autres un théorème de Matsumoto et l'ordre de Bruhat-Chevalley. On en trouvera une preuve dans [14].

Exemple 4. Les groupes symétriques \mathfrak{S}_n et diédraux D_n sont des exemples classiques de groupes de Coxeter.

On notera dans la suite W un groupe de Coxeter i.e. généré par un ensemble fini de réflexions S d'un espace vectoriel réel.

Définition 9 (Racine et transformée de Pitman pour $s \in S$).

- Soit $s \in S$, on note $\alpha_s \in V$ et $\alpha_s^\vee \in V^\vee$ tels que :

$$s := s_{\alpha_s} \text{ est la réflexion associée à } \alpha_s \text{ i.e. } s(v) := v - \alpha_s^\vee(v)\alpha_s$$

Ainsi, α_s est appelée *racine simple* associée à $s \in S$ et α_s^\vee est appelée *coracine*.

- On notera \mathcal{P}_s la transformation de Pitman associée à la paire $(\alpha_s, \alpha_s^\vee)$ i.e :

$$\mathcal{P}_s := \pi(t) - \inf_{0 \leq u \leq t} \alpha_s^\vee(\pi(u))\alpha_s$$

Remarque 11. • Par les résultats des sections précédentes les $(\mathcal{P}_s)_{s \in S}$ forment une représentation du monoïde généré par les idempotents satisfaisant les relations de tresses.

- Ce type de monoïde est très utilisé dans la théorie des algèbres de Hecke dans le calcul des orbites de Borel (voir [17]) où ces monoïdes sont appelés monoïdes de Richardson-Springer.

Définition 10 (Longueur d'un élément d'un groupe).

- Soit W un groupe noté multiplicativement d'élément neutre 1 et S un sous-ensemble générateur de W tel que $S^{-1} = S$ et $1 \notin S$. Tout élément de W est produit d'une suite finie d'éléments de S .
- Soit $w \in W$, on appelle *longueur* de w (par rapport à S) et l'on note $l_S(w)$ (ici plus simplement $l(w)$) le plus petit entier $q \geq 0$ tel que w soit produit d'une suite de q éléments de S .
- Ainsi 1 est l'unique élément de longueur 0 et pour tout $s \in S : l(s) = 1$.

Proposition 7. On a les propriétés suivantes pour la fonction longueur, pour tout $w, w' \in W$:

$$\begin{aligned} l(ww') &\leq l(w) + l(w') \\ l(w^{-1}) &= l(w) \\ |l(w) - l(w')| &\leq l(ww^{-1}) \end{aligned}$$

Démonstration. On pourra consulter [15] (chap 4, §1, page 9). □

Pour un groupe de Coxeter, on a d'avantage d'informations sur la fonction longueur :

Proposition 8. Soit (W, S) un groupe de Coxeter et soit $s \in S$ et $w \in W$. On suppose qu'une décomposition réduite de w est :

$$w = s_1 \cdots s_q$$

Deux cas seulement peuvent se produire :

- $l(sw) = l(w) + 1$ et $sw = ss_1 \cdots s_q$ est une décomposition réduite de sw .
- $l(sw) = l(w) - 1$ et il existe un entier j tel que $1 \leq j \leq q$ tel que $sw = s_1 \cdots s_{j-1} s_{j+1} \cdots s_q$ est une décomposition réduite de sw et que la suite $ss_1 \cdots s_{j-1} s_{j+1} \cdots s_q$ est une décomposition réduite de w .

Démonstration. On pourra consulter [15] (chap 4, §1, proposition 4 page 15). □

Proposition 9 (Matsumoto).

Soit M un monoïde (avec élément unité 1) et soit $f : S \rightarrow M$ une application. On note $m(s, s')$ l'ordre de ss' où $s, s' \in S$. On pose en outre :

$$a(s, s') := \begin{cases} (f(s)f(s'))^l & \text{si } m(s, s') = 2l \text{ avec } l \text{ fini} \\ (f(s)f(s'))^l f(s) & \text{si } m(s, s') = 2l + 1 \text{ avec } l \text{ fini} \\ 1 & \text{si } m(s, s') = +\infty \end{cases}$$

Si l'on a $\forall s, s' \in S : a(s, s') = a(s', s)$, alors il existe $g : W \rightarrow M$ telle que $g(w) = f(s_1) \cdots f(s_q)$ pour tout $w \in W$ et toute décomposition réduite de $w = s_1 \cdots s_q$.

Démonstration. On pourra consulter [15] (chap 4, §1, proposition 5 page 16). □

Proposition 10. • L'opérateur $\mathcal{P}_{s_1} \cdots \mathcal{P}_{s_q}$ où $w = s_1 \cdots s_q$ avec $q := l(w)$ dépend uniquement de w et ne dépend pas de la décomposition réduite choisie pour w .

• On notera et définira donc cet opérateur par \mathcal{P}_w dont la bonne définition est assurée par cette proposition.

Démonstration. On a défini précédemment l'application :

$$\begin{aligned} \mathcal{P} : S &\longrightarrow M \\ s &\longmapsto \mathcal{P}_s \end{aligned}$$

où l'on note M le monoïde des applications continues à valeurs dans V i.e. $M := (\mathcal{C}([0, T], V), \circ, id)$. En effet, M est bien un monoïde puisque :

$$\forall f, g, h \in \mathcal{C}([0, T], V) : \begin{cases} f \circ g \in \mathcal{C}([0, T], V) \\ f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h \\ f \circ id = id \circ f = f \end{cases}$$

On peut appliquer ici la propriété de Matsumoto (proposition 9) ici en prenant $f = \mathcal{P}$ car $\forall s, s' \in S : a(s, s') = a(s', s)$ en vertu du théorème 6. Ainsi, il existe $g : W \rightarrow M$ telle que $g(w) = \mathcal{P}_{s_1} \cdots \mathcal{P}_{s_q}$ pour tout $w \in W$ et toute décomposition réduite de $w = s_1 \cdots s_q$. Cela signifie donc que $\mathcal{P}_{s_1} \cdots \mathcal{P}_{s_q}$ dépend uniquement de w et que l'on peut définir la transformation de Pitman $\mathcal{P}_w := \mathcal{P}_{s_1} \cdots \mathcal{P}_{s_q}$ qui ne dépend donc pas du choix de la décomposition réduite. \square

• On définit maintenant le demi-espace fermé H_s pour $s \in S$ par :

$$H_s := \{v \in V \mid \alpha_s^\vee(v) \geq 0\}$$

Proposition 11. Soit $w \in W$, on pose :

$$\begin{cases} L_w := \{s \in S \mid l(sw) < l(w)\} \\ R_w := \{s \in S \mid l(ws) < l(w)\} \end{cases}$$

Alors, on a les trois conséquences suivantes :

- Pour tout chemin π , $\mathcal{P}_w \pi$ reste dans le cône convexe $\bigcap_{s \in L_w} H_s$.
- On a : $\forall s \in L_w : \mathcal{P}_s \mathcal{P}_w = \mathcal{P}_w$
- On a : $\forall s \in R_w : \mathcal{P}_w \mathcal{P}_s = \mathcal{P}_w$

Démonstration. • Soit $s \in S$ telle que : $l(sw) < l(w)$, alors d'après la proposition 8, on se retrouve dans le cas (b) et donc w possède la décomposition réduite :

$$w = ss_1 \cdots s_k$$

Donc $\mathcal{P}_w = \mathcal{P}_s \mathcal{P}_{s_1} \cdots \mathcal{P}_{s_k}$ et ainsi $\mathcal{P}_w \pi = \mathcal{P}_s (\mathcal{P}_{s_1} \cdots \mathcal{P}_{s_k} \pi) \in H_s$ car d'après le point (ii) de la proposition 6 :

$$\forall t \in [0, T], \alpha_s^\vee (\mathcal{P}_s (\mathcal{P}_{s_1} \cdots \mathcal{P}_{s_k} \pi(t))) \geq 0$$

Ainsi on a bien $\mathcal{P}_w \pi$ qui reste dans $\bigcap_{s \in L_w} H_s$.

• On a de plus :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_s \mathcal{P}_w \pi &= \mathcal{P}_s \mathcal{P}_s (\mathcal{P}_{s_1} \cdots \mathcal{P}_{s_k} \pi) \\ &= \mathcal{P}_s (\mathcal{P}_{s_1} \cdots \mathcal{P}_{s_k} \pi) \quad (\text{par idempotence, point (iii) de la proposition 6}) \\ &= \mathcal{P}_w \pi \end{aligned}$$

Donc on a bien $\forall s \in L_w : \mathcal{P}_s \mathcal{P}_w \pi = \mathcal{P}_w \pi$.

• De manière analogue, si $l(ws) < l(w)$ alors $\forall s \in R_w : \mathcal{P}_w \mathcal{P}_s \pi = \mathcal{P}_w \pi$. \square

Grâce à cette précédente proposition, on peut énoncer le corollaire suivant faisant intervenir une chambre de Weyl dont nous préciserons la définition et les propriétés ultérieurement.

Corollaire 1. On suppose W fini et w_0 le plus long élément (au sens de la fonction longueur) dans W . Alors $\mathcal{P}_{w_0}\pi$ prend ses valeurs dans $\overline{C} := \bigcap_{s \in S} H_s$ (chambre de Weyl fermée fondamentale). De plus, \mathcal{P}_{w_0} est idempotent et ;

$$\forall w \in W : \mathcal{P}_w \mathcal{P}_{w_0} = \mathcal{P}_{w_0} \mathcal{P}_w = \mathcal{P}_{w_0}$$

Démonstration. Comme W est fini, on peut définir $w_0 := \operatorname{argmax}_{w \in W} l(w)$ l'élément de longueur maximale. Donc $\forall s \in S : l(sw_0) < l(w_0)$ (le cas d'égalité ne peut se produire car sinon $s = id$). D'où $L_{w_0} = S$ et par la proposition 11 : $\mathcal{P}_{w_0}\pi$ reste dans $\bigcap_{s \in S} H_s = \bigcap_{s \in L_{w_0}} H_s$. On a de plus par la proposition 11 :

$$\forall s \in S : \mathcal{P}_s \mathcal{P}_{w_0} = \mathcal{P}_{w_0} \mathcal{P}_s = \mathcal{P}_{w_0} \quad (28)$$

Donc si $w = s_1 \cdots s_q$ (décomposition réduite), il vient :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_w \mathcal{P}_{w_0} &= \mathcal{P}_{s_1} \cdots \mathcal{P}_{s_{q-1}} (\mathcal{P}_{s_q} \mathcal{P}_{w_0}) \\ &= \mathcal{P}_{s_1} \cdots \mathcal{P}_{s_{q-1}} \mathcal{P}_{w_0} \quad (\text{par (28)}) \\ &= \mathcal{P}_{w_0} \quad (\text{par (28) en itérant}) \end{aligned}$$

De même, $\forall w \in W : \mathcal{P}_{w_0} \mathcal{P}_w = \mathcal{P}_{w_0}$ et en particulier $\mathcal{P}_{w_0} \mathcal{P}_{w_0} = \mathcal{P}_{w_0}$ et donc l'idempotence de \mathcal{P}_{w_0} . \square

4 Opérateurs de Littelmann et transformation de Pitman

Dans toute cette section, on supposera que V est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ qui le rend euclidien. On supposera en outre que $\alpha, \alpha^\vee \in V$ vérifiant la relation :

$$\alpha = 2 \frac{\alpha^\vee}{\langle \alpha^\vee, \alpha^\vee \rangle} \quad (29)$$

On définit dans une première sous-section les opérateurs de Littelmann et leurs premières propriétés. On s'attachera ensuite dans les sections suivantes à explorer les liens entre ces opérateurs et la transformation de Pitman.

4.1 Définition des opérateurs de Littelmann et propriétés fondamentales

- On note Π l'ensemble des chemins $\pi : [0, 1] \rightarrow V$ linéaires par morceaux tels que $\pi(0) = 0$.
- Pour deux chemins $\pi_1, \pi_2 \in \Pi$, on définit la concaténation $\pi := \pi_1 * \pi_2$ par :

$$\pi(t) := \begin{cases} \pi_1(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \pi_2(2t - 1) + \pi_1(1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

- On considère la fonction d'évaluation de π sur α^\vee (coracine) :

$$\begin{aligned} h_\alpha : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto h_\alpha(t) := \langle \pi(t), \alpha^\vee \rangle \end{aligned}$$

- On définit le minimum de la fonction d'évaluation par :

$$m_\alpha := \min \{h_\alpha(t) \mid t \in [0, 1]\}$$

Définition 11 (Opérateur de Littelmann e_α).

- On considère $\pi \in \Pi$, l'opérateur de Littelmann e_α envoie un chemin π sur un autre chemin $e_\alpha(\pi)$ dont la construction est détaillée ci-dessous.
- On pose $t_1 := \min \{t \in [0, 1] \mid h_\alpha(t) = m_\alpha\}$ le premier instant où le minimum de la fonction d'évaluation est atteint.
- On pose $t_0 \in [0, t_1]$ tel que t_0 est le moment maximal dans $[0, t_1]$ où l'on a :

$$h_\alpha(t) \geq m_\alpha + 1 \quad \forall t \in [0, t_0]$$

- On découpe ensuite l'intervalle $[t_0, t_1]$ en :

$$t_0 := s_0 < s_1 < \dots < s_r =: t_1$$

en fonction d'instant s_i où les deux cas suivants peuvent se produire :

- (1) $h_\alpha(s_{i-1}) = h_\alpha(s_i)$ et $\forall t \in [s_{i-1}, s_i] : h_\alpha(t) \geq h_\alpha(s_{i-1})$.
 - (2) h_α est strictement décroissante sur $[s_{i-1}, s_i]$ et $\forall t \leq s_{i-1} : h_\alpha(t) \geq h_\alpha(s_{i-1})$.
- On pose $s_{-1} := 0$ et $s_{r+1} := 1$ et l'on définit pour tout $i \in \llbracket 0, r+1 \rrbracket$:

$$\pi_i(t) := \pi(s_{i-1} + t(s_i - s_{i-1})) - \pi(s_{i-1})$$

Clairement par construction on a donc : $\pi = \pi_0 * \dots * \pi_{r+1}$.

On peut maintenant expliciter l'opérateur de Littelmann e_α :

- Si $m_\alpha > -1$: on pose $e_\alpha(\pi) := 0$.
- Si $m_\alpha \leq -1$: on pose $e_\alpha(\pi) := \pi_0 * \eta_1 * \dots * \eta_r * \pi_{r+1}$ avec :

$$\eta_i := \begin{cases} \pi_i & \text{si } h_\alpha \text{ se comporte dans } [s_{i-1}, s_i] \text{ comme en (1)} \\ s_\alpha(\pi_i) & \text{si } h_\alpha \text{ se comporte dans } [s_{i-1}, s_i] \text{ comme en (2)} \end{cases}$$

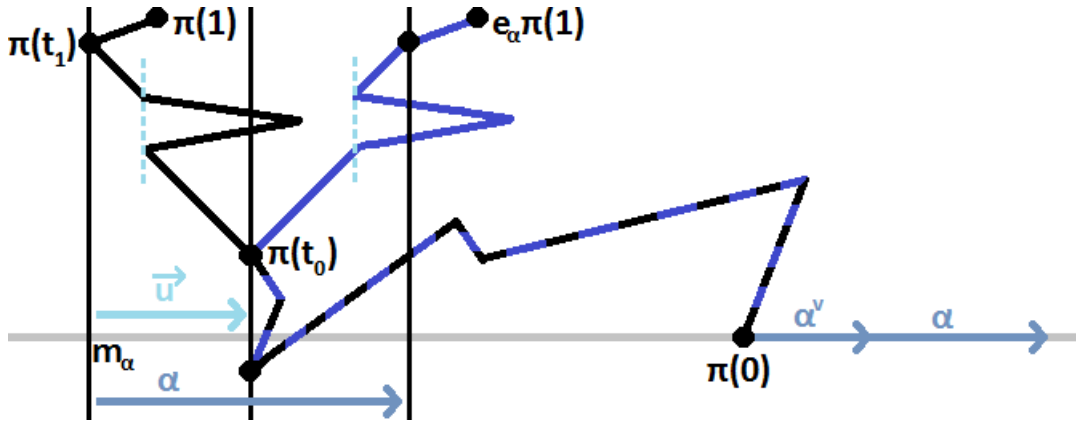


FIGURE 6 – Opérateur de Littelmann e_α

Sur la figure ci-dessus, le chemin en bleu foncé est le chemin $e_\alpha \pi$ obtenu en appliquant l'opérateur de Pitman sur un chemin π en noir.

Remarque 12. Par définition de t_0 le vecteur \vec{u} sur la figure satisfait :

$$\langle \vec{u}, \alpha^\vee \rangle = \langle \pi(t_0), \alpha^\vee \rangle - \langle \pi(t_1), \alpha^\vee \rangle = 1$$

Donc comme \vec{u} est colinéaire à α^\vee , il existe x tel que $\vec{u} = x\alpha^\vee$, l'égalité précédente donne donc : $x = \frac{1}{\langle \alpha^\vee, \alpha^\vee \rangle}$ et ainsi :

$$\vec{u} = \frac{\alpha^\vee}{\langle \alpha^\vee, \alpha^\vee \rangle} = \frac{1}{2}\alpha \quad (30)$$

Où la deuxième égalité est notamment obtenu par la relation (29).

La définition de l'opérateur de Littelmann f_α est similaire :

Définition 12 (Opérateur de Littelmann f_α).

- On considère $\pi \in \Pi$, l'opérateur de Littelmann f_α envoie un chemin π sur un autre chemin $f_\alpha(\pi)$ dont la construction est détaillée ci-dessous.
- On pose $t_0 := \max \{t \in [0, 1] \mid h_\alpha(t) = m_\alpha\}$ le dernier instant où le minimum de la fonction d'évaluation est atteint.
- On pose $t_1 \in [t_0, 1]$ tel que t_1 est le moment maximal dans $[t_0, 1]$ où l'on a :

$$h_\alpha(t) \geq m_\alpha + 1 \quad \forall t \in [t_1, 1]$$

- On découpe ensuite l'intervalle $[t_0, t_1]$ en :

$$t_0 := s_0 < s_1 < \dots < s_r := t_1$$

en fonction d'instant s_i où les deux cas suivants peuvent se produire :

- (1) $h_\alpha(s_{i-1}) = h_\alpha(s_i)$ et $\forall t \in [s_{i-1}, s_i] : h_\alpha(t) \geq h_\alpha(s_{i-1})$.
 - (2) h_α est strictement croissante sur $[s_{i-1}, s_i]$ et $\forall t \leq s_i : h_\alpha(t) \geq h_\alpha(s_i)$.
- On pose $s_{-1} := 0$ et $s_{r+1} := 1$ et l'on définit pour tout $i \in \llbracket 0, r+1 \rrbracket$:

$$\pi_i(t) := \pi(s_{i-1} + t(s_i - s_{i-1})) - \pi(s_{i-1})$$

Clairement par construction on a donc : $\pi = \pi_0 * \dots * \pi_{r+1}$.

