T.D. 7 - Lois des Grands Nombres et Estimation

Exercice 1.

Une marche aléatoire sur un axe consiste en l'expérience suivante : on part (étape $n = 0$) de la position origine, puis à chaque étape on ajoute 1 avec probabilité p ou on retranche 1 avec probabilité $1 - p$. On note Y_n la position obtenue à l'étape n, et Z_n le nombre de fois où on a ajouté 1 jusqu'à l'étape n.

1. Quelle est la loi de Z_n ? Exprimer Y_n en fonction de Z_n.
2. Montrer que $Y_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ où les X_k sont des variables indépendantes et identiquement distribuées dont on donnera la loi.
3. En déduire que $\frac{1}{n} Y_n$ converge presque sûrement vers une constante à déterminer.

Exercice 2.

Des ornithologues tentent d'estimer le nombre N d'oiseaux présents dans une réserve naturelle. Pour cela, ils commencent par capturer q oiseaux, auxquels ils accrochent un petit bracelet autour de la patte, puis ils les relâchent. Par la suite ils procèdent de la manière suivante. Ils capturent des oiseaux au hasard dans la réserve, au nombre de n, et notent $X_i = 1$ si le i-eme oiseau capturé possède un bracelet, et $X_i = 0$ sinon. Ils relâchent ensuite l'oiseau.

1. Par quelle loi modéliser la variable X_i ? Ecrivez la loi des grands nombres pour les X_i.
2. On suppose que $q = 100$ et que les ornithologues ont capturé $n = 500$ oiseaux supplémentaires parmi lesquels ils ont trouvé 12 oiseaux portant un bracelet. En déduire une estimation du nombre total N d'oiseaux dans la réserve.

Exercice 3.

On observe $(X_1, \ldots, X_n)$ un n-échantillon de loi uniforme sur l'intervalle $[0, b]$. L'objet de cet exercice est d'estimer le paramètre inconnu b. On pose $B_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$.

1. Rappeler la fonction de répartition de X_1.
2. Calculer la fonction de répartition de B_n et en déduire sa densité.
3. Calculer l'espérance de B_n. En déduire que B_n est un estimateur biaisé de b. On admettra que B_n converge vers b.
4. Déduire de B_n un estimateur B'_n sans biais de b.

Exercice 4.

Soit X une variable aléatoire réelle ayant pour densité $f_X(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{x^2+1}$, pour tout réel x. Cette loi s'appelle loi de Cauchy.

1. Vérifier que f_X est bien une densité de probabilité. On rappelle que la primitive de $\frac{1}{x^2+1}$ est $\arctan(x)$.
2. Calculer $\mathbb{E}(|X|)$. L'espérance est-elle définie ? Peut-on appliquer la loi des grands nombres ?

Exercice 5.

Soit $(X_k, k \geq 1)$ une suite de variables i.i.d. dont la loi commune a pour densité

$$f(x) = c\, e^{-\lambda\, |x-a|},$$

où $c > 0$ et où les paramètres $\lambda > 0$ et $a \in \mathbb{R}$ sont inconnus.

1. Calculer la valeur de c en fonction des autres paramètres.
2. Calculer $\mathbb{E}(X_1)$ et en déduire un estimateur de a. Montre que l'estimateur de a converge presque sûrement vers a lorsque n tend vers l'infini.
3. Calculer $V(X_1)$ et donner un estimateur de λ.