T.D. 8 - Estimation et Intervalles de confiance

Exercice 1.

Soit $(X_n, n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de Poisson de paramètre λ. On note $\bar{X}_n = (X_1 + \ldots + X_n)/n$.

1. Calculer l'espérance et la variance de $\bar{X}_n$.
2. Montrer que $\bar{X}_n$ converge presque sûrement vers λ.
3. Montrer que $\dfrac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \lambda)}{\sqrt{\lambda}}$ converge en loi vers une variable gaussienne standard.
4. Quelle est la loi exacte de $n\bar{X}_n$? En calculant de deux manières $\mathbb{P}(\bar{X}_n \leq 1)$ pour $\lambda = 1$, montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} e^{-n}\left(1 + n + \frac{n^2}{2!} + \cdots + \frac{n^n}{n!}\right) = \frac{1}{2}.$$

Exercice 2.

On effectue un sondage sur n personnes choisies de façon indépendante. On émet l'hypothèse que la probabilité p de répondre OUI à la question posée est la même dans toute la population. On note S_n le nombre de personnes répondant OUI et on estime p par la proportion empirique S_n/n.

1. Montrer que S_n/n converge presque sûrement vers p et que c'est une estimateur sans biais de p.
2. Montrer que $\sqrt{n}(S_n/n - p)$ converge en loi vers une Gaussienne dont on précisera les paramètres.
3. On rappelle que si X suit une loi $\mathcal{N}(0,1)$, alors $\mathbb{P}(|X| \leq 1.96) \simeq 95\%$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}S_n - p\right| \leq 1.96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right) \simeq 95\%.$$

4. Quelle précision sur la valeur de p obtient-on ainsi en prenant l'estimation S_n/n ?

Exercice 3.

Des gendarmes placent un radar au bord d'une autoroute afin de détecter les excès de vitesse commis à cet endroit. On suppose que le nombre d'excès de vitesse commis durant une journée est une variable de Poisson de paramètre $\lambda = 2.7$.

1. Quelle est la loi du nombre d'excès de vitesse enregistrés durant une année ? On fera l'hypothèse d'indépendance qui s'impose.
2. Donner une approximation de la probabilité pour que le nombre d'excès de vitesse enregistrés durant une année soit plus grand que 1000.

Exercice 4.

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et donc bornée. Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ une suite de variable aléatoires indépendantes, de loi uniforme sur $[0,1]$. On pose

$$I_n = \frac{f(U_1) + \cdots + f(U_n)}{n}.$$

Que vaut $\mathbb{E}[f(U_1)]$? Montrer que I_n est un estimateur consistant de l'intégrale de f sur $[0,1]$.

Exercice 5.

Un vol Marseille-Paris est assuré par un Airbus de 150 places ; pour ce vol, des estimations ont montré que la probabilité pour qu'une personne confirme son billet est $p = 0.75$. La compagnie vend n billets, $n > 150$. Soit X la variable aléatoire "nombre de personnes parmi les n possibles, ayant confirmé leur réservation pour ce vol".

1. Quelle est la loi suivie par X ?
2. Quel est le nombre maximum de places que la compagnie peut vendre pour que, à au moins 95%, elle soit sûre que tout le monde puisse monter dans l'avion, c'est-à-dire n tel que :

$$P[X > 150] \leq 0.05?$$

(On rappelle que si Z suit une loi $\mathcal{N}(0,1)$, alors $\mathbb{P}(Z \leq 1.645) \simeq 95\%$.)

Exercice 6.

Un fabricant de composants informatiques cherche à estimer la durée de vie moyenne de ses produits. En mesurant sur 20 produits choisis au hasard il mesure les quantités suivantes :

$$2.74,\ 1.64,\ 1.46,\ 2.80,\ 13.70,\ 5.35,\ 0.69,\ 1.70,\ 1.68,\ 6.05,$$
$$2.42,\ 2.26,\ 2.28,\ 4.53,\ 1.46,\ 8.35,\ 8.25,\ 4.23,\ 1.93,\ 2.79,$$

Comment estimer la durée de vie moyenne avec un niveau de 10% ? Pour l'estimation, le constructeur est à peu près sur que ses composants tiennent en moyenne moins de 6 ans.

Exercice 7.

On s'intéresse au problème de la planche de Galton. Il s'agit d'une planche présentant N rangés de clous espacés de 1cm, avec une infinité de clous par rangée. Les clous sont plantés de telle sorte qu'une bille lâchée sur la planche passe soit à droite soit à gauche, avec la même probabilité, pour chaque rangée de clous (voir schéma).

1. On fait tomber une bille dans la planche et on pose X sa position à la fin de la planche. Quelle est la loi de X ? On pourra écrire X comme une somme de variable aléatoire.
2. En supposant N grand et en resserrant les positions finale d'un facteur $N^{-1/2}$ (on posera $Y = X/\sqrt{N}$), montrer que l'on peut approcher la distribution de X par une distribution gaussienne dont on précisera les paramètres.
3. À présent, on lâche successivement n billes. À la fin de la planche, les billes s'empilent dans des compartiments en fonction de leur position finale. Quelle courbe se dessine alors avec le niveau des billes ?