On peut maintenant expliciter l'opérateur de Littelmann f_α :

- Si $h_\alpha - m_\alpha < 1$: on pose $f_\alpha(\pi) := 0$.
- Si $h_\alpha - m_\alpha \geq 1$: on pose $f_\alpha(\pi) := \pi_0 * \eta_1 * \dots * \eta_r * \pi_{r+1}$ avec :

$$\eta_i := \begin{cases} \pi_i & \text{si } h_\alpha \text{ se comporte dans } [s_{i-1}, s_i] \text{ comme en (1)} \\ s_\alpha(\pi_i) & \text{si } h_\alpha \text{ se comporte dans } [s_{i-1}, s_i] \text{ comme en (2)} \end{cases}$$

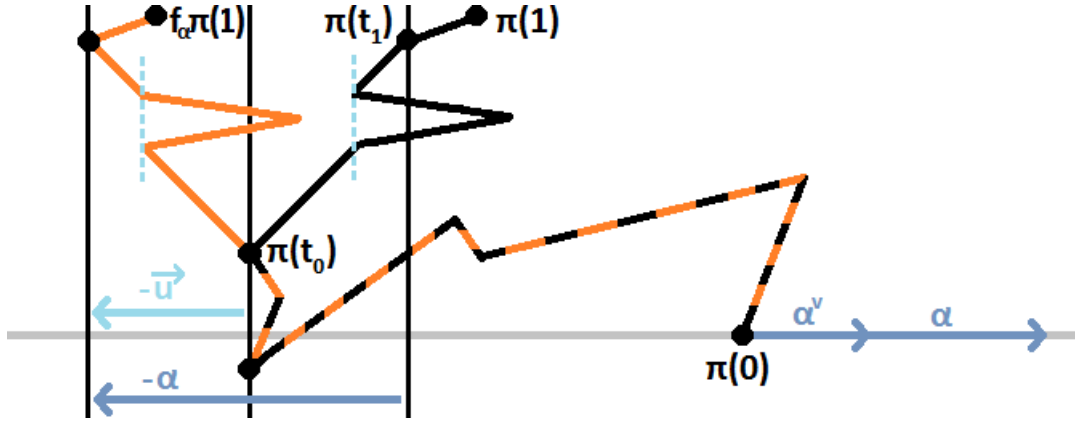


FIGURE 7 – Opérateur de Littelmann f_α

Sur la figure ci-dessus, le chemin en orange est le chemin $f_\alpha\pi$ obtenu en appliquant l'opérateur de Pitman sur un chemin π en noir.

Définition 13 (Chemin dual).

On définit π^* le chemin dual de π par :

$$\pi^*(t) := \pi(1-t) - \pi(1)$$

Lemme 7 (Propriétés élémentaires des opérateurs de Littelmann).

a) Si $\pi(0) = 0$, alors $\pi^{**}(t) = \pi(t)$.

b) On a : $(f_\alpha\pi)^* = e_\alpha\pi^*$ et $(e_\alpha\pi)^* = f_\alpha\pi^*$.

c) Si $e_\alpha\pi \neq 0$, alors $e_\alpha\pi(1) = \pi(1) + \alpha$ et si $f_\alpha\pi \neq 0$, alors $f_\alpha\pi(1) = \pi(1) - \alpha$.

d) Les opérateurs e_α et f_α sont inverses l'un de l'autre :

Si $e_\alpha\pi \neq 0$, alors $f_\alpha e_\alpha\pi = \pi$ et si $f_\alpha\pi \neq 0$, alors $e_\alpha f_\alpha\pi = \pi$.

e) On a les équivalences :

$$e_\alpha^n\pi = 0 \Leftrightarrow n > |m_\alpha| \quad \text{et} \quad f_\alpha^n\pi = 0 \Leftrightarrow n > (\langle \pi(1), \alpha^\vee \rangle - m_\alpha)$$

Démonstration. a) On a par définition du chemin dual : $\pi^{**}(t) := \pi^*(1-t) - \pi^*(1)$. Or, à nouveau par définition du chemin dual et par le fait que $\pi(0) = 0$:

$$\pi^*(1) = \pi(0) - \pi(1) = -\pi(1)$$

Puis encore par la définition :

$$\pi^{**}(t) = \pi(t) - \pi(1) + \pi(1) = \pi(t)$$

b) On a bien $(f_\alpha\pi)^* = e_\alpha\pi^*$ et $(e_\alpha\pi)^* = f_\alpha\pi^*$ par les définitions respectives des opérateurs de Littelmann.

c) Par construction de e_α , le point $e_\alpha\pi(1)$ est obtenu à partir du point $\pi(1)$ par translation de vecteur $2\vec{u}$ en résultant des symétries successives effectuées sur chaque partie du chemin. Donc en vertu de (30) :

$$e_\alpha\pi(1) = \pi(1) + 2\vec{u} = \pi(1) + \alpha$$

On procède de même pour $f_\alpha\pi(1)$ obtenue à partir de $\pi(1)$ par translation de vecteur $-2\vec{u}$.

d) On a bien les inverses l'un de l'autre par définition des opérateurs puisque chaque partie du chemin où il y a une symétrie pour un des opérateurs, va subir également une autre application de la même symétrie lorsqu'on applique le deuxième opérateur, et comme $s_\alpha^2 = id$, on retrouve bien le chemin initial. On peut s'en convaincre visuellement grâce aux figures 6 et 7.

e) On a $e_\alpha^n\pi = 0 \implies e_\alpha(e_\alpha^{n-1}\pi) = 0$. Or $e_\alpha\eta = 0 \Leftrightarrow m_\alpha(\eta) > -1$. Autrement dit, comme :

$$\min \{ \langle e_\alpha\pi(t), \alpha^\vee \rangle \mid t \in [0, 1] \} = m_\alpha + 1$$

On obtient par récurrence immédiate :

$$\min \{ \langle e_\alpha^n \pi(t), \alpha^\vee \rangle \mid t \in [0, 1] \} = m_\alpha + n \quad (31)$$

Donc si $n > |m_\alpha|$, on a : $m_\alpha(e_\alpha^{n-1}\pi) > -1$ et donc $e_\alpha^n \pi = 0$.

Réciproquement, si $e_\alpha^n \pi = e_\alpha(e_\alpha^{n-1}\pi) = 0$, alors $m_\alpha(e_\alpha^{n-1}\pi) > -1$ et donc nécessairement par (31) : $|m_\alpha| < n$.

Plus simplement, ce point peut être résumé en disant qu'à chaque itération de l'opérateur de Littelmann e_α on décale le minimum par translation de $\frac{1}{2}\alpha$, puis on conclut sur la définition de nullité donnée dans la définition des opérateurs.

On procède de la même manière pour f_α par translation successives de $-\frac{1}{2}\alpha$. \square

4.2 Relation entre transformation de Pitman et opérateurs de Littelmann

On assimile dans cette sous-section la forme linéaire $\alpha^\vee(\cdot)$ à la forme linéaire $\langle \cdot, \alpha^\vee \rangle$ de la sous-section précédente où $\alpha^\vee \in V$.

Par le point (iv) de la proposition 6, on peut définir des opérateurs de Littelmann généralisés par :

Définition 14 (Opérateur E_α^x).

Soit $\pi : [0, T] \rightarrow V$ un chemin continu tel que $\pi(0) = 0$ et $x \in \mathbb{R}$. On définit $E_\alpha^x \pi$ comme l'unique chemin (grâce à (14)) tel que :

- Si $-2\alpha^\vee(\pi(T)) + 2 \inf_{0 \leq t \leq T} \alpha^\vee(\pi(t)) \leq x \leq -2 \inf_{0 \leq t \leq T} \alpha^\vee(\pi(t))$:

$$E_\alpha^x \pi \text{ est l'unique chemin tel que : } \begin{cases} \mathcal{P}_\alpha E_\alpha^x \pi = \mathcal{P}_\alpha \pi & (E_1) \\ \alpha^\vee(E_\alpha^x \pi(T)) = \alpha^\vee(\pi(T)) + x & (E_2) \end{cases}$$

- Sinon $E_\alpha^x \pi = 0$.

Proposition 12. On a $E_\alpha^0 \pi = \pi$ et $E_\alpha^x E_\alpha^y \pi = E_\alpha^{x+y} \pi$ lorsque $E_\alpha^y \pi \neq 0$.

Démonstration. • On a bien évidemment : $\mathcal{P}_\alpha(\pi) = \mathcal{P}_\alpha(\pi)$ et $\alpha^\vee(\pi(T)) = \alpha^\vee(\pi(T)) + 0$ donc (E₁) et (E₂) sont vérifiées pour π et par unicité du chemin, on a donc : $E_\alpha^0 \pi = \pi$.

- On a bien :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_\alpha(E_\alpha^x E_\alpha^y \pi) &= \mathcal{P}_\alpha E_\alpha^y \pi \quad (\text{par (E}_1\text{) appliquée à } \pi' := E_\alpha^y \pi) \\ &= \mathcal{P}_\alpha \pi \quad (\text{à nouveau par (E}_1\text{)}) \end{aligned}$$

Et l'on a aussi :

$$\begin{aligned} \alpha^\vee(E_\alpha^x E_\alpha^y \pi(T)) &= \alpha^\vee(E_\alpha^y \pi(T)) + x \quad (\text{par (E}_2\text{) appliquée à } \pi' := E_\alpha^y \pi) \\ &= \alpha^\vee(\pi(T)) + x + y \quad (\text{à nouveau par (E}_2\text{)}) \end{aligned}$$

Donc par unicité dans la définition 14, on a donc : $E_\alpha^{x+y} = E_\alpha^x E_\alpha^y$. \square

On considère maintenant les opérateurs de Littelmann pour des chemins paramétrés sur $[0, T]$ et non plus $[0, 1]$. On peut alors relier les opérateurs de Littelmann aux opérateurs E_α^x :

Proposition 13. On a les relations : $E_\alpha^2 = e_\alpha$ et $E_\alpha^{-2} = f_\alpha$.

Démonstration. Montrons tout d'abord la première égalité en suivant le schéma des preuves précédentes : on vérifie que $e_\alpha \pi$ satisfait les équations (E₁) et (E₂) puis on conclut par unicité du chemin $E_\alpha^2 \pi$. On va distinguer les trois cas : $t \in [0, t_0]$, $t \in [t_0, t_1]$ et $t \in [t_1, T]$.

- Pour (E₁), on vérifie que $\forall t \in [0, T]$ on a : $\mathcal{P}_\alpha e_\alpha \pi(t) = \mathcal{P}_\alpha \pi(t)$.

◇ Si $t \in [0, t_0]$, on a $e_\alpha \pi(t) = \pi(t)$ par construction. Donc : $\mathcal{P}_\alpha e_\alpha \pi(t) = \mathcal{P}_\alpha \pi(t)$.

◇ Si $t \in [t_1, T]$, on a $e_\alpha \pi(t) = \pi(t) + \alpha$ par le point c) du lemme 7 et par construction.
De plus, on a par définition : $\mathcal{P}_\alpha e_\alpha \pi(t) := e_\alpha \pi(t) - \inf_{0 \leq s \leq t} \alpha^\vee(e_\alpha \pi(s)) \alpha$. Donc comme :

$$\inf_{0 \leq s \leq t} \alpha^\vee(e_\alpha \pi(s)) = \inf_{0 \leq s \leq t} \alpha^\vee(\pi(s) + \vec{u}) = \inf_{0 \leq s \leq t} \alpha^\vee(\pi(s)) + \frac{1}{2} \alpha^\vee(\alpha) = \inf_{0 \leq s \leq t} \alpha^\vee(\pi(s)) + 1$$

On obtient ainsi :

$$\mathcal{P}_\alpha e_\alpha \pi(t) = \pi(t) + \alpha - \inf_{0 \leq s \leq t} \alpha^\vee(\pi(s)) \alpha - \alpha = \mathcal{P}_\alpha \pi(t)$$

◇ Si $t \in [t_0, t_1]$, on a par construction :

$$\inf_{0 \leq s \leq t} \alpha^\vee(e_\alpha \pi(s)) = \alpha^\vee(\pi(t_0)) \quad (32)$$

En reprenant la construction : $t_0 := s_0 < s_1 < \dots < s_r := t_1$:

Si l'on a $t \in [s_{i-1}, s_i]$, on a par construction (1) et (2) :

$$\inf_{0 \leq s \leq t} \alpha^\vee(\pi(s)) = \alpha^\vee(\pi(s_{i-1})) \quad (33)$$

et l'on a aussi :

$$e_\alpha \pi(s_{i-1}) = \pi(s_{i-1}) + 2\alpha^\vee(\pi(t_0) - \pi(s_{i-1})) \vec{u} = \pi(s_{i-1}) + \alpha^\vee(\pi(t_0) - \pi(s_{i-1})) \alpha \quad (34)$$

★ Traitons tout d'abord le cas où $t \in [s_{i-1}, s_i]$ de telle sorte que $\eta_i = \pi_i$ (cas (1)).

Dans ce cas-ci, on a :

$$e_\alpha \pi(t) = e_\alpha \pi(s_{i-1}) + [\pi(t) - \pi(s_{i-1})] = \pi(t) + \alpha^\vee(\pi(t_0) - \pi(s_{i-1})) \alpha$$

où la deuxième égalité résulte de (34). Comme de plus on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_\alpha e_\alpha \pi(t) &:= e_\alpha \pi(t) - \inf_{0 \leq s \leq t} \alpha^\vee(e_\alpha \pi(s)) \alpha \\ &= \pi(t) + \alpha^\vee(\pi(t_0)) \alpha - \alpha^\vee(\pi(s_{i-1})) \alpha - \inf_{0 \leq s \leq t} \alpha^\vee(e_\alpha \pi(s)) \alpha \\ &= \pi(t) - \alpha^\vee(\pi(s_{i-1})) \alpha \quad (\text{par (32)}) \end{aligned}$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_\alpha \pi(t) &:= \pi(t) - \inf_{0 \leq s \leq t} \alpha^\vee(\pi(s)) \alpha \\ &= \pi(t) - \alpha^\vee(\pi(s_{i-1})) \alpha \quad (\text{par (33)}) \end{aligned}$$

D'où finalement dans ce cas-ci : $\mathcal{P}_\alpha e_\alpha \pi(t) = \mathcal{P}_\alpha \pi(t)$.

★ Traitons maintenant le cas où $t \in [s_{i-1}, s_i]$ de telle sorte que $\eta_i = s_\alpha(\pi_i)$ (cas (2)).

Dans ce cas-ci, on a :

$$\begin{aligned} e_\alpha \pi(t) &:= e_\alpha \pi(s_{i-1}) + s_\alpha[\pi(t) - \pi(s_{i-1})] \\ &= e_\alpha \pi(s_{i-1}) + \pi(t) - \pi(s_{i-1}) - \alpha^\vee(\pi(t) - \pi(s_{i-1})) \quad (\text{car } s_\alpha(v) := v - \alpha^\vee(v) \alpha) \\ &= \pi(t) \quad (\text{par (34)}) \end{aligned}$$

On en déduit que dans ce cas aussi : $\mathcal{P}_\alpha e_\alpha \pi(t) = \mathcal{P}_\alpha \pi(t)$.

Tous les cas ont été traités et dans tous les cas (E_1) est satisfaite par e_α .

• Pour (E_2) , on vérifie que l'on a : $\alpha^\vee(e_\alpha \pi(T)) = \alpha^\vee(\pi(T)) + 2$.

Cela résulte immédiatement du point c) du lemme des propriétés des opérateurs de Littelmann :

$$e_\alpha \pi(T) = \pi(T) + \alpha$$

Donc par composition :

$$\alpha^\vee(e_\alpha \pi(T)) = \alpha^\vee(\pi(T)) + \alpha^\vee(\alpha) = \alpha^\vee(\pi(T)) + 2$$

Donc (E_2) est satisfaite pour e_α . Ainsi, par unicité du chemin E_α^2 vérifiant (E_1) et (E_2) on a bien :

$$E_\alpha^2 = e_\alpha$$

Pour établir que $E_\alpha^{-2} = f_\alpha$ on procède de manière totalement analogue ou on remarque plus simplement que l'inverse de E_α^2 est E_α^{-2} par la proposition 12. Donc d'après le point d) du lemme 7, comme l'opérateur f_α est l'inverse de e_α , on en déduit que : $E_\alpha^{-2} = f_\alpha$. \square

On va maintenant s'attacher à établir une relation entre \mathcal{P}_α et directement l'opérateur de Littellmann e_α .

Définition 15 (Chemins intégraux ou chemins entiers).

On appelle chemin entier (ou parfois chemins intégraux³) un chemin $\pi : [0, T] \rightarrow V$ tel que : son point terminal $\pi(T)$ est dans le réseau de poids, i.e :

$$2 \frac{\langle \pi(T), \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \in \mathbb{Z}$$

et pour toute racine simple $\alpha : \inf_{0 \leq s \leq T} \alpha^\vee(\pi(s)) \in \mathbb{Z}$.

Proposition 14 (Relation entre transformation de Pitman et e_α).

Soit π un chemin entier. On note n_α le plus grand entier n tel que $e_\alpha^n \pi \neq 0$. Alors on a la relation :

$$\boxed{\mathcal{P}_\alpha \pi = e_\alpha^{n_\alpha} \pi}$$

Démonstration. • On a vu par la proposition 13 que : $e_\alpha = E_\alpha^2$ donc $e_\alpha^{n_\alpha} = \underbrace{E_\alpha^2 \cdots E_\alpha^2}_{n_\alpha \text{ termes}}$. Puis,

par définition de E_α^2 et (E_1) : $\mathcal{P}_\alpha E_\alpha^2 \pi = \mathcal{P}_\alpha \pi$ puis en itérant :

$$\mathcal{P}_\alpha \underbrace{E_\alpha^2 \cdots E_\alpha^2}_{n_\alpha \text{ termes}} \pi = \mathcal{P}_\alpha E_\alpha^2 \left(\underbrace{E_\alpha^2 \cdots E_\alpha^2}_{(n_\alpha-1) \text{ termes}} \pi \right) = \mathcal{P}_\alpha \underbrace{E_\alpha^2 \cdots E_\alpha^2}_{(n_\alpha-1) \text{ termes}} \pi$$

Et donc : $\mathcal{P}_\alpha e_\alpha^{n_\alpha} \pi = \mathcal{P}_\alpha \pi$. Par ailleurs, par idempotence : $\mathcal{P}_\alpha \mathcal{P}_\alpha \pi = \mathcal{P}_\alpha \pi$ et ainsi $\mathcal{P}_\alpha \pi$ et $e_\alpha^{n_\alpha} \pi$ vérifient tous les deux (E_1) .

