Université de Paris
UFR de Mathématiques et Informatique

Licence 2ème année, 2020-2021, parcours Informatique,
Probabilités et statistique pour l'informatique,

Feuille de TD n°3 : Indépendance d'événements, variables aléatoires

Exercice 1 Une auto-école présente le même jour trois candidats au permis : André, Denis et Nicole. Sur la base des performances précédentes, le directeur estime les probabilités de succès : pour André 0.7, pour Denis 0.5, pour Nicole 0.9. Quelles sont les probabilités des événements suivants :

1. $B =$"Denis est le seul à réussir",
2. $R =$"Les trois condidats réussissent",
3. $E =$"les trois candidats échouent",
4. $P =$"au moins un candidat est reçu" ?

Exercice 2 Jean s'habille très vite le matin et prend au hasard un pantalon, un tee-shirt, une paire de chaussettes. Il y a dans son armoire 5 pantalons dont 2 noirs, 6 tee-shirts dont 4 noirs, et 8 paires de chaussettes dont 5 paires noires.

1. Quelle est la probabilité qu'il soit tout en noir ? On commencera par introduire les évènements appropriés.
2. Quelle est la probabilité qu'il ait une seule pièce noire ?

Exercice 3 Trois étudiants x, y et z attendent dans une file à la porte du secrétariat. On considère les deux événements

— A : "y attend derrière x"
— B : "z attend derrière x"

("derrière" ne veut pas forcément dire "juste derrière")

On suppose qu'il y a équiprobabilité sur l'ordre d'arrivée des étudiants. Les événements A et B sont-ils indépendants ? On commencera par déterminer l'univers Ω.

Exercice 4 Un couple a deux enfants.

1. Les événements $A =$ "Ce couple a au moins un fils" et $B =$ "Ce couple a au moins une fille" sont-ils indépendants ?
2. On suppose que l'un des deux enfants est une fille. Quelle est la probabilité que l'autre enfant soit un fils ?
3. Est-ce que cette probabilité change si on nous apprend que l'aînée est née un mardi ?

Exercice 5 Dans la mémoire d'un ordinateur, on appelle quartet un ensemble de 4 bits (prenant chacun la valeur 0 ou 1). On suppose que la mémoire de l'ordinateur n'a pas été initialisée. Ainsi, tous les bits de la mémoire se trouvent, indépendamment, dans l'état 1 avec probabilité $p \in [0, 1]$. On considère un quartet pris au hasard et on note X le nombre entier dont ce quartet est l'écriture en base 2.

1. Quelles valeurs peut prendre X ?
2. Calculer la probabilité que X soit impair puis $\mathbb{P}(X > 3)$.

Exercice 6 On lance une fois deux dés non pipés. Soit X la variable aléatoire égale au résultat du premier dé. Soit Y la variable aléatoire égale au résultat de la somme des deux dés. On pose $Z = (X - 3)^2$ et $W = Y^2$.

1) Quelle est la loi de W et son support ?
2) Donner la loi de Z et la représenter sous forme d'un graphique (diagramme en bâtons).

Exercice 7 Un fabricant d'ordinateurs importe des claviers de trois pays A, B et C, dans des proportions respectives $p_A = 0,3$, $p_B = 0,25$ et $p_C = 0,45$. Selon sa provenance, la probabilité qu'un clavier soit défectueux est, respectivement, de $q_A = 0,05$, $q_B = 0,08$ et $q_C = 0,09$.

1. Déterminer la probabilité qu'un clavier importé soit défectueux.
2. Un client a acheté deux claviers du même lot, mais il ne sais pas lequel. Il en teste un, qui est défectueux. Quelle est la probabilité que le second le soit aussi ? On supposera que chaque lot comporte plusieurs milliers de claviers.

Exercice 8 On lance une fois un dé non pipé.

1. On suppose qu'on reçoit 15 euros si on obtient 1, rien si on obtient 2,3 ou 4, et 6 euros si on obtient 5 ou 6. Soit G la variable aléatoire égale au gain de ce jeu. Quelle est la loi de G ? Que vaut le gain moyen ?
2. Mêmes questions en supposant qu'on gagne 27 euros pour un 1 et rien sinon. Préférez vous jouer au jeu du 1) ou à celui-ci ?

Exercice 9 On considère un sac contenant deux boules rouges et quatre boules noires, indiscernables au toucher.

1) On tire successivement une boule, **avec remise**, jusqu'à obtenir une boule rouge. On note X son rang d'apparition. Déterminer la loi de ce rang.
2) On tire successivement une boule, **sans remise**, jusqu'à obtenir une boule rouge, et on note X son rang d'apparition. Déterminer la loi de ce rang.

Exercice 10 Les étudiants d'un cours de probabilités sont répartis en trois groupes pour les séances d'exercices, comprenant respectivement 25, 30 et 35 étudiants. On choisit au hasard un étudiant du cours et on note X le nombre d'étudiants de son groupe. Calculer la loi et l'espérance de X. Cette espérance est-elle égale à la moyenne du nombre d'étudiants par groupe ?