T.D. 5 - Fonctions de répartition, lois à densité.

Exercice 1.

On observe au cours du temps la suite des variables $(X_i)_{i\geq 1}$ qui sont indépendantes et de fonction de répartition commune F.

1. Quelle est la fonction de répartition de la variable $Y_n = \max\{X_i, 1 \leq i \leq n\}$?
2. Celle de la variable $Z_n = \min\{X_i, 1 \leq i \leq n\}$?

Exercice 2.

Soit X une variable aléatoire dont la densité de probabilité est donnée par :

$$f_X(x) = \begin{cases} cx & \text{si } \ x \in \left[0, \frac{1}{2}\right[, \\ c(1-x) & \text{si } \ x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Que vaut c ? Représenter sur un graphique la fonction f_X.
2. Calculer et représenter la fonction de répartition de X.
3. En déduire $P(\frac{1}{4} \leq X \leq \frac{3}{4})$ et $P(\frac{3}{4} \leq X \leq \frac{5}{4})$.

Exercice 3.

Soit X une variable aléatoire gaussienne centrée réduite, $a > 0$ et m un réel.

1. Montrer que aX a pour loi $\mathcal{N}(0, a^2)$.
2. Montrer que $aX + m$ a pour loi $\mathcal{N}(m, a^2)$.

Exercice 4.

Dans ce problème, les durées des trajets sont supposées de loi normale.

1. Une directrice de société habite dans la ville A. Elle part de chez elle à 8h45 et se rend en voiture à son bureau qui ouvre à 9h. La durée de son trajet est, en moyenne, de 13 minutes,avec un écart-type de 3 minutes. Quelle est la probabilité qu'elle arrive en retard ?
2. Son assistant habite dans la même ville mais suit un trajet différent. Il prend un train à 8h30 et descend à la station B. Il prend ensuite le bus qui part de B à 8h50 (que le train soit à l'heure ou non) et qui arrive à son bureau. La durée du trajet en train est en moyenne 16 minutes, avec un écart-type de deux minutes. Le trajet du bus est en moyenne 9 minutes et son écart-type est d'une minute. Quelle est la probabilité que l'assistant arrive à l'heure ?
3. Quelle est la probabilité que les deux arrivent à l'heure, les durées de leurs trajets étant supposées indépendantes ?

Exercice 5.

Il est courant d'utiliser la loi exponentielle comme loi de durée de vie d'un matériel électronique. Soit $\lambda > 0$, et X une variable de loi $\mathcal{E}(\lambda)$.

1. Donner la fonction de répartition de X, son espérance et sa variance.
2. Calculer $P(X \geq t + s | X \geq t)$, pour $s, t > 0$.

3. On dispose de deux appareils dont la durée de vie est une loi exponentielle de même paramétre. L'un est tout neuf alors que l'autre a vécu déjà 5 ans. Lequel a le plus de chances de flancher lors de la prochaine année ? Pourquoi dit-on que la loi exponentielle est sans mémoire ?

Exercice 6.

Un matériel comprend n composants dont les durées de vie (temps écoulé avant une panne) X_i sont supposées indépendantes et de lois $\mathcal{E}(\lambda_i)$, $1 \leq i \leq n$. Le matériel tombe en panne dès que l'un de ses composants est en panne. On note Y la durée de vie de ce matériel.

1. Calculer la fonction de répartition de Y.
2. Quelle est la loi de Y , son espérance et sa variance ?
3. On suppose qu'un ordinateur a 5 composants cruciaux, qui ont chacun une durée de vie moyenne de 10 ans. Selon le modèle précédent, quelle est la durée de vie moyenne de l'ordinateur ?

Exercice 7.

Soit X une variable continue de densité $f_X(x) = Ke^{-x^2+4x}$, $x \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer K.
2. Donner la loi et les paramètres de X.

Exercice 8.

Soit X une variable aléatoire dont la fonction de répartition F_X est donnée par :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ x < 0, \\ \frac{x}{2} & \text{si } \ x \in [0, 1[, \\ 1 & \text{si } \ x \geq 1. \end{cases}$$

1. Représenter le graphe de F_X. Donner le support de X (c'est un ensemble fermé).
2. Montrer que X n'est pas une variable discrète.
3. Montrer que X n'est pas une variable à densité.

Exercice 9.

Pour quelles valeurs de c les fonctions suivantes sont-elles des densités de probabilité ? Calculer leur espérance et leur variance quand cela est possible.

1. $f_1(x) = cx^k, \ 0 \leq x \leq 1, \ k \in \mathbb{N}^*$.
2. $f_2(x) = ce^{-|x|}, \ x \in \mathbb{R}$.