• Par la proposition 14, on peut écrire : $e_\alpha^{n_\alpha} = E_\alpha^{2n_\alpha}$ et donc par (E_2) :

$$\alpha^\vee(e_\alpha^{n_\alpha} \pi(T)) = \alpha^\vee(E_\alpha^{2n_\alpha} \pi(T)) = \alpha^\vee(\pi(T)) + 2n_\alpha$$

Par ailleurs, par construction de l'opérateur de Littellmann et comme π est un chemin entier, on a :

$$- \inf_{0 \leq s \leq T} \alpha^\vee(\pi(s)) = n_\alpha \quad (35)$$

Ainsi, on obtient :

$$\begin{aligned} \alpha^\vee(\mathcal{P}_\alpha \pi(T)) &= \alpha^\vee \left(\pi(T) - \inf_{0 \leq s \leq T} \alpha^\vee(\pi(s)) \alpha \right) \\ &= \alpha^\vee(\pi(T)) - 2 \inf_{0 \leq s \leq T} \alpha^\vee(\pi(s)) \\ &= \alpha^\vee(\pi(T)) + 2n_\alpha \quad (\text{par (35)}) \end{aligned}$$

Donc par ce qui précède : $\alpha^\vee(\mathcal{P}_\alpha \pi(T)) = \alpha^\vee(e_\alpha^{n_\alpha} \pi(T)) = \alpha^\vee(\pi(T)) + 2n_\alpha$.

Donc $\mathcal{P}_\alpha \pi$ et $e_\alpha^{n_\alpha} \pi$ vérifient tous les deux (E_1) et (E_2) . Par unicité, on obtient donc :

$$\mathcal{P}_\alpha \pi = e_\alpha^{n_\alpha} \pi$$

\square

3. En anglais « integral path ».

5 Algèbres de Lie, Groupes de Lie et transformation de Pitman

5.1 Vocabulaire sur les algèbres de Lie, systèmes de racines et chambres de Weyl

Définition 16 (Algèbre de Lie).

- Une algèbre de Lie sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} est un \mathbb{K} -espace vectoriel \mathfrak{g} muni d'une application :

$$\begin{aligned} [\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{g} \\ (X, Y) &\longmapsto [X, Y] \end{aligned}$$

telle que :

- 1) $[\cdot, \cdot]$ est bilinéaire
- 2) $[Y, X] = -[X, Y]$ (antisymétrie)
- 3) $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ (identité de Jacobi)

- On dit que deux éléments $X, Y \in \mathfrak{g}$ d'une algèbre de Lie commutent si $[X, Y] = 0$.
- Une algèbre de Lie \mathfrak{g} est dite *commutative* (ou *abélienne*) si $\forall X, Y \in \mathfrak{g} : [X, Y] = 0$.

Exemple 5. Soit $\mathfrak{g} := \mathbb{R}^3$ muni du crochet de Lie donné par le produit vectoriel :

$$\begin{aligned} [\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{g} \\ (x, y) &\longmapsto [x, y] := x \wedge y \end{aligned}$$

Ainsi \mathfrak{g} est une algèbre de Lie.

Exemple 6. Soit $\mathfrak{g} := \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ muni du crochet de Lie donné par :

$$\begin{aligned} [\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{g} \\ (X, Y) &\longmapsto [X, Y] := XY - YX \end{aligned}$$

Ainsi \mathfrak{g} est une algèbre de Lie.

Définition 17 (Sous-algèbre de Lie et idéal).

- Une sous-algèbre de Lie d'une algèbre de Lie \mathfrak{g} est un sous-espace vectoriel \mathfrak{h} tel que :

$$\forall H_1, H_2 \in \mathfrak{h} : [H_1, H_2] \in \mathfrak{h}$$

- Un idéal d'une algèbre de Lie \mathfrak{g} est une sous-algèbre de Lie \mathfrak{h} telle que :

$$\forall X \in \mathfrak{g}, \forall H \in \mathfrak{h} : [X, H] \in \mathfrak{h}$$

Définition 18 (Algèbre de Lie simple).

- Une algèbre de Lie \mathfrak{g} est dite *irréductible* si ses seuls idéaux sont $\{0\}$ et \mathfrak{g} (i.e. pas d'idéal non trivial).
- Une algèbre de Lie \mathfrak{g} est dite *simple* si elle est irréductible et $\dim \mathfrak{g} \geq 2$.
- De manière équivalente, on peut dire qu'une algèbre de Lie est simple si elle est irréductible et non commutative car les seules algèbres de Lie qui sont irréductibles et commutatives sont de dimension 1.

Définition 19 (Algèbre de Lie semi-simple).

- Une algèbre de Lie est dite *semi-simple* si elle est somme directe⁴ (finie) d'algèbres de Lie simples.
- En particulier toute algèbre de Lie simple est semi-simple.

4. Si \mathfrak{g} est une algèbre de Lie et $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ deux sous-algèbres de Lie, on dit que \mathfrak{g} est somme directe de \mathfrak{g}_1 et \mathfrak{g}_2 si \mathfrak{g} est somme directe en tant qu'espace vectoriel et que $\forall X_1 \in \mathfrak{g}_1$ et $\forall X_2 \in \mathfrak{g}_2 : [X_1, X_2] = 0$.

Remarque 13. D'autres définitions équivalentes d'algèbre de Lie semi-simple peuvent être énoncées dans la littérature. On pourra consulter [18] pour ces équivalences.

Les algèbres de Lie semi-simples contenant donc les algèbres de Lie simples, forment une large famille partageant d'importantes propriétés de stabilité pour le crochet. Dans ce contexte, on peut définir la notion de *racine* lorsque sous de bonnes hypothèses sur une algèbre de Lie semi-simple \mathfrak{g} et une sous-algèbre \mathfrak{h} munies d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ on souhaite pouvoir écrire le crochet de Lie sous la forme :

$$\forall H \in \mathfrak{h} : [H, X] = \langle \alpha, H \rangle X \quad (36)$$

Un tel α garantissant l'existence d'un $X \in \mathfrak{g}$ non nul tel que l'on ait (36) est alors appelé racine.

On va d'abord ici définir les notions de racines et systèmes de racines indépendamment du contexte d'algèbre de Lie semi-simple dans lequel elles sont utilisées.

Définition 20 (Système de racines).

• Un *système de racines* $(E, \Phi, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace vectoriel réel de dimension finie E muni d'un produit scalaire noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et muni d'un ensemble fini Φ de vecteurs non nuls de E satisfaisant les propriétés suivantes :

- (1) Les vecteurs de Φ engendrent E
- (2) Si $\alpha, \beta \in \Phi$ et $c \in \mathbb{R}$, alors : $c\alpha \in \Phi \Leftrightarrow c = \pm 1$
- (3) Si $\alpha, \beta \in \Phi$ alors $s_\alpha(\beta) \in \Phi$ où $s_\alpha(\beta) := \beta - 2\frac{\langle \beta, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}\alpha$
- (4) $\forall \alpha, \beta \in \Phi$, on a : $2\frac{\langle \beta, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \in \mathbb{Z}$

- La dimension de E est appelée *rang* du système de racines.
- Les éléments de Φ sont appelés *racines*.

Remarque 14. • Comme $s_\alpha(\alpha) = -\alpha$ on a donc par (3) : $-\alpha \in \Phi$ pour toute racine α .

• Dans la théorie des espaces symétriques, on rencontre des systèmes satisfaisants (1), (3), (4) mais pas (2) : ils sont appelés *systèmes de racines non réduits*.

• Dans la théorie des groupes de Coxeter, on rencontre des systèmes satisfaisants (1), (2), (3) mais pas (4) : ils sont appelés *systèmes de racines non-cristallographique*.

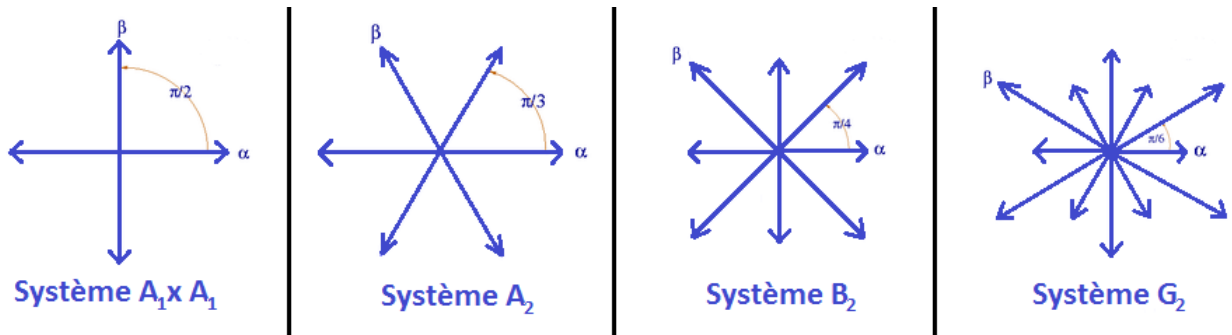


FIGURE 8 – Les quatre seuls possibilités pour un système de racines de rang 2

Définition 21 (Groupe de Weyl).

Soit $(E, \Phi, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un système de racines. Le groupe de Weyl W associée à Φ est le sous-groupe du groupe orthogonal (i.e. du groupe des applications linéaires de E dans lui-même conservant le produit scalaire) engendré par les réflexions s_α pour $\alpha \in \Phi$.

Remarque 15. Par hypothèse (3) d'un système de racines, chaque s_α envoie Φ sur Φ . On peut préciser que l'envoi est surjectif car si $\beta \in \Phi$, on peut écrire :

$$\beta = s_\alpha(s_\alpha(\beta)) \text{ car } s_\alpha^2 = id$$

Comme Φ est un ensemble fini, on en déduit que s_α envoie bijectivement Φ sur lui-même. Ainsi tout élément du groupe de Weyl envoie bijectivement Φ sur lui-même. Comme les racines engendrent l'espace vectoriel E , une application linéaire de E dans lui-même est entièrement déterminée par ses actions sur Φ (générateur par (1)).

On en déduit qu'un groupe de Weyl est toujours un sous-groupe fini de $\mathcal{O}(E)$ (groupe orthogonal) et peut être vu comme un sous-groupe du groupe des permutations de Φ .

Définition 22 (Base d'un système de racines et racines simples).

• Soit $(E, \Phi, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un système de racines. On appelle *base du système de racine*, un sous-ensemble Δ de Φ vérifiant :

(i) Δ est une base de E en tant qu'espace vectoriel.

(ii) $\forall \alpha \in \Phi$, α peut être exprimé comme combinaison linéaire à coefficients entiers des éléments de Δ tels que tous les coefficients sont tous positifs ou tous négatifs.

• Les racines dans une base Δ sont alors appelées *racines simples*.

Définition 23 (Chambre de Weyl).

• Les chambres de Weyl (ouvertes) d'un système de racines $(E, \Phi, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ sont les composantes connexes de :

$$E - \bigcup_{\alpha \in \Phi} H_\alpha$$

où H_α est l'hyperplan passant par l'origine et orthogonal à α au sens du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ associé au système de racines.

• Si $\Delta := \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ est une base de Φ , alors la **chambre de Weyl fondamentale** de E (relativement à Δ) est l'ensemble des $v \in E$ tels que $\langle \alpha_j, v \rangle > 0$ pour tout $j \in \llbracket 1, r \rrbracket$.

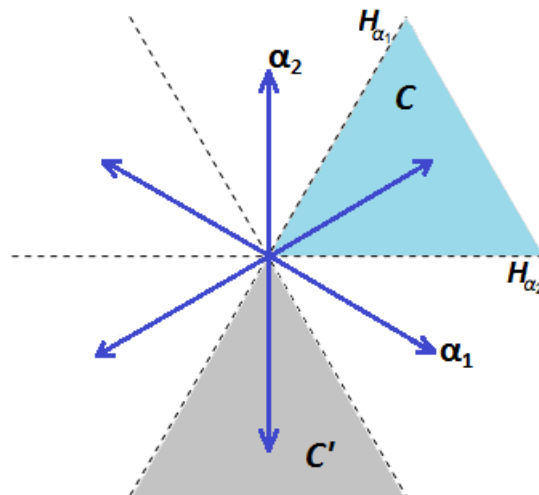


FIGURE 9 – Chambres de Weyl pour un système de type A_2 ayant pour base $\{\alpha_1, \alpha_2\}$.

Sur la figure ci-dessus, la région bleue \mathcal{C} est la chambre de Weyl fondamentale relativement à la base $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ et donc délimitée par les hyperplans H_{α_1} et H_{α_2} .

La région en gris \mathcal{C}' est une autre chambre de Weyl qui n'est pas fondamentale.

Remarque 16. • Comme les éléments d'une base Δ forment une base de E en tant qu'espace vectoriel, la chambre (ouverte) de Weyl fondamentale est convexe, connexe et non vide.

• Ainsi, la seule possibilité pour sortir d'une chambre de Weyl fondamentale est de passer par un point v tel que $\langle \alpha_j, h \rangle = 0$.

• La chambre de Weyl fondamentale est évidemment une chambre de Weyl.

• Soit $w \in W$ élément du groupe de Weyl, donc w envoie Φ sur Φ bijectivement par la remarque 15. Donc w envoie (par orthogonalité) l'ensemble des hyperplans orthogonaux aux racines sur lui-même bijectivement. On en déduit donc que si \mathcal{C} est une chambre de Weyl alors $w \cdot \mathcal{C}$ est encore une chambre de Weyl.

Définition 24 (Racines positives ou négatives).

• Une racine est dite *positive* si l'on peut l'écrire relativement à une base comme une combinaison linéaire à coefficients tous positifs des racines de la base.

On note généralement $\Phi^+ \subset \Phi$ l'ensemble des racines positives.

• Une racine est dite *négative* si l'on peut l'écrire relativement à une base comme une combinaison linéaire à coefficients tous négatifs des racines de la base.

On note généralement $\Phi^- \subset \Phi$ l'ensemble des racines négatives.

Proposition 15 (Action du groupe de Weyl sur les chambres).

• Le groupe de Weyl agit transitivement sur l'ensemble des chambres (ouvertes) de Weyl, i.e :

$$\forall \mathcal{C}, \mathcal{C}' \text{ chambres de Weyl (ouvertes), } \exists w \in W \text{ tel que } w \cdot \mathcal{C} = \mathcal{C}'$$

• Si Δ est une base, alors W est généré par les réflexions s_α pour $\alpha \in \Delta$.

• Soit \mathcal{C} une chambre de Weyl et soient $h, h' \in \overline{\mathcal{C}}$. Si il existe $w \in W$ tel que $w \cdot h = h'$ alors $h = h'$. Autrement dit : deux éléments distincts de $\overline{\mathcal{C}}$ ne peuvent être dans la même orbite sous l'action de W .

• Le groupe de Weyl agit librement sur l'ensemble des chambres de Weyl, i.e :

$$\text{Si } h \in \mathcal{C}, \text{ alors : } w \cdot h = h \implies w = id$$

• Si l'on se donne deux bases Δ_1 et Δ_2 de Φ , alors il existe un unique $w \in W$ tel que :

$$w \cdot \Delta_1 = \Delta_2$$

• Soit \mathcal{C} une chambre de Weyl et $h \in E$. Alors il existe exactement un unique point dans la W -orbite de h qui est dans $\overline{\mathcal{C}}$.

Démonstration. On pourra trouver la démonstration de chacun des points ci-dessus dans les propositions 8.23 à 8.29 dans [18]. \square

Définition 25 (Système de racines dual).

• Soit Φ un système de racines dans E , on appelle *coracine* d'une racine α l'élément :

$$\alpha^\vee := 2 \frac{\alpha}{\langle \alpha, \alpha \rangle}$$

• L'ensemble des coracines forment également un système de racines noté Φ^\vee de E que l'on nomme *système de racines dual*.

• Par définition $\alpha^{\vee\vee} = \alpha$ et on peut vérifier que Φ et Φ^\vee ont même groupe de Weyl.

Remarque 17. On retrouve donc l'hypothèse (29) faite en début de section 4 de ce mémoire.

Définition 26 (Éléments entiers et réseau de poids).

• Un vecteur $x \in E$ est dit *entier* (relativement au système Φ) si :

$$\forall \alpha \in \Phi : 2 \frac{\langle x, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \in \mathbb{Z}$$

• L'ensemble des éléments entiers associés à un système de racines est appelé *réseau de poids*⁵. Ce terme provient de la théorie de représentation des algèbres de Lie.

5. En anglais « weight lattice ».

Remarque 18. • La définition de système de racines implique que toute racine est elle-même un élément entier.

• Donc, toute combinaison linéaire de racines est aussi un élément entier (notons que la réciproque n'est toutefois pas toujours satisfaite).

On définit l'endomorphisme adjoint ci-dessous, ce dernier va nous servir notamment à définir le concept de sous-algèbre de Cartan.

Définition 27 (Endomorphisme adjoint).

Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie et soit $x \in \mathfrak{g}$, on définit l'endomorphisme *adjoint* par :

$$\begin{aligned} ad_x : \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{g} \\ y &\longmapsto ad_x(y) := [x, y] \end{aligned}$$

On donne ci-dessous une définition de la sous-algèbre de Cartan d'une algèbre de Lie dans le contexte où l'algèbre de Lie est semi-simple et de dimension finie.

Définition 28 (Sous-algèbre de Cartan d'une algèbre de Lie semi-simple).

Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie semi-simple, on appelle *sous-algèbre de Cartan* de \mathfrak{g} une sous-algèbre de Lie \mathfrak{h} de \mathfrak{g} telle que :

- (1) \mathfrak{h} est abélienne, i.e : $\forall x, y \in \mathfrak{h} [x, y] = 0$
- (2) Si $\forall x \in \mathfrak{h} : [x, y] \in \mathfrak{h}$, alors $y \in \mathfrak{h}$
- (3) $\forall x \in \mathfrak{h} : ad_x$ est diagonalisable

Remarque 19. • On admet l'existence d'une sous-algèbre de Cartan pour toute algèbre de Lie semi-simple : cela est prouvé dans la proposition 7.11 page 175 de [18].

• La sous-algèbre de Cartan d'une algèbre de Lie semi-simple est unique dans le sens où : s'il existe deux sous-algèbres de Cartan, alors il existe un automorphisme (de Lie) entre les deux. Cela est également prouvé dans [18].

Définition 29 (Rang d'une algèbre de Lie).

On appelle *rang* d'une algèbre de Lie \mathfrak{g} la dimension de sa sous-algèbre de Cartan.

On peut munir toute algèbre de Lie d'un produit scalaire par sa forme de Killing :

Définition 30 (Forme de Killing).

