T.D. 6 - Lois de couples, lois conditionnelles.

Exercice 1.

Soient X et Y deux variables aléatoires dont les lois sont données par

$$\begin{array}{ll} P(X=1)=0.6 & P(Y=1)=0.4 \\ P(X=2)=0.2 & P(Y=2)=0.5 \\ P(X=3)=0.2 & P(Y=3)=0.1 \end{array}$$

1. La loi du couple (X, Y) est donnée par l'un des tableaux suivants. Lequel ?

A

y \ x	1	2	3
1	0.5	0	0.1
2	0.2	0.1	0
3	0.1	0	0

B

y \ x	1	2	3
1	0.5	0	0.1
2	0	0.1	0
3	0.1	0	0

C

y \ x	1	2	3
1	0.2	0.1	0.1
2	0.3	0.1	0.1
3	0.1	0	0

D

y \ x	1	2	3
1	1	0	0
2	0	1	0
3	0	0	1

1. Quel serait le tableau de la loi du couple (X, Y) si les variables X et Y étaient indépendantes ?
2. Parmi les autres tableaux, déterminer lesquels peuvent correspondre à la loi d'un couple de variables. Lorsque c'est le cas, donner les lois marginales correspondantes.

Exercice 2.

On lance n fois un dé à six faces et on note : X le nombre de fois que l'on obtient un résultat pair, et Y le nombre de fois que l'on obtient un résultat inférieur ou égal à 3.

1. Quelles sont les lois de X et Y ?
2. Calculer $P(X = 0, Y = 0)$. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Pour $n = 2$, déterminer la loi du couple (X, Y) (on donnera les résultats sous forme de tableau)

Exercice 3.

On considère que sur un groupe de TD de n étudiants, il y a en moyenne $\frac{1}{2}n$ étudiants qui passent la matière, et en moyenne $\frac{7}{10}n$ qui possèdent un smartphone dernière génération. On considère que sur la promotion 2019-2020, chaque étudiant est indépendant des autres, et on appelle p la probabilité qu'il réussisse ET qu'il ait un smartphone.

1. Que vaudrait p si le fait de réussir était indépendant du fait d'avoir un smartphone ?
2. On observe qu'en moyenne, sur un groupe de 20 étudiants, seuls 6 réussissent et ont un smartphone en même temps. Que vaut p ?
3. Quelle est la corrélation entre le nombre d'étudiants qui réussissent et le nombre d'étudiants qui ont un smartphone sur le groupe de 20 étudiants ? (On pourra écrire les variables binomiales comme des sommes de variables de Bernoulli indépendantes.) Est-ce que ça vous semble significatif ?

Exercice 4.

Un appareil dénombre les particules radioactives γ provenant du Soleil et arrivant sur Terre sur la surface du capteur (*Un tel appareil est visionnable au Palais de la Découverte*). Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n le nombre de particules détectées entre les instants 0 et n. On note $X_0 = 0$. On suppose qu'il existe $\lambda > 0$ tel que, pour tout couple $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ avec $0 \leq m \leq n$:

— La variable aléatoire $X_n - X_m$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda(n-m)$;

— Les variables X_m et $X_n - X_m$ sont indépendantes.

Soit $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $0 \leq m \leq n$.

1. Calculer la covariance de X_n et X_m.
2. Déterminer la loi du couple (X_m, X_n).
3. Soit N la variable aléatoire prenant la valeur du plus petit entier non nul k tel que le capteur ait détecté au moins une particule entre les instants 0 et k. Déterminer la loi de N et calculer son espérance.

Exercice 5.

Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes qui ont une espérance et une variance finie.

1. A votre avis, les variables X et $X+Y$ sont-elles positivement corrélées (sans calcul) ? Calculer leur corrélation.
2. On suppose que X et Y sont identiquement distribuées, c'est-à-dire de même loi.
   (a) Les variables $X-Y$ et $X+Y$ sont-elles corrélées ?
   (b) Sont-elles indépendantes en général (on pourra considérer par exemple le cas de variables binomiales) ?

Exercice 6.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $(X_1, \ldots, X_n)$ des variables de Bernoulli indépendantes de paramètre $p \in]0,1[$ et $(Y_1, \ldots, Y_n)$ une seconde série de variables de Bernoulli indépendantes de paramètre $q \in]0,1[$. Les variables X_i et Y_j sont supposées indépendantes pour $i = 1, \ldots n$ et $j = 1, \ldots, n$. Pour $1 \leq i \leq n$, on pose

$$Z_i = \begin{cases} 1 \text{ si } X_i = 1 \text{ et } Y_i = 1, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

   Quelles sont les lois des variables Z_i ? Les variables Z_i sont-elles indépendantes ?
2. On suppose que X est régie par une loi binomiale de paramètres n et p, et que pour chaque k fixé (avec $0 \leq k \leq n$), la loi conditionnelle de Y sachant $X = k$ est une loi binomiale de paramètres k et q. Déterminer la loi de Y.
3. Deux tests de détection d'une maladie sont disponibles. Le premier déclare malade un individu sain avec probabilité p, le second avec probabilité q. Si un individu est déclaré malade par le premier test on pratique le second. Sur un groupe de n personnes saines quelle est la loi du nombre de personnes déclarées malades à tort ?