• La forme de Killing d'une algèbre de Lie \mathfrak{g} est le produit scalaire :

$$\forall x, y \in \mathfrak{g} : \langle x, y \rangle := B(x, y) := Tr(ad_x \circ ad_y)$$

• On peut montrer qu'une algèbre de Lie est semi-simple si et seulement si sa forme de Killing est non dégénérée.

On peut maintenant définir le système de racines naturel pour une algèbre de Lie semi-simple dans la définition suivante. En particulier il s'agit ainsi de l'approfondissement de la notion introductive aperçue en (36).

Définition 31 (Système de racines d'une algèbre de Lie semi-simple).

Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie semi-simple et soit \mathfrak{h} sa sous-algèbre de Cartan.

• Un vecteur non nul $\alpha \in \mathfrak{h}$ est appelé *racine* (pour \mathfrak{g} relativement à \mathfrak{h}) si il existe $x \in \mathfrak{g}$ non nul tel que :

$$\forall H \in \mathfrak{h} : [H, x] = \langle \alpha, H \rangle x$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire obtenu par la forme de Killing sur \mathfrak{g} .

• On note Φ l'ensemble des racines de \mathfrak{g} relativement à sa sous-algèbre de Cartan \mathfrak{h} qui forme ainsi un système de racines au sens de la définition 20.

Définition 32 (Espace radiciel).

Soit $\alpha \in \Phi$, on définit l'espace radiciel de α par :

$$\mathfrak{g}_\alpha := \{x \in \mathfrak{g} \mid \forall H \in \mathfrak{h}, [H, x] = \langle \alpha, H \rangle x\}$$

Remarque 20. Par définition, il vient immédiatement : $\mathfrak{g}_\alpha \neq \{0\}$ et $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$.

Proposition 16 (Décomposition en espaces radiciels).

On note Φ le système de racines de \mathfrak{g} relativement à sa sous-algèbre de Cartan \mathfrak{h} . Alors \mathfrak{g} peut être décomposée (en tant que \mathfrak{h} -module, ou plus simplement en tant qu'espace vectoriel) :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha$$

Autrement dit, tout élément de \mathfrak{g} peut s'écrire de manière unique comme une somme d'un élément de \mathfrak{h} et d'un élément de chaque \mathfrak{g}_α .

Démonstration. On pourra consulter la section 7.3 et plus particulièrement la page 177 de la référence [18]. \square

Proposition 17. • On a la propriété pour tout $\alpha, \beta \in \Phi$:

$$[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subseteq \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$$

avec égalité si $-\alpha = \beta$.

• De plus, $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$ et en particulier :

$$\dim \mathfrak{g} = \dim \mathfrak{h} + \#\Phi$$

Démonstration. On trouvera aussi une preuve dans [18]. \square

Définition 33 (Matrice de Cartan).

Etant donné un système de racines simples $\Phi := \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ (où r est donc le rang du système de racines), on définit la *matrice de Cartan* du système par $A := (a_{i,j})_{i,j \in \llbracket 1, r \rrbracket}$ où :

$$\forall i, j \in \llbracket 1, r \rrbracket : a_{i,j} := 2 \frac{\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_j, \alpha_j \rangle}$$

Remarque 21. L'intérêt de la matrice de Cartan est que sa seule donnée est suffisante pour reconstruire l'ensemble de tout le système de racines.

C'est donc un outil très pratique pour « coder » l'ensemble des informations d'un système de racines et donc aussi l'empreinte d'une algèbre de Lie semi-simple par ce qui précède. En allant plus loin, on peut représenter « graphiquement » une matrice de Cartan par un diagramme de Dynkin. [Ces diagrammes établissent ensuite un outil puissant de classification des algèbres de Lie semi-simple](#)

Définition 34 (Générateurs d'une algèbre de Lie).

Des éléments d'une algèbre de Lie \mathfrak{g} sont dits *générateurs* si la plus petite sous-algèbre de Lie contenant ces éléments est \mathfrak{g} elle-même.

Remarque 22. La taille d'un ensemble générateur minimal d'une algèbre de Lie est donc toujours inférieure ou égale à sa dimension.

• Par la théorie générale des systèmes de racines, on peut construire une base $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ de \mathfrak{h} telle que chaque racine est une combinaison linéaire à coefficients entiers des $(\alpha_i)_{i \in \llbracket 1, r \rrbracket}$ de même signe. On pose :

$$\begin{cases} e_i := e_{\alpha_i} \in \mathfrak{g}_{\alpha_i} \\ f_i := f_{\alpha_i} \in \mathfrak{g}_{-\alpha_i} \\ h_i := h_{\alpha_i} \in \mathfrak{h} \end{cases}$$

Les $3r$ éléments e_i, f_i et h_i sont appelés **générateurs de Chevalley**. On les choisit tels que : e_i, f_i et h_i génèrent \mathfrak{g} comme une algèbre de Lie et tels qu'ils vérifient les relations suivantes (appelées *relations de Chevalley – Serre*), où l'on pose $a_{i,j} := \langle h_i, \alpha_j \rangle$:

- $[h_i, h_j] = 0$
- $[e_i, f_i] = h_i$ et $[e_i, f_j] = 0$ si $i \neq j$
- $[h_i, e_j] = a_{i,j}e_j$ et $[h_i, f_j] = -a_{i,j}f_j$
- $ad(e_i)^{1-a_{i,j}}(e_j) = 0$ si $i \neq j$
- $ad(f_i)^{1-a_{i,j}}(f_j) = 0$ si $i \neq j$

• On a également le sens réciproque : l'algèbre de Lie générée par les générateurs e_i, f_i, h_i satisfaisant les relations de Chevalley-Serre, est une algèbre de Lie semi-simple de dimension finie possédant le système de racine précédent. Cela est retransmis dans le théorème de Serre suivant. **En particulier, deux algèbres de Lie semi-simples sont isomorphes si elles ont le même système de racines.**

Théorème 8 (Serre).

Soit Φ un système de racines⁶ dans un espace euclidien E muni d'un produit scalaire (\cdot, \cdot) .

On pose le produit scalaire, pour tout $\alpha, \beta \in E$: $\langle \beta, \alpha \rangle := 2 \frac{(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)}$.

Soit $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ une base de Φ . Alors, l'algèbre de Lie définie par :

- (1) Les $3r$ générateurs e_i, f_i, h_i
- (2) Les relations de Chevalley-Serre

est une algèbre de Lie semi-simple de dimension finie dont une sous-algèbre de Cartan est générée par les h_i et de système de racines Φ .

Démonstration. On pourra consulter [19]. □

En notant $A := (\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle)_{i,j \in \llbracket 1, r \rrbracket}$ la matrice de Cartan, on en déduit par le théorème qu'il existe une unique (à isomorphisme près) algèbre de Lie semi-simple associée à A . On résume cela en disant que : toute matrice de Cartan détermine une unique algèbre de Lie semi-simple (complexe). Si $A := (a_{i,j})_{i,j \in \llbracket 1, r \rrbracket}$ est une matrice de Cartan, alors à isomorphisme près il existe une unique algèbre de Lie semi-simple (complexe) \mathfrak{g} (dont la matrice de Cartan est équivalente à A) telle que \mathfrak{g} est défini par l'ensemble des $3r$ générateurs e_i, f_i, h_i satisfaisant les relations de Chevalley-Serre.

On rappelle ci-dessous la définition de groupe de Lie ainsi que quelques définitions et propriétés essentielles.

Définition 35 (Groupe de Lie).

Un groupe de Lie est un ensemble G muni de deux structures compatibles :

- Une structure de groupe donnée par une loi de composition interne :

$$\begin{aligned} m : G \times G &\longrightarrow G \\ (x, y) &\longmapsto x \cdot y \end{aligned}$$

- Une structure de variété différentielle (réelle ou complexe) telle que m et i sont lisses, où :

$$\begin{aligned} i : G &\longrightarrow G \\ x &\longmapsto x^{-1} \end{aligned}$$

Exemple 7. Tout groupe discret (dénombrable) est un groupe de Lie. Les groupes suivants sont des groupes de Lie : $(\mathbb{R}, +)$, (\mathbb{R}^*, \times) , (\mathbb{C}^*, \times) . Les groupes généraux linéaires sont aussi des groupes de Lie.

6. Au sens de la définition 20.

Définition 36 (Groupe de Lie linéaire).

Un groupe de Lie linéaire G est défini comme un sous-groupe fermé de $GL_n(\mathbb{R})$.

Exemple 8. Les groupes : $SL_n(\mathbb{K})$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} ; $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$; $U_n(\mathbb{R})$ ou encore $GL_n(\mathbb{H})$ où \mathbb{H} est le corps des quaternions, sont des groupes de Lie linéaires.

Définition 37 (Construction de l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie).

On définit l'application intérieure d'un groupe de Lie G par :

$$\begin{aligned} \text{Int}_x : G &\longrightarrow G \\ y &\longmapsto xyx^{-1} \end{aligned}$$

On pose ensuite la différentielle en l'élément neutre de cette application intérieure :

$$\begin{aligned} \text{Ad}_x := d_e(\text{Int}_x) : T_e G &\longrightarrow T_e G \\ y &\longmapsto d_e(\text{Int}_x)(y) \end{aligned}$$

Où $T_e G$ est l'espace tangent à G en l'élément neutre e . On appelle ensuite algèbre de Lie du groupe de Lie G , l'espace tangent $T_e G$ muni du crochet :

$$\forall x, y \in T_e G : [x, y] := \text{Ad}_x(y)$$

On peut vérifier alors que le crochet est bien un crochet de Lie et qu'on obtient bien une structure d'algèbre de Lie.

Plus simplement, pour un groupe de Lie linéaire on peut exprimer son algèbre de Lie associée :

Définition 38. Soit G un groupe de Lie linéaire. On lui associe son algèbre de Lie :

$$\mathfrak{g} := \text{Lie}(G) := \{X \in M_n(\mathbb{R}) \mid \forall t \in \mathbb{R} : \exp(tX) \in G\}$$

munie du crochet de Lie : $[X, Y] := XY - YX$.

Définition 39 (Tore maximal).

- Soit G un groupe et T un sous-groupe de G , on dit que T est un *tore* de G si T est isomorphe à $(\mathbb{S}^1)^k$ pour un entier k .
- Un sous-groupe T de G est un *tore maximal* si c'est un tore de G et qu'il n'est pas contenu dans un autre tore de G .

Exemple 9. Si $G := SU_n$ on peut considérer le tore de dimension $n - 1$:

$$T := \left\{ \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & e^{i\theta_{n-1}} & \\ & & & e^{-i(\theta_1 + \dots + \theta_{n-1})} \end{pmatrix} \mid \theta_i \in \mathbb{R} \right\}$$

Si T est contenu dans un autre tore $S \subset SU_n$, alors tout élément $s \in S$ commuterait avec tout élément $t \in T$. Or en prenant pour $t \in T$ que des valeurs propres distinctes, s aurait donc aussi que des valeurs propres distinctes car :

$$ts(x) = st(x) = \lambda s(x) \text{ où } t(x) = \lambda x$$

Donc $s(x)$ serait aussi dans le même espace propre de λ pour t . Donc s serait diagonal et donc $s \in T$: Ainsi T est un tore maximal.

La proposition suivante fait le lien entre tore maximal pour un groupe de Lie et sous-algèbre de Cartan pour une algèbre de Lie. On pourra notamment en trouver une preuve dans [18].

Proposition 18 (Relation entre tore maximal et sous-algèbre de Cartan).

- Si T est un tore maximal dans un groupe de Lie G d'algèbre de Lie \mathfrak{g} , alors l'algèbre de Lie \mathfrak{h} de T est une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g} .
- Réciproquement, si \mathfrak{h} est une sous-algèbre de Cartan d'une algèbre de Lie \mathfrak{g} , alors le sous-groupe de Lie T du groupe de Lie G associé à \mathfrak{g} et possédant une structure d'algèbre de Lie \mathfrak{h} est un tore maximal de G .

Définition 40 (Groupe de Weyl d'un tore maximal).

- Si T est un tore maximal dans G groupe de Lie, alors on définit le *normalisateur* de T noté $N(T)$ par :

$$N(T) := \{x \in G \mid xTx^{-1} = T\}$$

- Le groupe quotient $W := N(T)/T$ est défini comme le groupe de Weyl de T .

Proposition 19 (Décomposition de Cartan).

On suppose donnée une sous-algèbre de Cartan \mathfrak{h} d'une algèbre de Lie \mathfrak{g} associée à un groupe de Lie G . On peut alors écrire la décomposition suivante :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$$

où :

- \mathfrak{n}_- est l'algèbre de Lie générée par les f_i , i.e : \mathfrak{n}_- est la somme directe des espaces radiciels correspondants aux racines négatives.
- \mathfrak{n}_+ est l'algèbre de Lie générée par les e_i , i.e : \mathfrak{n}_+ est la somme directe des espaces radiciels correspondants aux racines positives.

Définition 41 (Radicaux unipotents et sous-groupes de Borel).

Soit G un groupe de Lie ayant pour algèbre de Lie \mathfrak{g} . Soit H un tore maximal de G .

- On définit un *radical unipotent positif* que l'on note N_+ comme un sous-groupe de G ayant pour algèbre de Lie \mathfrak{n}_+
- On définit un *radical unipotent négatif* que l'on note N_- comme un sous-groupe de G ayant pour algèbre de Lie \mathfrak{n}_-
- On définit un *sous-groupe de Borel positif* de G par : $B_+ := HN_+$
- On définit un *sous-groupe de Borel négatif* de G par : $B_- := HN_-$

Définition 42 (Décomposition de Gauss).

Soit G un groupe de Lie ayant pour algèbre de Lie \mathfrak{g} . Soit H un tore maximal de G . On dira qu'un élément $x \in G$ admet une *décomposition de Gauss* si l'on peut l'écrire :

$$x = [x]_- [x]_0 [x]_+$$

avec $[x]_- \in N_-$, $[x]_0 \in H$ et $[x]_+ \in N_+$ où N_- et N_+ sont les radicaux unipotents associés aux sous-groupes de Borel de G relativement au tore maximal H .

5.2 Module de Littelmann et chemin dominant

On étudie dans cette sous-section, grâce au vocabulaire de la section précédente, le module de Littelmann et les chemins dominants.

Définition 43 (Chemin dominant).

Soit W un groupe de Weyl fini associé à un réseau de poids dans V . Soit $\bar{\mathcal{C}}$ la chambre de Weyl fondamentale $\bar{\mathcal{C}} := \bigcap_{s \in S} H_s$ où $H_s := \{v \in V \mid \alpha_s^\vee(v) \geq 0\}$ associée au système de racines.

On appelle *chemin dominant*, tout chemin à valeurs dans $\bar{\mathcal{C}}$.

Définition 44 (Module de Littelmann).

Soit π un chemin dominant, l'ensemble $B\pi$ des chemins (non nuls) obtenus par application sur π d'un produit d'opérateurs de Littelmann est appelé *module de Littelmann*.

Remarque 23. Grâce au lemme 7 sur les propriétés élémentaires des opérateurs de Littelmann, on peut réécrire le module de Littelmann plus simplement généré par :

$$B\pi = \langle \pi, f_\alpha \pi, \dots, f_\alpha^{n_\alpha} \pi \mid \alpha \text{ racine} \rangle$$

où n_α est le plus grand entier tel que $f_\alpha^{n_\alpha} \neq 0$.

Grâce à la section 4.2 et particulièrement de la définition 15 des chemins entiers, on peut démontrer la proposition suivante :

Proposition 20. *Soit π un chemin dominant et entier, alors on a l'équivalence :*

$$\eta \in B\pi \Leftrightarrow \begin{cases} \eta \text{ est un chemin entier} \\ \text{et l'on a : } \pi = \mathcal{P}_{w_0} \eta \end{cases}$$

où w_0 est le plus grand élément dans le groupe de Weyl comme défini dans le corollaire 1.

Démonstration. Soit η un chemin et x tel que $E_\alpha^x \eta \neq 0$. Par définition (E₁) des opérateurs de Littelmann généralisés (section 4.2 définition 14) :

$$\mathcal{P}_\alpha E_\alpha^x \eta = \mathcal{P}_\alpha \eta$$

D'après le corollaire 1 (section 3.3) on a la relation pour tout $w \in W$:

$$\mathcal{P}_{w_0} \mathcal{P}_w = \mathcal{P}_{w_0} \tag{37}$$

Montrons que $\{\eta \text{ chemin} \mid \mathcal{P}_{w_0} \eta = \pi\}$ est stable par les opérateurs de Littelmann généralisés, soit η tel que $\mathcal{P}_{w_0} \eta = \pi$, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{w_0} E_\alpha^x \eta &= \mathcal{P}_{w_0} \mathcal{P}_\alpha E_\alpha^x \eta \quad (\text{par (37)}) \\ &= \mathcal{P}_{w_0} \mathcal{P}_\alpha \eta \quad (\text{par (E}_1\text{)}) \\ &= \mathcal{P}_{w_0} \eta \quad (\text{par (37)}) \\ &= \pi \end{aligned}$$

On a donc bien : si $\eta \in B\pi$, alors : $\eta = E_\alpha^x \pi$. Montrons maintenant l'équivalence demandée. (\Rightarrow) Par ce qui précède, on a donc : $E_\alpha^{-x} \eta = \pi$ donc comme $\mathcal{P}_{w_0} E_\alpha^{-x} \eta = \mathcal{P}_{w_0} \pi$ on a bien :

$$\mathcal{P}_{w_0} \eta = \pi$$

De plus, si π est un chemin entier alors $E_\alpha^x \pi$ aussi et l'on a bien le sens direct.

(\Leftarrow) Réciproquement, si η est un chemin entier tel que $\pi = \mathcal{P}_{w_0} \eta$, en notant $w_0 = s_1 \cdots s_n$ une décomposition réduite : alors la suite $\eta; \mathcal{P}_{s_n} \eta; \dots; (\mathcal{P}_{s_1} \cdots \mathcal{P}_{s_n}) \eta$ est obtenue par applications successives d'opérateurs de Littelmann car on a montré en proposition 14 que si π est un chemin entier alors :

$$\mathcal{P}_\alpha \pi = e_\alpha^{n_\alpha}$$

Donc il existe $x_n \in \mathbb{R}$ tel que $\mathcal{P}_{s_n} \eta = E_{s_n}^{x_n} \eta$ puis ainsi de suite :

$$(\mathcal{P}_{s_1} \cdots \mathcal{P}_{s_n}) \eta = E_{s_1}^{x_1} \cdots E_{s_n}^{x_n} \eta \in B\pi$$

Donc :

$$\mathcal{P}_{w_0} \eta = \pi \in B\pi$$

on peut ainsi écrire :

$$E_{s_1}^{x_1} \cdots E_{s_n}^{x_n} \eta = \pi$$

Et donc finalement la conclusion :

$$\eta = E_{s_n}^{-x_n} \cdots E_{s_1}^{-x_1} \pi \in B\pi$$

□

On veut maintenant étudier l'ensemble des chemins η tels que $\mathcal{P}_w\eta = \pi$ où π est un chemin dominant donné.

Soit $w = s_1 \cdots s_q$ une décomposition réduite. Soit η un chemin tel que $\eta(0) = 0$ et $\pi := \mathcal{P}_w\eta$ est un chemin dominant. On pose :

$$\eta_0 := \pi; \eta_q := \eta \text{ et } \forall j \in \llbracket 1, q-1 \rrbracket : \eta_j := \mathcal{P}_{s_{j+1}} \cdots \mathcal{P}_{s_q} \eta_q$$

Par la formule d'inversion (14), il vient : pour tout $j \in \llbracket 1, q-1 \rrbracket$, le chemin η_j est entièrement déterminé parmi les chemins γ qui vérifient $\mathcal{P}_{s_j}\gamma = \eta_{j-1}$ par la donnée de :

$$x_j := - \inf_{0 \leq t \leq T} \alpha_{s_j}^\vee(\eta_j(t)) \in [0, \alpha_{s_j}^\vee(\eta_{j-1}(T))]$$

Il s'en suit que le chemin $\eta := \eta_q$ est entièrement déterminé parmi les chemins γ qui vérifient $\mathcal{P}_{w_0}\gamma = \pi$ par la donnée de la suite x_1, \dots, x_q où l'on a pour tout $1 \leq j \leq q$:

$$\boxed{0 \leq x_j \leq \alpha_{s_j}^\vee(\eta_{j-1}(T))}$$

On cherche à exprimer ces inégalités en fonction du chemin π et des racines α_{s_l} pour $l \leq j-1$.

Par construction, on a :

$$\eta_{j-1} := \mathcal{P}_{s_j} \cdots \mathcal{P}_{s_q} \eta_q = \mathcal{P}_{s_j} \eta_j$$

On obtient donc :

$$\eta_{j-1}(T) = \mathcal{P}_{s_j} \eta_j(T) = \eta_j(T) - \inf_{0 \leq s \leq T} \alpha_{s_j}^\vee(\eta_j(s)) \alpha_{s_j} = \eta_j(T) + x_j \alpha_{s_j}$$

En itérant cette dernière égalité en notant que $\pi(T) = \eta_0(T)$, on obtient :

$$\pi(T) = \eta_0(T) = \eta_j(T) + \sum_{l=1}^j x_l \alpha_{s_l}$$

On peut donc écrire :

$$\eta_j(T) = \pi(T) - \sum_{l=1}^j x_l \alpha_{s_l} \tag{38}$$

Or comme :

$$\eta_{j-1}(T) = \eta_j(T) + x_j \alpha_{s_j}$$

On obtient :

$$\alpha_{s_j}^\vee(\eta_{j-1}(T)) = \alpha_{s_j}^\vee(\eta_j(T)) + x_j \alpha_{s_j}^\vee(\alpha_{s_j})$$

Puis grâce à (38), il vient :

$$\alpha_{s_j}^\vee(\eta_{j-1}(T)) = \alpha_{s_j}^\vee(\pi(T)) - \sum_{l=1}^{j-1} x_l \alpha_{s_j}^\vee(\alpha_{s_l})$$

Donc on obtient finalement :

$$\boxed{0 \leq x \leq \alpha_{s_j}^\vee(\pi(T)) - \sum_{l=1}^{j-1} x_l \alpha_{s_j}^\vee(\alpha_{s_l})}$$

Ainsi, on peut conclure que l'ensemble des chemins η tels que $\mathcal{P}_w\eta = \pi$ (où π est un chemin dominant) peut être paramétré par un sous-ensemble du polytope convexe :

$$K_\pi := \left\{ (x_1, \dots, x_q) \in \mathbb{R}^q \mid \forall j \in \llbracket 1, q \rrbracket : 0 \leq x \leq \alpha_{s_j}^\vee(\pi(T)) - \sum_{l=1}^{j-1} x_l \alpha_{s_j}^\vee(\alpha_{s_l}) \right\}$$

Le chemin η correspondant alors à la donnée de (x_1, \dots, x_q) se reconstruit par les équations :

$$\eta_{j-1}(T) = \eta_j(T) + x_j \alpha_{s_j} \text{ où } \eta_j := \mathcal{P}_{s_{j+1}} \cdots \mathcal{P}_{s_q} \eta$$

Remarque 24. Dans le cas des groupes de Weyl, on peut montrer que le sous-ensemble de K_π correspondant aux chemins η tels que $\mathcal{P}_w\eta = \pi$ est l'intersection de K_π et d'un cône convexe ne dépendant pas de π . Cela est prouvé dans [11], en particulier ce cône est difficile à décrire, on pourra aussi consulter [20].

5.3 Formule de représentation théorique pour la transformée de Pitman

On utilisera à partir de maintenant le vocabulaire introduit en section 5.1. On considère dans cette section un groupe de Lie G semi-simple complexe et simplement connexe associé à un système de racines Φ . Soit H un tore maximal et B^+ et B^- ses sous-groupes de Borel avec radicaux unipotents N^+ et N^- . On note α_i pour $i \in I$ l'ensemble des racines simples positives. On note α_i^\vee pour les coracines correspondantes. On note s_i la réflexion associée α_i dans le groupe de Weyl. Soit e_i, f_i, h_i les générateurs de Chevalley de l'algèbre de Lie associée à G . Pour un élément $w \in W$, on note $\bar{w} \in G$ un représentant dans le groupe G . On note l'algèbre de Lie de H par \mathfrak{h} dont la décomposition de Cartan fournie : $\mathfrak{h} = \mathfrak{a} + i\mathfrak{a}$ de façon à ce que les racines α_i prennent des valeurs réelles dans l'espace vectoriel \mathfrak{a} . Ici, \mathfrak{a} est généré par les α_i^\vee et on note son dual par \mathfrak{a}^* qui lui est généré par les α_i .

Définition 45 (Poids et poids dominants).

- On définit l'ensemble (ou réseau) des *poids* par :

$$P := \{\lambda \in \mathfrak{a}^* \mid \forall i \in I : \lambda(\alpha_i^\vee) \in \mathbb{Z}\}$$

- On définit l'ensemble des *poids dominants* par :

$$P^+ := \{\lambda \in \mathfrak{a}^* \mid \forall i \in I : \lambda(\alpha_i^\vee) \in \mathbb{N}\}$$

Définition 46 (Représentation d'une algèbre de Lie).

- Une *représentation* d'une algèbre de Lie \mathfrak{g} est la donnée d'un espace vectoriel (complexe) V muni d'une application

$$\begin{aligned} \pi : \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{gl}(V) \\ x &\longmapsto \pi(x) \end{aligned}$$

qui est un morphisme d'algèbre de Lie, i.e. une application linéaire telle que :

$$\forall x, y \in \mathfrak{g} : \pi([x, y]) = \pi(x) \circ \pi(y) - \pi(y) \circ \pi(x)$$

On notera $x \cdot v$ au lieu de $\pi(x)(v)$ pour l'action de l'élément $x \in \mathfrak{g}$ sur le vecteur $v \in V$.

- La structure d'algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(V)$ est simplement donnée par le crochet de Lie :

$$[u, v] := u \circ v - v \circ u$$

- Par correspondance entre algèbre de Lie et groupes de Lie, cela signifie que l'on se donne une représentation $G \rightarrow GL(V)$ lorsque G est le groupe de Lie associé à \mathfrak{g} .

Définition 47 (Plus haut poids).

- Soient λ et μ deux poids. On dit que λ est de *poids plus haut* que μ si l'on peut exprimer $\lambda - \mu$ comme combinaison linéaire à coefficients positifs des racines simples positives.
- On dit qu'un poids λ d'une représentation V de \mathfrak{g} est un *plus haut poids* si λ est de poids plus haut que tout autre poids μ de V .

Définition 48 (Sous-espace à poids et vecteur à poids).

- Soit $\lambda \in \mathfrak{g}^*$, on appelle *sous-espace à poids* de V associé à λ le sous-espace :

$$V_\lambda := \{v \in V \mid \forall h \in \mathfrak{h} : h \cdot v = \lambda(h)v\}$$

- Les éléments non nuls de V_λ sont appelés *vecteurs à poids* associés au poids λ . Autrement dit, un vecteur à poids est un vecteur propre simultanément pour l'action de tous les éléments de \mathfrak{h} avec valeur propre λ . La *multiplicité* de λ est la dimension de V_λ

Remarque 25. Si V est de dimension finie, alors :

$$V = \bigoplus_{\lambda \in P(V)} V_\lambda$$

où $P(V)$ est l'ensemble des poids au sens des éléments λ tels que le sous-espace de poids V_λ est non réduit au singleton $\{0\}$. On note aussi que $P(V) \subset P$.

On rappelle que par la section 5.1, on peut écrire :

$$\mathfrak{g} := \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+ \text{ où } \mathfrak{n}_\pm := \bigoplus_{\alpha \in \Phi^\pm} \mathfrak{g}_\alpha$$

Définition 49 (Vecteur primitif).

Un vecteur $v \in V$ sera dit *primitif* de poids λ si $v \in V_\lambda$ et si $\mathfrak{n}_+ \cdot v = 0$.

Remarque 26. Cela est équivalent à demander que pour tout α racine simple positive :

$$\mathfrak{g}_\alpha \cdot v = 0$$

Lorsque V est de dimension finie, la finitude de $P(V)$ et l'inclusion $\mathfrak{g}_\alpha \cdot V_\lambda \subset V_{\lambda+\alpha}$ assurent l'existence de vecteurs primitifs dans V . Si V est de plus irréductible, on voit que V est engendré par un vecteur primitif. On peut donc considérer la notion de représentation de plus haut poids suivante.

Définition 50 (Représentation de plus haut poids et vecteur de plus haut poids).

- On dit qu'une représentation V de \mathfrak{g} est de *plus haut poids* si elle est engendrée par un vecteur v primitif. Autrement dit, si $\mathfrak{g} \cdot v = V$ pour v primitif. On dit aussi que V est généré par v (primitif) en tant que \mathfrak{g} -module.
- On dit alors que le vecteur v est un *vecteur de plus haut poids* et que le poids λ de v est un *plus haut poids de la représentation V* .

On peut montrer que la terminologie de « plus haut poids » ci-dessus correspond à celle de la définition 47.

On admet le théorème du plus haut poids suivant :

Théorème 9 (Theorem of the highest weight).

Il existe une bijection entre l'ensemble des poids (entiers) dominants P^+ et l'ensemble des représentations de plus haut poids. Autrement dit, pour tout $\lambda \in P^+$, il existe une unique représentation V de plus haut poids, que l'on note $V(\lambda)$.

Démonstration. On pourra consulter le théorème 12.6 de [18]. □

En appliquant ce qui précède à l'algèbre de Lie \mathfrak{a} , pour chaque $\lambda \in P^+$ on choisit une représentation $V(\lambda)$ de plus haut poids avec vecteur de plus haut poids noté v_λ . Quitte à normaliser un produit scalaire sur $V(\lambda)$, on peut supposer que l'on munit $V(\lambda)$ d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ tel que v_λ est un vecteur unitaire.

En utilisant le fait que pour tout poids dominant $\lambda \in P^+$ et tout $w \in W$ on a pour les indices $i_1, \dots, i_n \in I$:

$$\langle e_{i_1} \cdots e_{i_n} \bar{w} v_\lambda, v_\lambda \rangle \geq 0$$

Et en utilisant notamment la méthode de Laplace, Biane-Bougerol-O'Connell ont montré dans [1] la formule théorique suivante pour la transformation de Pitman \mathcal{P}_w^\vee relative aux coracines.

Théorème 10 (Formule de représentation théorique pour la transformée de Pitman).

Soit $w \in W$, pour tout chemin π dans \mathfrak{a} , on a :

$$\mathcal{P}_w^\vee \pi(t) = \pi(t) - \sum_{i \in I} \inf_{\substack{j_1, \dots, j_r \in S(\omega_i, w) \\ 0 \leq t_r \leq \dots \leq t_1 \leq t}} (\alpha_{j_1}(\pi(t_1)) + \cdots + \alpha_{j_r}(\pi(t_r))) \alpha_i^\vee \quad (39)$$

où pour un poids λ dominant on note $S(\lambda, w)$ l'ensemble des suites $(j_1, \dots, j_r) \in I^r$ telles que $\langle e_{i_1} \cdots e_{i_r} \bar{w} v_\lambda, v_\lambda \rangle \neq 0$ et où ici les ω_i sont les poids fondamentaux caractérisés par les relations $\omega_i \left(\alpha_j^\vee \right) = \delta_{i,j}$ pour tout $i, j \in I$.

6 Généralisation du théorème de Pitman

6.1 Dualité et co-transformation de Pitman

On considère un groupe de Coxeter W généré par un ensemble S de réflexions de V . On suppose que le groupe W est fini et on note encore w_0 comme le plus long élément du groupe au sens de la définition de la section 3.3. On s'intéresse à nouveau à la définition 13 de chemin dual introduite en section 4.1. On en donne une nouvelle définition ci-dessous correspondant à un changement d'échelle :

Définition 51 (Chemin dual). Soit $T > 0$ fixé, pour tout chemin continu $\pi : [0, T] \rightarrow V$ tel que $\pi(0) = 0$, on définit le chemin dual de π par :

$$\kappa\pi(t) := \pi(T - t) - \pi(T)$$

Remarque 27. Pour tout chemin π tel que $\pi(0) = 0$, on a la relation :

$$\kappa^2\pi = \pi$$

En effet, en utilisant la définition ci-dessus :

$$\begin{aligned} \kappa^2\pi(t) &= \kappa(\pi(T - \cdot) - \pi(T))(t) \\ &= \kappa(\pi(T - \cdot))(t) - \pi(T) \\ &= \pi(T - (T - t)) - \pi(0) + \pi(T) - \pi(T) \\ &= \pi(t) \end{aligned}$$

On montre dans cette section que la transformation $I := \mathcal{P}_{w_0}\kappa(-w_0)$ est une involution sur l'ensemble des chemins dominants. (Cela peut être vu comme une généralisation de l'involution de Schützenberger).

Définition 52 (Chemin α -dominant, α -codominant et codominant).

- Un chemin π est dit α -dominant si pour tout $t \in [0, T]$:

$$\alpha^\vee(\pi(t)) \geq 0$$

- Un chemin π est dit α -codominant si $\kappa\pi$ est α -dominant, autrement dit si pour tout $t \in [0, T]$:

$$\alpha^\vee(\pi(t)) \geq \alpha^\vee(\pi(T))$$

- Un chemin π est dit *codominant* s'il est α -dominant pour toute racine α .

On va définir maintenant la co-transformation de Pitman par $\kappa\mathcal{P}_\alpha\kappa$, calculons son expression pour un chemin π :

Comme on a :

$$\mathcal{P}_\alpha\kappa\pi(t) = \kappa\pi(t) - \inf_{0 \leq s \leq t} \alpha^\vee(\kappa\pi(s))\alpha = \pi(T - t) - \pi(T) - \inf_{0 \leq s \leq t} \alpha^\vee(\pi(T - s) - \pi(T))\alpha \quad (40)$$

On obtient :

$$\begin{aligned} (\kappa\mathcal{P}_\alpha\kappa)\pi(t) &= \pi(t) - \inf_{0 \leq s \leq T-t} \alpha^\vee(\pi(T - s))\alpha + \inf_{0 \leq s \leq T} \alpha^\vee(\pi(T - s))\alpha \\ &= \pi(t) - \inf_{t \leq s \leq T} \alpha^\vee(\pi(s))\alpha + \inf_{0 \leq s \leq T} \alpha^\vee(\pi(s))\alpha \end{aligned}$$

On définit donc la co-transformation de Pitman par cette expression :

Définition 53 (Co-transformation de Pitman).

On appelle *co-transformation de Pitman* l'opérateur $\mathcal{E}_\alpha := \kappa\mathcal{P}_\alpha\kappa$ qui est donné par la formule :

$$\boxed{\mathcal{E}_\alpha\pi(t) = \pi(t) - \inf_{t \leq s \leq T} \alpha^\vee(\pi(s))\alpha + \inf_{0 \leq s \leq T} \alpha^\vee(\pi(s))\alpha}$$

Proposition 21 (Relations entre transformation et co-transformation de Pitman).

On a les propriétés suivantes :

- 1) $\mathcal{P}_\alpha \kappa \mathcal{P}_\alpha = \mathcal{P}_\alpha \kappa$
- 2) $\mathcal{E}_\alpha^2 = \mathcal{E}_\alpha$
- 3) $\mathcal{E}_\alpha \mathcal{P}_\alpha = \mathcal{E}_\alpha$
- 4) $\mathcal{P}_\alpha \mathcal{E}_\alpha = \mathcal{P}_\alpha$
- 5) $\mathcal{E}_\alpha \pi(T) = s_\alpha \mathcal{P}_\alpha \pi(T)$

Démonstration. 1) Par l'équation (40), on a d'une part :

$$\mathcal{P}_\alpha \kappa \pi(t) = \pi(T-t) - \pi(T) - \inf_{T-t \leq s \leq T} \alpha^\vee(\pi(s))\alpha + \alpha^\vee(\pi(T))\alpha \quad (41)$$

Par ailleurs, comme on a :

$$\kappa \mathcal{P}_\alpha \pi(t) = \pi(T-t) - \pi(T) - \inf_{0 \leq s \leq T-t} \alpha^\vee(\pi(s))\alpha + \inf_{0 \leq s \leq T} \alpha^\vee(\pi(s))\alpha$$

Il vient :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_\alpha \kappa \mathcal{P}_\alpha \pi(t) &= \pi(T-t) - \pi(T) - \inf_{0 \leq s \leq T-t} \alpha^\vee(\pi(s))\alpha + \inf_{0 \leq s \leq T} \alpha^\vee(\pi(s))\alpha \\ &\quad - \inf_{0 \leq s \leq t} \alpha^\vee \left[\pi(T-s) - \pi(T) - \inf_{0 \leq u \leq T-s} \alpha^\vee(\pi(u))\alpha + \inf_{0 \leq s \leq T} \alpha^\vee(\pi(s))\alpha \right] \\ &= \pi(T-t) - \pi(T) - \inf_{0 \leq s \leq T-t} \alpha^\vee(\pi(s))\alpha + \inf_{0 \leq s \leq T} \alpha^\vee(\pi(s))\alpha \\ &\quad - \inf_{0 \leq s \leq t} \left[\alpha^\vee(\pi(T-s)) - 2 \inf_{0 \leq u \leq T-s} \alpha^\vee(\pi(u)) \right] \alpha + \alpha^\vee(\pi(T))\alpha - 2 \inf_{0 \leq s \leq T} \alpha^\vee(\pi(s))\alpha \end{aligned}$$

Or comme on a par changement de variable :

$$\inf_{0 \leq s \leq t} \left[\alpha^\vee(\pi(T-s)) - 2 \inf_{0 \leq u \leq T-s} \alpha^\vee(\pi(u)) \right] = \inf_{T-t \leq s \leq T} \left[\alpha^\vee(\pi(s)) - 2 \inf_{0 \leq u \leq s} \alpha^\vee(\pi(u)) \right]$$

On peut appliquer l'égalité (19) du lemme 5 avec $u := T-t$ et $t := T$ et en posant :

$$t_0 := \sup \left\{ s \geq 0 \mid \alpha^\vee(\pi(s)) = \inf_{0 \leq u \leq s} \alpha^\vee(\pi(u)) \right\}$$

◇ Si $T-t \leq t_0$, on a donc par le lemme 5 :

$$\inf_{T-t \leq s \leq T} \left[\alpha^\vee(\pi(s)) - 2 \inf_{0 \leq u \leq s} \alpha^\vee(\pi(u)) \right] = - \inf_{0 \leq s \leq T-t} \alpha^\vee(\pi(s))$$

D'où l'on obtient en remplaçant dans les égalités ci-dessus :

$$\mathcal{P}_\alpha \kappa \mathcal{P}_\alpha \pi(t) = \pi(T-t) - \pi(T) - \inf_{0 \leq s \leq T} \alpha^\vee(\pi(s))\alpha + \alpha^\vee(\pi(T))\alpha$$

Or dans le cas où $T-t \leq t_0$, on a :

$$\inf_{0 \leq s \leq T} \alpha^\vee(\pi(s)) = \inf_{T-t \leq s \leq T} \alpha^\vee(\pi(s))$$

D'où l'on retrouve bien l'expression (41) et ainsi :

$$\mathcal{P}_\alpha \kappa \mathcal{P}_\alpha \pi(t) = \mathcal{P}_\alpha \kappa \pi(t)$$

◇ Si $T-t \geq t_0$, on a alors : $\inf_{0 \leq u \leq s} \alpha^\vee(\pi(u)) = \alpha^\vee(\pi(t_0))$ et en remplaçant dans les expressions ci-dessus, on retrouve bien aussi l'égalité $\mathcal{P}_\alpha \kappa \mathcal{P}_\alpha \pi(t) = \mathcal{P}_\alpha \kappa \pi(t)$.

2) On a bien :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\alpha^2 &= (\kappa \mathcal{P}_\alpha \kappa) (\kappa \mathcal{P}_\alpha \kappa) \\ &= \kappa \mathcal{P}_\alpha \mathcal{P}_\alpha \kappa \quad (\text{car, par la remarque 27 : } \kappa^2 = id) \\ &= \kappa \mathcal{P}_\alpha \kappa \quad (\text{par idempotence}) \\ &= \mathcal{E}_\alpha \end{aligned}$$

3) Il vient directement par le point 1) :

$$\mathcal{E}_\alpha \mathcal{P}_\alpha = \kappa (\mathcal{P}_\alpha \kappa \mathcal{P}_\alpha) = \kappa (\mathcal{P}_\alpha \kappa) = \mathcal{E}_\alpha$$

4) De même grâce au point 1) :

$$\mathcal{P}_\alpha \mathcal{E}_\alpha = (\mathcal{P}_\alpha \kappa \mathcal{P}_\alpha) \kappa = (\mathcal{P}_\alpha \kappa) \kappa = \mathcal{P}_\alpha$$

5) Par définition on sait que $s_\alpha(v) := v - \alpha^\vee(v)\alpha$, donc :

$$s_\alpha \mathcal{P}_\alpha \pi(T) = \mathcal{P}_\alpha \pi(T) - \alpha^\vee(\mathcal{P}_\alpha \pi(T))\alpha$$

Comme : $\alpha^\vee(\mathcal{P}_\alpha \pi(T)) = \alpha^\vee(\pi(T)) - 2 \inf_{0 \leq s \leq T} \alpha^\vee(\pi(s))$, on peut écrire :

$$s_\alpha \mathcal{P}_\alpha \pi(T) = \pi(T) + \inf_{0 \leq s \leq T} \alpha^\vee(\pi(s))\alpha - \alpha^\vee(\mathcal{P}_\alpha \pi(T))\alpha = \mathcal{E}_\alpha \pi(T)$$

□

Proposition 22 (Propriétés de la co-transformation de Pitman).

La co-transformation de Pitman \mathcal{E}_α satisfait les propriétés suivantes :

- (i) $\mathcal{E}_\alpha \pi$ est l'unique chemin η satisfaisant les conditions : $\eta(T) = s_\alpha \mathcal{P}_\alpha \pi(T)$ et $\mathcal{P}_\alpha \eta = \mathcal{P}_\alpha \pi$.
- (ii) $\mathcal{E}_\alpha \pi$ est l'unique chemin η satisfaisant les conditions : η est α -codominant et $\mathcal{P}_\alpha \eta = \mathcal{P}_\alpha \pi$.
- (iii) Si π est α -dominant, alors $\mathcal{E}_\alpha \pi$ est l'unique chemin tel que $\mathcal{P}_\alpha \eta = \pi$ et $\eta(T) = s_\alpha(\pi(T))$.
- (iv) On a l'équivalence : $\mathcal{E}_\alpha \pi = \pi \Leftrightarrow \pi$ est α -codominant.

Démonstration. (i) Ce point découle directement de la formule d'inversion de Biane-Bougerol-O'Connell (14) de la proposition 6 point (iv) de ce mémoire.

(ii) Il suffit de montrer que si $\alpha^\vee(\eta(t)) \geq \alpha^\vee(\eta(T))$ pour tout $t \in [0, T]$ alors $\eta(T) = s_\alpha \mathcal{P}_\alpha \pi(T)$. Par le point (i) on aura donc démontré le point (ii). Si $\alpha^\vee(\eta(t)) \geq \alpha^\vee(\eta(T))$ pour tout $t \in [0, T]$, alors :

$$\inf_{0 \leq s \leq T} \alpha^\vee(\eta(s)) = \alpha^\vee(\eta(T))$$

D'où :

$$\mathcal{P}_\alpha \eta(T) = \eta(T) - \inf_{0 \leq s \leq T} \alpha^\vee(\eta(s))\alpha = \eta(T) - \alpha^\vee(\eta(T))\alpha$$

Ainsi on a la relation : $\mathcal{P}_\alpha \eta(T) = s_\alpha \eta(T)$, et donc en composant par s_α :

$$s_\alpha \mathcal{P}_\alpha \eta(T) = s_\alpha^2 \eta(T) = \eta(T)$$

(iii) Si π est α -dominant, alors $\alpha^\vee(\pi(t)) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$. Par le point (ii) de la proposition 6 de ce mémoire, on a donc $\mathcal{P}_\alpha \pi = \pi$, d'où par le point (i), on obtient bien l'assertion annoncée.

(iv) (\Rightarrow) Si $\mathcal{E}_\alpha \pi = \pi$, alors par le point (ii) : $\eta := \mathcal{E}_\alpha \pi = \pi$ est α -codominant.

(\Leftarrow) Si π est α -codominant alors pour tout $t \in [0, T]$ on a $\alpha^\vee(\pi(t)) \geq \alpha^\vee(\pi(T))$ et donc :

$$\inf_{t \leq s \leq T} \alpha^\vee(\pi(s)) = \inf_{0 \leq s \leq T} \alpha^\vee(\pi(s)) = \alpha^\vee(\pi(T))$$

Donc :

$$\mathcal{E}_\alpha \pi(t) = \pi(t) - \inf_{t \leq s \leq T} \alpha^\vee(\pi(s))\alpha + \inf_{0 \leq s \leq T} \alpha^\vee(\pi(s))\alpha = \pi(t) - \alpha^\vee(\pi(T))\alpha + \alpha^\vee(\pi(T))\alpha = \pi(t)$$

□

On peut noter que \mathcal{E}_α joue le même rôle pour les opérateurs de Littelmann f_α que \mathcal{P}_α pour les opérateurs de Littelmann e_α .

Lemme 8 (Relations de tresses pour la co-transformation de Pitman).

Soit $\alpha, \beta \in V$ et $\alpha^\vee, \beta^\vee \in V^\vee$ tels que $\alpha^\vee(\alpha) = \beta^\vee(\beta) = 2$ avec $\alpha^\vee(\beta) < 0$ et $\beta^\vee(\alpha) < 0$ et $\alpha^\vee(\beta)\beta^\vee(\alpha) = 4 \cos^2\left(\frac{\pi}{n}\right)$. Alors, on a :

$$\underbrace{\mathcal{E}_\alpha \mathcal{E}_\beta \mathcal{E}_\alpha \cdots}_{n \text{ termes}} = \underbrace{\mathcal{E}_\beta \mathcal{E}_\alpha \mathcal{E}_\beta \cdots}_{n \text{ termes}}$$

Démonstration. Par les relations $\mathcal{E}_\alpha := \kappa \mathcal{P}_\alpha \kappa$ et $\kappa^2 = id$, on peut écrire :

$$\mathcal{E}_\alpha \mathcal{E}_\beta \mathcal{E}_\alpha \cdots = \kappa \mathcal{P}_\alpha \mathcal{P}_\beta \mathcal{P}_\alpha \cdots \kappa$$

Puis par le théorème 6 pour les relations de tresses de la transformation de Pitman :

$$\mathcal{E}_\alpha \mathcal{E}_\beta \mathcal{E}_\alpha \cdots = \kappa \mathcal{P}_\beta \mathcal{P}_\alpha \mathcal{P}_\beta \cdots \kappa$$

Donc à nouveau par les relations $\mathcal{E}_\alpha := \kappa \mathcal{P}_\alpha \kappa$ et $\kappa^2 = id$:

$$\underbrace{\mathcal{E}_\alpha \mathcal{E}_\beta \mathcal{E}_\alpha \cdots}_{n \text{ termes}} = \underbrace{\mathcal{E}_\beta \mathcal{E}_\alpha \mathcal{E}_\beta \cdots}_{n \text{ termes}}$$

□

Pour un groupe de Coxeter W , on peut encore étendre la définition de la co-transformation de Pitman de la même manière que pour la transformation de Pitman réalisée en section 3.3 (proposition 10). Ainsi, pour tout $w \in W$: $\mathcal{E}_w := \kappa \mathcal{P}_w \kappa$.

En particulier, $\mathcal{E}_{w_0} = \mathcal{E}_{w_0}^2$ est une projection sur l'ensemble des chemins co-dominants où w_0 est encore défini comme étant le plus long élément de W . Cela est assuré par l'idempotence de \mathcal{P}_{w_0} prouvée au corollaire 1 (section 3.3).

Lemme 9. Soit π un chemin co-dominant et soit $w \in W$ et prenons α telle que $l(s_\alpha w) > l(w)$. Alors $\mathcal{P}_w \pi$ est α -codominant.

Démonstration. La preuve de ce lemme technique étant assez longue, on pourra consulter [1] (lemme 4.4) pour une preuve détaillée. L'idée est de tout d'abord démontrer le résultat pour W un groupe diédral. Le cadre des groupes diédraux nous permet de nous placer sous les hypothèses de la section 3.2 et donc de pouvoir appliquer la formule du théorème 5. Le cas pour un groupe de Coxeter quelconque s'obtient ensuite par récurrence sur $l(w)$. □

Lemme 10. Soit π un chemin co-dominant et soit $w \in W$. Alors $\mathcal{P}_w \pi$ est l'unique chemin η satisfaisant les conditions : $\mathcal{E}_{w^{-1}} \eta = \pi$ et $w(\pi(T)) = \eta(T)$.

Démonstration. La preuve s'écrit aussi par récurrence sur $l(w)$ en utilisant le lemme précédent : Si $l(s_\alpha w) = l(w) + 1$ alors par le lemme, $\mathcal{P}_w \pi$ est α -codominant. Par hypothèse de récurrence, on a donc $\mathcal{P}_\alpha \mathcal{P}_w \pi$ unique chemin η vérifiant $\mathcal{E}_\alpha \eta = \mathcal{P}_\alpha \pi$ et $\eta(T) = s_\alpha \mathcal{P}_w \pi(T)$. □

La proposition suivante sera très importante pour les résultats de la section 6.2.

Proposition 23 (Propriété du point terminal).

Pour tout chemin π , on a :

$$\mathcal{E}_{w_0} \pi(T) = w_0 \mathcal{P}_{w_0} \pi(T) \tag{42}$$

Démonstration. Il suffit de prendre $w := w_0$ le plus long élément dans le lemme 10. On peut appliquer le lemme 10 car en vertu de la relation $\mathcal{P}_{w_0} \mathcal{E}_{w_0} = \mathcal{P}_{w_0}$ il suffit de vérifier l'identité (42) pour π un chemin codominant. Grâce au lemme 10, on obtient :

$$w_0(\pi(T)) = \mathcal{P}_{w_0} \pi(T)$$

Et en vertu du fait que w_0 est le plus long élément, on a nécessairement $w_0 = w_0^{-1}$, d'où :

$$\pi(T) = w_0 \mathcal{P}_{w_0} \pi(T)$$

Et comme π est supposé codominant :

$$\mathcal{E}_{w_0} \pi(T) = w_0 \mathcal{P}_{w_0} \pi(T)$$

□

Lemme 11. *On a la relation suivante :*

$$(-w_0) \mathcal{P}_{w_0} = \mathcal{P}_{w_0} (-w_0) \quad (43)$$

Démonstration. Soit α une racine simple, alors $\tilde{\alpha} := -w_0\alpha$ est aussi une racine simple et l'on a : $\tilde{\alpha}^\vee = -\alpha^\vee w_0$. Ainsi, on a : $\mathcal{P}_\alpha(-w_0) = (-w_0) \mathcal{P}_{\tilde{\alpha}}$, en effet :

$$\mathcal{P}_\alpha(-w_0)\pi(t) = -w_0\pi(t) - \inf_{0 \leq s \leq t} \alpha^\vee(-w_0\pi(s))\alpha = -w_0\pi(t) + \inf_{0 \leq s \leq t} \alpha^\vee(w_0\pi(s))\alpha$$

Et d'autre part comme $w_0^2 = id$:

$$(-w_0) \mathcal{P}_{\tilde{\alpha}} \pi(t) = (-w_0) \left[\pi(t) - \inf_{0 \leq s \leq t} \tilde{\alpha}^\vee(\pi(s))\tilde{\alpha} \right] = -w_0\pi(t) + \inf_{0 \leq s \leq t} \alpha^\vee(w_0\pi(s))\alpha$$

Donc on a bien $\mathcal{P}_\alpha(-w_0) = (-w_0) \mathcal{P}_{\tilde{\alpha}}$ et si l'on note $w_0 := s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_r}$ une décomposition réduite, on obtient par itération de la dernière relation :

$$\mathcal{P}_{w_0}(-w_0) = \mathcal{P}_{\alpha_1} \cdots \mathcal{P}_{\alpha_r}(-w_0) = (-w_0) \mathcal{P}_{\tilde{\alpha}_1} \cdots \mathcal{P}_{\tilde{\alpha}_r}$$

Comme on peut montrer par récurrence sur $r := l(w_0)$ que :

$$w_0 = s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_r} = s_{\tilde{\alpha}_1} \cdots s_{\tilde{\alpha}_r}$$

On obtient finalement :

$$\mathcal{P}_{w_0}(-w_0) = (-w_0) \mathcal{P}_{\alpha_1} \cdots \mathcal{P}_{\alpha_r} = (-w_0) \mathcal{P}_{w_0}$$

□

On se servira notamment du point (iv) du théorème suivant dans la dernière section pour prouver le théorème de représentation du mouvement brownien dans une chambre de Weyl.

Théorème 11. *La transformation $I := \mathcal{P}_{w_0}(-w_0)\kappa$ possède les propriétés suivantes :*

(i) *On a : $I^2 = \mathcal{P}_{w_0}$.*

(ii) *La restriction de I aux chemins dominants est une involution, i.e. : $I^2\pi = \pi$ si π est un chemin dominant.*

(iii) *On a : $I\mathcal{P}_{w_0} = I$.*

(iv) *On a la relation de dualité suivante : pour tout chemin π , on a :*

$$I\pi(T) = \mathcal{P}_{w_0}\pi(T) \quad (44)$$

En particulier, si π est dominant on a : $I\pi(T) = \pi(T)$.

Démonstration. (i) Par le lemme 11, on peut écrire :

$$I^2 = \mathcal{P}_{w_0}(-w_0)\kappa \mathcal{P}_{w_0}(-w_0)\kappa = \mathcal{P}_{w_0}\kappa(-w_0)\mathcal{P}_{w_0}(-w_0)\kappa = \mathcal{P}_{w_0}\kappa \mathcal{P}_{w_0}\kappa = \mathcal{P}_{w_0}\mathcal{E}_{w_0} = \mathcal{P}_{w_0}$$

Cela démontre donc le premier point.

(ii) Cela découle directement du premier point en notant que pour un chemin π dominant on

a $\mathcal{P}_\alpha \pi = \pi$ donc en itérant $\mathcal{P}_{w_0} \pi = \pi$.
(iii) En prenant le premier point, il vient :

$$I \mathcal{P}_{w_0} = I^3 = I^2 I$$

Comme I est une involution sur les chemins dominants et que l'image par I de tout chemin est un chemin dominant, il vient :

$$I \mathcal{P}_{w_0} = I$$

(iv) Par le lemme 11, on a : $I = \mathcal{P}_{w_0}(-w_0)\kappa = (-w_0)\mathcal{P}_{w_0}\kappa$ Donc comme $\kappa^2 = id$:

$$I = (-w_0)\kappa\kappa\mathcal{P}_{w_0}\kappa = (-w_0)\kappa\mathcal{E}_{w_0}$$

Puis en vertu de la proposition 23 (propriété du point terminal) :

$$\mathcal{E}_{w_0}\pi(T) = w_0\mathcal{P}_{w_0}\pi(T)$$

D'où finalement :

$$I\pi(T) = \mathcal{P}_{w_0}\pi(T)$$

□

On définit comme en début de section 4.1 la concaténation, mais cette fois-ci pour une paramétrisation sur $[0, T]$: Pour deux chemins $\pi, \eta : [0, T] \rightarrow V$, on définit $\pi * \eta$ par :

$$\pi * \eta(t) := \begin{cases} \pi(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \\ \eta(2(t - \frac{T}{2})) + \pi(T) & \text{si } \frac{T}{2} \leq t \leq T \end{cases}$$

Lemme 12. Pour tout $w \in W$, on a : $\mathcal{P}_w(\pi * \eta) = \mathcal{P}_w(\pi) * \eta'$ où η' est un chemin tel que :

$$\mathcal{P}_{w_0}(\eta') = \mathcal{P}_{w_0}(\eta)$$

Démonstration. On procède par récurrence sur $l(w)$.

[I] : Pour $l(w) = 1$ on peut donc écrire $w = \alpha$, on a donc :

$$\mathcal{P}_\alpha(\pi * \eta)(t) = \pi * \eta(t) - \inf_{0 \leq s \leq t} \alpha^\vee(\pi * \eta(s))\alpha$$

En disjonctant les cas où le minimum de $\alpha^\vee(\pi * \eta(s))$ est atteint soit entre $0 \leq s \leq \frac{T}{2}$ soit entre $\frac{T}{2} \leq s \leq T$, on construit η' tel que :

$$\mathcal{P}_\alpha(\pi * \eta) = \mathcal{P}_\alpha(\pi) * \eta'$$

avec $\mathcal{P}_\alpha(\eta') = \mathcal{P}_\alpha(\eta)$. Et comme $\mathcal{P}_{w_0}\mathcal{P}_\alpha = \mathcal{P}_{w_0}$, le cas $l(w) = 1$ est vrai.

[H] : Pour $l(w) > 1$, on suppose la propriété vraie pour des éléments de longueur n . Soit $w := w_1 s$ avec $l(w) = n + 1$ et $l(w_1) = n$. On a alors par le cas d'initialisation :

$$\mathcal{P}_w(\pi * \eta) = \mathcal{P}_{w_1}\mathcal{P}_s(\pi * \eta) = \mathcal{P}_{w_1}(\mathcal{P}_s(\pi) * \eta')$$

avec $\mathcal{P}_{w_0}\eta' = \mathcal{P}_{w_0}\eta$. Puis par hypothèse de récurrence appliquée à w_1 :

$$\mathcal{P}_{w_1}(\mathcal{P}_s(\pi) * \eta') = (\mathcal{P}_{w_1}\mathcal{P}_s)(\pi) * \eta''$$

avec $\mathcal{P}_{w_0}\eta'' = \mathcal{P}_{w_0}\eta'$ et donc $\mathcal{P}_w(\pi * \eta) = \mathcal{P}_w(\pi) * \eta''$ avec $\mathcal{P}_{w_0}\eta'' = \mathcal{P}_{w_0}\eta$.
Ce qui prouve et achève la récurrence. □

Définition 54 (Ensemble de Littlewood-Richardson).

Soient π et η deux chemins entiers et dominants définis sur $[0, T]$, on pose :

$$LR(\pi, \eta) := \{\pi * \mu \mid \mu \in B\eta \text{ et } \pi * \mu \text{ est dominant}\}$$

où l'on rappelle que B est la notation pour le module de Littelmann.

Cet ensemble est étudié par Littelmann pour généraliser aux groupes de Weyl la construction de Littlewood-Richardson issue de la combinatoire. Cet ensemble donne une paramétrisation des décompositions en représentations irréductibles du produit tensoriel des représentations de plus hauts poids $\pi(T)$ et $\eta(T)$. Comme on a vu que $I\mathcal{P}_{w_0} = I$ par le point (iii) du théorème 11, on peut écrire : $I(\eta)(T) = \eta(T)$ et $I(\pi)(T) = \pi(T)$. De plus, on peut montrer que $LR(I(\eta), I(\pi))$ donne une paramétrisation de la décomposition en représentations irréductibles du produit tensoriel de représentations avec plus hauts poids $\eta(T)$ et $\pi(T)$.

Proposition 24. *L'application $I : LR(\pi, \eta) \rightarrow LR(I(\eta), I(\pi))$ est une involution bijective qui préserve les points terminaux.*

Démonstration. • Vérifions tout d'abord que l'application est bien définie.

Soit $\pi * \mu \in LR(\pi, \eta)$, par définition de I , on peut écrire comme κ et $(-w_0)$ commutent :

$$I(\pi * \mu) = \mathcal{P}_{w_0}(\kappa(-w_0)(\pi * \mu)) = \mathcal{P}_{w_0}(\kappa(-w_0)(\mu) * \kappa(-w_0)(\pi))$$

Puis par le lemme 12, il existe un chemin ξ tel que $\mathcal{P}_{w_0}\xi = \mathcal{P}_{w_0}(\kappa(-w_0)(\pi)) = I(\pi)$ et tel que :

$$I(\pi * \mu) = \mathcal{P}_{w_0}(\kappa(-w_0)(\mu)) * \xi$$

Puis par le point (iii) du théorème 11 :

$$\mathcal{P}_{w_0}(\kappa(-w_0)(\mu)) = I(\mu) = I(\eta)$$

Donc on a bien :

$$I(\pi * \mu) \in LR(I(\eta), I(\pi))$$

Et l'application est bien définie.

- Par le point (ii) du théorème 11, il vient directement le caractère involutif et donc bijectif.
- Par la relation de dualité (44) du théorème 11, on obtient directement la stabilité des points terminaux. \square

6.2 Théorème de représentation du mouvement brownien dans une chambre de Weyl

On considère encore ici W un groupe de Coxeter généré par un ensemble S de réflexions d'un espace euclidien V et on suppose que W est fini. On notera encore par défaut \mathcal{C} pour parler d'une chambre de Weyl ouverte. On mentionnera $\bar{\mathcal{C}}$ pour obtenir sa fermeture.

Définition 55 (Fonction K -harmonique).

Soit K un noyau de transition sur V . On dit qu'une fonction $h : V \rightarrow \mathbb{R}$ est K -harmonique si :

$$\int_V h(y)K(x, y)dy = h(x)$$

Définition 56 (Transformation de Doob ou h -transformation).

Soit K un noyau de transition sur V et h une fonction K -harmonique.

On définit la *transformation de Doob* de K (aussi appelée *h -transformation* de K) par :

$$Q_h(x, y) := \frac{h(y)}{h(x)}K(x, y)$$

- Mise en contexte pour les algèbres de Lie :

Si W est le groupe de Weyl d'une algèbre de Lie semi-simple \mathfrak{g} , alors on identifie V à \mathfrak{a}^* (voir section 5.3). La chambre de Weyl $\bar{\mathcal{C}} = \bar{\mathfrak{a}}_+^*$ peut être identifiée avec l'orbite de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^*$ sous l'action coadjointe du groupe simplement connexe compact K muni de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ (à identification des murs près). Soit Z un mouvement brownien à valeurs dans $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^*$ de covariance donnée par la forme de Killing. L'image de Z dans l'espace quotient $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^*/K$ reste dans l'intérieur de la chambre de Weyl pour tout temps $t > 0$ et même si le point de départ du mouvement est

dans un mur. Les probabilités de transitions de Z sont invariantes sous l'action coadjointe. Ainsi, l'image dans le quotient est un processus de Markov dans $\bar{\mathcal{C}}$. Une description de ce processus de Markov peut être donnée en terme de conditionnement de Doob. Le processus ainsi considéré est obtenu à partir d'un mouvement brownien X sur $V = \mathfrak{a}^*$ tué aux bords de la chambre de Weyl rendu possible par une transformation de Doob de fonction h donnée par :

$$h(v) := \prod_{\alpha \in \Phi^+} \alpha^\vee(v)$$

où Φ^+ est l'ensemble des racines positives. La fonction h ainsi écrite est l'unique (à facteur multiplicatif près) fonction positive harmonique sur $\bar{\mathcal{C}}$ qui s'annule sur le bord de la chambre.

- Revenons maintenant au cadre d'une chambre de Weyl dans un espace euclidien V sans parler d'espace quotient et étudions les probabilités de transitions pour un processus stochastique contraint à rester dans une chambre de Weyl.

Définition 57 (Processus réfléchissant).

Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus stochastique à valeurs dans V contraint à rester dans une chambre de Weyl. On dit que $(X_t)_{t \geq 0}$ est *réfléchissant* si les incréments de $(X_t)_{t \geq 0}$ sont symétriques sous l'action d'un groupe de Coxeter W . Autrement dit : la distribution de X_{t_2} sachant X_{t_1} est la même que la distribution de $w(X_{t_2})$ sachant $w(X_{t_1})$ pour tout $w \in W$.

Proposition 25. Si $p_t(x, y)dy$ sont les probabilités de transitions pour un processus stochastique $(X_t)_{t \geq 0}$ réfléchissant, alors les probabilités de transitions pour le processus $(X_t)_{t \geq 0}$ tué aux bords de la chambre de Weyl sont :

$$\forall x, y \in \bar{\mathcal{C}} : p_t^0(x, y)dy = \sum_{w \in W} \epsilon(w)p_t(x, w(y))dy \quad (45)$$

où $\epsilon(w) := (-1)^{l(w)}$ avec $l(w)$ la longueur de l'élément $w \in W$.

Démonstration. • Tout chemin π partant de x et arrivant en $w(y)$ qui touche au moins un mur de la chambre de Weyl, peut être associé à un premier temps t_0 auquel il touche le premier mur. On suppose que le mur en question est l'hyperplan orthogonal à α_i et qu'on le note H_{α_i} (s'il y a plusieurs possibilités, on prend i entier le plus grand). On réfléchit ensuite le chemin π par rapport à ce mur pour la partie du chemin correspondant aux temps $t \geq t_0$. Le chemin ainsi obtenu est un chemin π' reliant x à $s_{\alpha_i}w(y)$ qui touche une première fois le mur H_{α_i} au temps t_0 . Cela fournit donc une bijection $\pi \mapsto \pi'$ préservant la mesure sur les chemins. Comme $\epsilon(s_{\alpha_i}w) = -\epsilon(w)$, toutes les paires (π, π') de chemins ainsi construites disparaissent dans la somme (45).

- Les seules paires de chemins qui ne disparaissent pas dans la somme sont les chemins qui restent dans la chambre de Weyl. Or, $w(y)$ est dans la chambre de Weyl de départ si et seulement si $w = id$, on obtient alors la formule (45). \square

Remarque 28. Un mouvement brownien est un processus réfléchissant en vertu du principe de réflexion. On peut donc appliquer la formule (45) pour les probabilités de transitions du mouvement brownien tué aux bords de la chambre de Weyl où $p_t(x, y)dy$ sont ainsi les probabilités de transitions pour un mouvement brownien X ayant pour covariance donnée par un noyau gaussien sur $V := \mathfrak{a}^*$.

Les probabilités de transitions pour le processus de Doob correspondant sont :

$$\forall x, y \in \mathcal{C} : q_t^0(x, y)dy = \frac{h(y)}{h(x)} \sum_{w \in W} \epsilon(w)p_t(x, w(y))dy \quad (46)$$

Ces dernières probabilités de transitions peuvent être prolongées par continuité aux bords de la chambre et en particulier pour $x = 0$.

On veut prouver une généralisation du théorème de Pitman dans le sens suivant : si l'on applique l'opérateur \mathcal{P}_{w_0} à un mouvement brownien à valeur dans V alors on obtient un mouvement brownien dans la chambre de Weyl fondamentale. C'est ce que l'on appelle le théorème de représentation du mouvement brownien dans une chambre de Weyl.

On considère désormais un mouvement brownien dans V avec covariance invariante mais avec un drift $\xi \in C$. Les probabilités de transitions du mouvement brownien avec drift sont alors données par :

$$p_{t,\xi}(x, y) = p_t(x, y) \exp \left(\langle \xi, y - x \rangle - \frac{\|\xi\|^2}{2} t \right)$$

Ainsi, si l'on considère un mouvement brownien dans V débutant en $x \in C$ avec drift ξ qui est tué sur le bord de la chambre de Weyl, sa distribution au temps t est donné par la densité suivante pour $y \in C$ grâce à la formule (45) :

$$p_t^0(x, y) \exp \left(\langle \xi, y - x \rangle - \frac{\|\xi\|^2}{2} t \right) = \sum_{w \in W} \epsilon(w) p_t(x, w(y)) \exp \left(\langle \xi, y - x \rangle - \frac{\|\xi\|^2}{2} t \right)$$

Par invariance de p_t sous l'action du groupe de Weyl W , on peut réécrire :

$$p_t^0(x, y) \exp \left(\langle \xi, y - x \rangle - \frac{\|\xi\|^2}{2} t \right) = \sum_{w \in W} \epsilon(w) p_t(0, y - w(x)) \exp \left(\langle \xi, y - x \rangle - \frac{\|\xi\|^2}{2} t \right)$$

En notant T_C le temps de sortie de la chambre de Weyl C on a donc :

$$\mathbb{P}(T_C > t) = \int_C p_t^0(x, y) \exp \left(\langle \xi, y - x \rangle - \frac{\|\xi\|^2}{2} t \right) dy$$

Et ainsi par ce qui précède :

$$\mathbb{P}(T_C > t) = \sum_{w \in W} \epsilon(w) \int_C p_t(0, y - w(x)) \exp \left(\langle \xi, y - x \rangle - \frac{\|\xi\|^2}{2} t \right) dy$$

Comme le drift ξ est dans la chambre, par convergence dominée on peut écrire :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{V \setminus C} \exp \left(\langle \xi, y - x \rangle - \frac{\|\xi\|^2}{2} t \right) = 0$$

Ainsi :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_C p_t(0, y - w(x)) \exp \left(\langle \xi, y - x \rangle - \frac{\|\xi\|^2}{2} t \right) dy = \exp(\langle \xi, w(x) - x \rangle)$$

Finalement :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(T_C > t) = \mathbb{P}(T_C = +\infty) = \sum_{w \in W} \epsilon(w) \exp(\langle \xi, w(x) - x \rangle)$$

On notera cette dernière fonction par $h_\xi(x)$. Grâce à la transformation de Doob, on peut donc écrire que le mouvement brownien conditionnellement à $\{T_C = +\infty\}$ (i.e. conditionné à rester tout le temps dans la chambre) avec drift ξ commençant en $x \in C$ et tué aux bords de la chambre est un processus de Markov avec probabilités de transitions :

$$q_{t,\xi}(x, y) = p_t^0(x, y) \frac{h_\xi(y)}{h_\xi(x)} \exp \left(\langle \xi, y - x \rangle - \frac{\|\xi\|^2}{2} t \right)$$

Lemme 13. *La distribution d'un mouvement brownien avec drift $\xi \in C$, commençant en 0 et conditionné à rester tout le temps dans le cône $C - x$ où $x \in C$, converge vers la distribution d'un mouvement brownien dans la chambre de Weyl lorsque $x, \xi \rightarrow 0$.*

Démonstration. On remarque que :

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{h_\xi(y)}{h_\xi(x)} = \frac{h(y)}{h(x)}$$

On en déduit la convergence annoncée lorsque $x, \xi \rightarrow 0$ grâce à l'expression (46). \square

Soit $w_0 := s_1 \cdots s_q$ une décomposition réduite. On notera s_{α_i} par s_i . On rappelle qu'un chemin $\eta : [0, T] \rightarrow V$ tel que $\eta(0) = 0$ est dominant lorsque pour tout $t \in [0, T] : \eta(t) \in \bar{\mathcal{C}}$. En définissant la suite (η_j) et $x_j := -\inf_{0 \leq s \leq T} \alpha_j^\vee(\eta_j(s))$ comme en fin de section 5.2, on peut écrire grâce à (38) :

$$\mathcal{P}_{w_0} \eta(T) = \eta(T) + \sum_{j=1}^q x_j \alpha_j$$

On en déduit alors que η est dominant si et seulement si $x_j = 0$ pour tout $j \in \llbracket 1, q \rrbracket$.

On va introduire de nouvelles transformations sur les chemins et on déduira une nouvelle caractérisation pour les chemins dominants.

- Soit $\beta \in \Phi^+$ une racine positive, alors pour toute racine positive α on a :

$$s_\beta \mathcal{P}_\alpha s_\beta = \mathcal{P}_{s_\beta(\alpha)}$$

En effet, on a les égalités :

$$s_\beta \mathcal{P}_\alpha s_\beta \pi(t) = \pi(t) - \inf_{0 \leq s \leq t} \alpha^\vee(s_\beta \pi(s)) \alpha + \inf_{0 \leq s \leq t} \alpha^\vee(s_\beta \pi(s)) \beta^\vee(\alpha) \beta = \mathcal{P}_{s_\beta(\alpha)} \pi(t)$$

- On définit la transformation D_β par :

$$\boxed{D_\beta := \mathcal{P}_\beta s_\beta}$$

On a par calcul :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_\beta s_\beta \eta(t) &= s_\beta \eta(t) - \inf_{0 \leq s \leq t} \beta^\vee(s_\beta \eta(s)) \beta \\ &= s_\beta \eta(t) - \inf_{0 \leq s \leq t} \beta^\vee(\eta(s) - \beta^\vee(\eta(s)) \beta) \beta \\ &= s_\beta \eta(t) - \inf_{0 \leq s \leq t} \beta^\vee(\eta(s)) \beta + 2 \inf_{0 \leq s \leq t} \beta^\vee(\eta(s)) \beta \\ &= s_\beta \eta(t) + \inf_{0 \leq s \leq t} \beta^\vee(\eta(s)) \beta \end{aligned}$$

D'où l'expression :

$$D_\beta \eta(t) = s_\beta \eta(t) + \inf_{0 \leq s \leq t} \beta^\vee(\eta(s)) \beta$$

Par ailleurs, on étend la définition de l'opérateur D pour $w_0 := s_1 \cdots s_q$ (une décomposition réduite où $s_i := s_{\alpha_i}$) en posant :

$$D_{w_0} := \mathcal{P}_{w_0} w_0 = D_{\beta_1} \cdots D_{\beta_q}$$

où $\beta_1 := \alpha_1$ et $\beta_j := s_1 \cdots s_{j-1} \alpha_j$.

- On définit la transformation \mathcal{D}_α par :

$$\boxed{\mathcal{D}_\alpha := s_\alpha \mathcal{E}_\alpha = \iota D_\alpha \iota}$$

où $\iota := -\kappa$.

On peut alors écrire grâce à la définition 53 :

$$\begin{aligned}
s_\alpha \mathcal{E}_\alpha \eta(t) &= \mathcal{E}_\alpha \eta(t) - \alpha^\vee(\mathcal{E}_\alpha \eta(t))\alpha \\
&= \eta(t) - \inf_{t \leq s \leq T} \alpha^\vee(\eta(s))\alpha + \inf_{0 \leq s \leq T} \alpha^\vee(\eta(s))\alpha - \alpha^\vee \left[\eta(t) - \inf_{t \leq s \leq T} \alpha^\vee(\eta(s))\alpha + \inf_{0 \leq s \leq T} \alpha^\vee(\eta(s))\alpha \right] \alpha \\
&= \eta(t) - \inf_{t \leq s \leq T} \alpha^\vee(\eta(s))\alpha + \inf_{0 \leq s \leq T} \alpha^\vee(\eta(s))\alpha - \alpha^\vee(\eta(t))\alpha + 2 \inf_{t \leq s \leq T} \alpha^\vee(\eta(s))\alpha - 2 \inf_{0 \leq s \leq T} \alpha^\vee(\eta(s))\alpha \\
&= \eta(t) - \alpha^\vee(\eta(t))\alpha + \inf_{t \leq s \leq T} \alpha^\vee(\eta(s))\alpha - \inf_{0 \leq s \leq T} \alpha^\vee(\eta(s))\alpha \\
&= \eta(t) + \inf_{t \leq s \leq T} \alpha^\vee(\eta(s) - \eta(t))\alpha - \inf_{0 \leq s \leq T} \alpha^\vee(\eta(s))\alpha
\end{aligned}$$

D'où l'expression :

$$\mathcal{D}_\alpha \eta(t) = \eta(t) + \inf_{t \leq s \leq T} \alpha^\vee(\eta(s) - \eta(t))\alpha - \inf_{0 \leq s \leq T} \alpha^\vee(\eta(s))\alpha \quad (47)$$

On étend la définition de \mathcal{D}_α comme pour D_α , on pose :

$$\mathcal{D}_{w_0} := \mathcal{D}_{\beta_1} \cdots \mathcal{D}_{\beta_q} = \iota D_{w_0} \iota$$

On peut alors remarquer que :

$$\mathcal{D}_{w_0} = \iota \mathcal{P}_{w_0}(-\kappa) w_0 = \iota I$$

Pour un chemin η , on pose $\rho_q := \eta$ et pour $j \leq q$:

$$\rho_{j-1} := \mathcal{D}_{\beta_j} \cdots \mathcal{D}_{\beta_q} \rho_q$$

On pose aussi : $y_j := -\inf_{0 \leq u \leq T} \beta_j^\vee(\rho_j(u))$.

Proposition 26 (Caractérisation des chemins dominants).

• Pour tout chemin η , on a l'égalité des points terminaux :

$$\mathcal{P}_{w_0} \eta(T) = \eta(T) + \sum_{j=1}^q y_j \beta_j \quad (48)$$

• En particulier, η est un chemin dominant si et seulement si $y_j = 0$ pour tout $j \in \llbracket 1, q \rrbracket$.

Démonstration. En suivant la même construction que pour (38), on peut écrire avec les nouvelles notations :

$$\mathcal{D}_{w_0} \eta(T) = \eta(T) + \sum_{j=1}^q y_j \beta_j$$

On peut aussi rappeler que $\mathcal{D}_{w_0} = w_0 \mathcal{E}_{w_0}$ et donc par la propriété du point terminal (42) :

$$\mathcal{P}_{w_0} \eta(T) = w_0 \mathcal{E}_{w_0} \eta(T) = \mathcal{D}_{w_0} \eta(T) = \eta(T) + \sum_{j=1}^q y_j \beta_j$$

Comme un chemin η est dominant si et seulement si $\mathcal{P}_{w_0} \eta(T) = \eta(T)$, on en déduit que cette égalité tient si et seulement si $\sum_{j=1}^q y_j \beta_j = 0$. Or comme y_j et β_j sont positifs, on en déduit que c'est équivalent à demander $y_j = 0$ pour tout j . \square

Première démonstration du théorème de représentation du mouvement brownien :

On considère maintenant des chemins définis sur $[0, +\infty[$ et non plus sur $[0, T]$. Les définitions des transformations \mathcal{P}_α , \mathcal{P}_{w_0} , D_α et D_{w_0} s'adaptent naturellement sur $[0, +\infty[$. Vérifions que l'on peut aussi étendre la définition de \mathcal{D}_β à $[0, +\infty[$: Soit $\pi : [0, +\infty[\rightarrow V$ un chemin

tel que $\pi(0) = 0$ et tel que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \alpha^\vee(\pi(t)) = +\infty$ pour toute racine simple α . Pour de tels chemins et pour β une racine positive on peut définir :

$$\mathcal{D}_\beta \pi(t) := \pi(t) + \inf_{s \geq t} \beta^\vee(\pi(s) - \pi(t))\beta - \inf_{s \geq 0} \beta^\vee(\pi(s))\beta$$

On définit ensuite $\mathcal{D}_{w_0} := \mathcal{D}_{\beta_1} \cdots \mathcal{D}_{\beta_q}$ comme précédemment.

On énonce ci-dessous deux lemmes que l'on admet, dont on pourra trouver la démonstration dans la section 5 de l'article de Biane-Bougerol-O'Connell [1] :

Lemme 14. *Si π est un chemin dominant, alors $D_{w_0} \mathcal{D}_{w_0} \pi = \pi$.*

Lemme 15. *Si X est un mouvement brownien avec drift dans la chambre de Weyl \mathcal{C} , alors $\mathcal{D}_{w_0} X$ a la même distribution que X . De plus, $\mathcal{D}_{w_0} X$ est indépendant de la famille de variables aléatoires : $\{\inf_{t \geq 0} \alpha^\vee(X_t) \mid \alpha \text{ racine simple}\}$.*

On peut maintenant donner une première preuve du théorème de représentation :

Théorème 12 (Th. de représentation du mouvement brownien dans une chambre de Weyl). *Soit X un mouvement brownien à valeurs dans V . Alors $\mathcal{P}_{w_0} X$ est un mouvement brownien dans $\bar{\mathcal{C}}$ la chambre de Weyl fondamentale (fermée).*

Démonstration. Soit $x, \xi \in \mathcal{C}$ et soit X un mouvement brownien avec drift ξ . L'événement $\{X \text{ reste tout le temps dans le cône } C\}$ peut être réécrit en fonction des variables aléatoires $\{\inf_{t \geq 0} \alpha^\vee(X_t) \mid \alpha \text{ racine simple}\}$. En effet, par définition de la chambre de Weyl fondamentale (voir définition 23), si l'on note $\Delta := \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ les racines simples, la chambre de Weyl fondamentale est l'ensemble des $v \in V$ tels que $\alpha_j^\vee(v) > 0$ pour tout $j \in \llbracket 1, r \rrbracket$. Donc on peut réécrire :

$$\{X \text{ reste tout le temps dans le cône } C\} = \left\{ \inf_{t \geq 0} \alpha_j^\vee(X_t) \geq 0 \mid \forall j \in \llbracket 1, r \rrbracket \right\}$$

On note \mathcal{A} cet événement, qui est donc indépendant de $\mathcal{D}_{w_0} X$ par le lemme 15. Ainsi, si R a la même distribution que X conditionné à \mathcal{A} , alors $\mathcal{D}_{w_0} R$ a la même distribution que X . Si l'on fait tendre x et ξ vers 0, X devient un mouvement brownien sans drift et R un mouvement brownien dans $\bar{\mathcal{C}}$. Par continuité $\mathcal{D}_{w_0} R$ a la même distribution que X . Par le lemme 14, on obtient :

$$D_{w_0} \mathcal{D}_{w_0} R = R \text{ p.s.}$$

Donc $D_{w_0} X$ est un mouvement brownien dans $\bar{\mathcal{C}}$. Comme $D_{w_0} X = \mathcal{P}_{w_0} w_0 X$ et que w_0 laisse invariant la distribution du mouvement brownien (processus réfléchissant), on en déduit que $\mathcal{P}_{w_0} X$ est un mouvement brownien dans $\bar{\mathcal{C}}$. \square

Deuxième démonstration du théorème de représentation du mouvement brownien :

On résume ici les grandes étapes de la démonstration qui figure en détail dans la section 5 de l'article de Biane-Bougerol-O'Connell [1]. Cette démonstration se rapproche de celle pour le théorème de Pitman réalisée en section 2. En effet, elle utilise en particulier des marches aléatoires approchées que l'on fait converger vers le mouvement brownien grâce au théorème de Donsker comme en section 2.

On suppose que W est le groupe de Weyl d'une algèbre de Lie semi-simple \mathfrak{g} et que $V := \mathfrak{a}^*$. Soit $w \in P^+$ un poids dominant non nul (voir définition 45). On note R_w la mesure sur P définie par :

$$R_w(\mu) := m_\mu^w$$

où m_μ^w est la multiplicité du poids μ dans le module de plus haut poids w . On obtient une mesure de probabilité en divisant par la dimension de la représentation de plus haut poids w que l'on note $\dim w$:

$$v_w := \frac{R_w}{\dim w} \text{ est une mesure de probabilité sur } P$$

On considère ensuite une marche aléatoire $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur le réseau de poids P^+ où les incréments sont distribués relativement à la mesure de probabilité v_w . On suppose que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ commence en 0. Les probabilités de transitions de cette marche aléatoire sont alors données par :

$$p_w(\mu, \lambda) := \frac{m_{\lambda-\mu}^w}{\dim w}$$

Proposition 27. *Soit Y une chaîne de Markov sur P^+ commençant en 0 avec probabilités de transitions :*

$$q_w(\mu, \lambda) := \frac{\dim \lambda}{\dim \mu} \sum_{w \in W} p_w(\mu + \rho, w(\lambda + \rho))$$

où ρ est la moitié de la somme des poids dominants.

Alors, $\frac{Y_{\lfloor Nt \rfloor}}{\sqrt{N}}$ convergence en loi lorsque $N \rightarrow +\infty$ vers un mouvement brownien dans la chambre de Weyl fondamentale $\bar{\mathcal{C}}$.

Pour un poids dominant non nul w , on choisit un chemin dominant π^w défini sur $[0, 1]$ tel que $\pi^w(1) = w$. On note $B\pi^w$ le module de Littelmann pour π^w . On construit une marche aléatoire Z à valeurs dans P :

On choisit des chemins aléatoires indépendants $\eta_n \in B\pi^w$ avec une probabilité uniforme sur $B\pi^w$. On définit ensuite Z comme le chemin aléatoire obtenu par les concaténations $\eta_1 * \eta_2 * \dots$. En particulier, on a donc si $t \in [n, n+1]$:

$$Z(t) = \eta_1(1) + \eta_2(1) + \dots + \eta_{n-1}(1) + \eta_n(t - n)$$

La théorie de Littelmann implique que $\eta_n(1)$ est un poids aléatoire dans P avec distribution v_w et $(Z(n))_{n \in \mathbb{N}}$ est une marche aléatoire dans \mathfrak{a}^* avec incréments distribués avec v_w .

Théorème 13. *Le processus stochastique $(\mathcal{P}_{w_0} Z(n))_{n \in \mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov sur P^+ avec probabilités de transitions q_w .*

On peut alors donner une deuxième démonstration du théorème de représentation du mouvement brownien dans une chambre de Weyl :

Théorème 12 (Th. de représentation du mouvement brownien dans une chambre de Weyl). *Soit X un mouvement brownien à valeurs dans V . Alors $\mathcal{P}_{w_0} X$ est un mouvement brownien dans $\bar{\mathcal{C}}$ la chambre de Weyl fondamentale (fermée).*

Démonstration. D'après la proposition 27 appliquée à $Y := Z$, on obtient que $\frac{Z_{\lfloor Nt \rfloor}}{\sqrt{N}}$ converge vers un mouvement brownien dans \mathfrak{a}^* . Puis par le théorème 13, le processus $(\mathcal{P}_{w_0} Z(n))_{n \in \mathbb{N}}$ est distribué comme une chaîne de Markov avec probabilités de transitions q_w et on peut donc appliquer la proposition 27 à $Y := \mathcal{P}_{w_0} Z$. On obtient alors que $\frac{\mathcal{P}_{w_0} Z(\lfloor Nt \rfloor)}{\sqrt{N}}$ converge vers un mouvement brownien dans la chambre de Weyl $\bar{\mathcal{C}}$. Comme \mathcal{P}_{w_0} commute avec le changement d'échelle effectué, on en déduit que $\mathcal{P}_{w_0} Z$ est un mouvement brownien dans $\bar{\mathcal{C}}$ et le théorème est démontré. \square

7 Conclusion

La deuxième section de ce mémoire nous a permis de mettre en lumière une méthodologie de preuve novatrice apportée par J. W. Pitman. En effet, l'idée clé à retenir est de partir de processus discrets et de les faire tendre vers des processus continus grâce au théorème de Donsker. L'idée importante de Pitman est alors d'établir une égalité des processus limites pour obtenir l'égalité en loi des processus stochastiques du mouvement brownien sous transformation de Pitman d'une part et du processus de Bessel d'autre part.

La troisième section nous a familiarisé avec la transformation de Pitman associée à un couple (α, α^\vee) et permis d'entrevoir ses premières propriétés. On retiendra en particulier la propriété d'entrelacement de « tresse », ainsi que l'importante inversion de Biane-Bougerol-O'Connell qui permet de reconstruire un antécédent avec la seule donnée du chemin image et de la « coordonnée en corde ». Cette section nous a permis aussi de généraliser la définition de la transformation de Pitman pour une composition de réflexions appartenant à un groupe de Coxeter. La méthode pour justifier cette généralisation réside dans la proposition 9 que l'on doit à Matsumoto.

La quatrième section du mémoire fut consacrée aux opérateurs de Littelmann. On a pu comprendre leurs constructions en détail avec notamment des figures que l'on a tracées. On retiendra que l'importance de ces opérateurs couplée avec l'inversion de Biane-Bougerol-O'Connell, permet d'établir facilement des égalités entre opérateurs sur les chemins. En effet, au lieu de vérifier l'égalité des opérateurs sur un chemin donné, la définition 14 des opérateurs de Littelmann généralisés permet de vérifier seulement deux conditions, plus maniables en pratique comme on peut le remarquer en propositions 13 et 14.

La cinquième section nous a permis de comprendre de nouveaux concepts. Elle a un objectif introductif au vocabulaire des algèbres de Lie et en particulier sur les systèmes de racines et les chambres de Weyl. On y retiendra en particulier les effets de l'action d'un groupe de Weyl sur une chambre de Weyl ainsi que les décompositions en espaces radiciels pour une algèbre de Lie. Cette section nous a permis aussi d'introduire les notions de représentation d'algèbre de Lie et de représentation de plus haut poids. On y trouvera aussi une formule de représentation théorique pour la transformation de Pitman en théorème 10.

Enfin, la sixième et dernière section nous a introduit à plusieurs nouvelles transformations sur les chemins. On soulignera le rôle important de la co-transformation de Pitman pour la propriété du point terminal, démontrée en proposition 23. Cette propriété est en effet un point central dans la preuve du théorème de représentation du mouvement brownien dans une chambre de Weyl. Plus précisément, son rôle sert notamment à la caractérisation des chemins dominants en proposition 26 qui est ensuite utilisée pour la première preuve du théorème. Nous avons tenu à faire figurer une deuxième preuve du théorème qui consiste à approcher un mouvement brownien dans la chambre de Weyl fondamentale par des marches aléatoires à l'aide du théorème de Donsker. Cela fait ainsi écho à la méthodologie initiée par Pitman dans son théorème de 1975.

Table des figures

1	Représentations des points $\rho_\delta^{(m)}(w)$ pour une fonction $w \in C^*$	6
2	Intuition de la proposition 3 grâce à la remarque 1	6
3	Fonction $V_\delta(w)$ correspondante à la fonction w de la figure 1	10
4	Représentation (en gris) d'une chaîne de Markov (X_n) et de sa transformation de Pitman (Z_n) correspondante (en bleu)	14
5	Effet de la (nouvelle) transformation de Pitman sur la chaîne de Markov (X_n)	17
6	Opérateur de Littelmann e_α	31
7	Opérateur de Littelmann f_α	32
8	Les quatre seules possibilités pour un système de racines de rang 2	37
9	Chambres de Weyl pour un système de type A_2 ayant pour base $\{\alpha_1, \alpha_2\}$	38

Figures réalisées sous Geogebra et Paint

Références

- [1] **P. Biane, P. Bougerol et N. O'Connell** , *Littelmann Paths and Brownian Paths*, Duke Math. J. 130 (2005), no. 1, 127-167, arXiv :math/0403171
- [2] **J. W. Pitman**, *One-dimensional Brownian motion and the three-dimensional Bessel process*, Adv. in Appl. Probab. 7 (1975) ; 511-526, MR 0375485
- [3] **D. Williams**, *Path decomposition and continuity of local time for one-dimensional diffusions*, I. Proc London Math. Soc. (3) 28, (1974), 738-768.
- [4] **P. Bertin et P. Hoscheit**, *Mouvement brownien et processus de Bessel*, (2007), <https://fr.scribd.com/document/495024767/Hoscheit-Bertin>
- [5] **L. Gallardo**, *Mouvement brownien et calcul d'Itô*, Méthodes mathématiques. Ed. Hermann, (2008).
- [6] **I. Karatzas et S. E. Shreve**, *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, (1988).
- [7] **P. Billingsley**, *Convergence of probability measures*, Wiley, (1968).
- [8] **W. Whitt**, *Weak convergence of probability measures on the function space $C[0, \infty]$* , Ann. Math. Statist. 41, (1970), 939-944.
- [9] **J. Lamperti**, *A new class of probability limit theorems*, J. Math. Mech. 11, (1962), 749-772.
- [10] **P. Littelmann**, *Paths and root operators in representation theory*, Ann. of Math. (2) 142,(1995), 499-525. MR 1356780
- [11] **P. Littelmann**, *Cones, crystals, and patterns*, Transform. Groups 3, (1998), 145-179. MR 1628449
- [12] **P. Littelmann**, *The path model, the quantum Frobenius map and standard monomial theory*, Algebraic Groups and Their Representations, Cambridge, Nato Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci. 517, (1998), 175-212. MR 1670770
- [13] **M. Kashiwara**, *Crystal bases of modified quantized enveloping algebra*, Duke Math. J. 73, (1994), 383-413. MR 1262212
- [14] **J. Michel**, *Groupes de tresses, groupes réductifs et algèbres de Hecke*, Notes de cours 3ème cycle, 1998.
- [15] **N. Bourbaki**, *Groupes et Algèbres de Lie*, Chap. 4-5-6. Éléments de Mathématiques. Springer, (2007).
- [16] **C. Curtis et I. Reiner**, *Methods of Representation Theory*, Vol.1 Wiley. New York, 1990 (Théorème 64.28)
- [17] **F. Knop**, *On the set of orbits for a Borel subgroup*, Comment. Math. Helv, 70, (1995), 285-309. MR 1324631
- [18] **B. C. Hall**, *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations*, Graduate Texts in Mathematics (GTM), Springer, 2nd edition (2015).
- [19] **J.-P. Serre**, *Algèbres de Lie semi-simples complexes*, Benjamin, (1966).
- [20] **A. Berenstein et A. Zelevinsky**, *Tensor product multiplicities, canonical bases and totally positive varieties*, Invent. Math. 143, (2001), 77-128, MR 1802793