 et 

→ $\mathrm{Isom}(T) \simeq \mathfrak{S}_4$ en regardant l'action sur les sommets

→ $\mathrm{Isom}^+(T) \simeq \mathfrak{A}_4$ en regardant $\det \circ \phi^{-1}$ qui doit $= \varepsilon$.

→ $\mathrm{Isom}(C)/_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \simeq \mathfrak{S}_4$ avec action de gpe naturelle

→ conclusion avec le lemme sur les produits directs de groupes.

**Prérequis**

- Def de $\mathrm{Isom}(X)$ et $\mathrm{Isom}^+(X)$
- Applications affines avec repères affines et barycentres
- Ssgpes distingués et gpe produit, conditions pour avoir un groupe et un isomorphisme

# Isométries du cube et du tétraèdre

H2G2 / NH2G2

Lire H2G2 pour savoir à quoi ça sert

DEV 1

**Def** : Dans $\mathbb{R}^3$, on appelle solide platonicien un polyèdre de dimension 3 (ie d'intérieur non vide), régulier (faces identiques et régulières) et convexe.

**Def** : Le groupe $\mathrm{Isom}(X)$ des isométries d'un objet $X \subset \mathbb{R}^3$ est le sous-groupe des isométries de l'espace affine euclidien $\mathbb{R}^3$ qui stabilisent $X$.

**Def** : isométrie d'un espace affine : $\varphi : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ avec $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ affines euclidiens tq

$$d(\varphi(A), \varphi(B)) = d(A, B) \quad \forall A, B \in \mathcal{E}.$$

**Rappel** : application affine entre $\mathcal{E}$ dirigé par $E$ et $\mathcal{F}$ dirigé par $F$. $\varphi : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ telle qu'il existe $O \in \mathcal{E}$ et $f : E \longrightarrow F$ linéaire telle que

$$\forall M \in \mathcal{E}, \quad f(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(M)}$$

En particulier, quand $\mathcal{E}$ est l'espace vectoriel muni de sa structure affine naturelle,

$\varphi$ affine ssi $\exists\, v_0 \in F$ et $f : E \longrightarrow F$ tq $\varphi(u) = f(u) + v_0 \quad \forall u \in E$. (★)

preuve

On choisit $O = 0 \in E$.

$\vec{\varphi}(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(M)}$ s'écrit $\vec{\varphi}(u) = \varphi(u) - \varphi(0)$ par def de la structure affine de l'ev $F$.

↑ appli linéaire associée

D'où $\varphi(u) = \vec{\varphi}(u) + \varphi(0) \quad \forall u \in E$. ∎

**Prop** : une application affine $\varphi$ est une isométrie ssi l'application linéaire associée est une isométrie vectorielle

En effet, pour $x, y \in E = \mathbb{R}^3$, affine, $d(\varphi(x), \varphi(y)) = \|\varphi(y) - \varphi(x)\|$ écriture (★)

$= \|f(y) - f(x)\|$ 

$= \|f(y-x)\|$ $f$ linéaire.

et $d(x,y) = \|y - x\|$. ∎

On notera $O(E)$ pour les isométries vectorielles, $\mathrm{Isom}(E)$ pour les isométries affines.

/!\ Un solide platonicien est défini à similitude près (isométrie + homothéties)
Il faut donc remarquer que :

(H2G2 t.1)

[ pour $X \subset \mathbb{R}^3$, et $\varphi$ une similitude, $\mathrm{Isom}(X) \simeq \mathrm{Isom}(\varphi(X))$

<u>preuve</u>

Posons $\phi : \mathrm{Isom}(X) \longrightarrow \mathrm{Isom}(\varphi(X))$
$g \longmapsto \varphi g \varphi^{-1}$

- <u>bien défini</u>
Pour $g \in \mathrm{Isom}(X)$, $\varphi g \varphi^{-1}(\varphi(X)) = \varphi(g(X)) = \varphi(X)$ donc stabilité ok
Ensuite, $\varphi$ est une similitude, donc on peut l'écrire comme composée d'une homothétie $\lambda$ et d'une isométrie $\psi$.
Donc $\varphi g \varphi^{-1} = \lambda \psi . g . \psi^{-1} \frac{1}{\lambda} = \psi g \psi^{-1}$ isométrie.
- <u>morphisme</u>
ok, intercaler $\varphi\varphi^{-1}$
- <u>injectif</u>
$\varphi g \varphi^{-1} = id \Rightarrow g = id$
- <u>surjectif</u> car inverse explicite : $h \longmapsto \varphi^{-1} h \varphi$.

<u>On admet la proposition suivante:</u>
Les points extrémaux d'un solide platonicien sont ses sommets.

<u>Rq</u> : Assez visuel. Sinon, doit pouvoir se voir avec les intersections de demi-espaces.

<u>Prop</u> :
Soit $X$ convexe et $\varphi \in \mathrm{Isom}(X)$. Alors $\varphi$ préserve l'ensemble des points extrémaux de $T$.

<u>preuve</u>

$\varphi \in \mathrm{Isom}(X)$ est une application affine, donc conserve les barycentres (cf + bas)
ie si $G$ est le barycentre de $(A_i, \lambda_i)_i$ alors $\varphi(G)$ est le barycentre de $(\varphi(A_i), \lambda_i)_i$
Soit $x$ un point extrémal de $T$. Supposons $\varphi(x)$ non extrémal.
Alors $\varphi(x)$ est barycentre non trivial de points de $T$.
$\varphi$ inversible, donc $x = \varphi^{-1}(\varphi(x))$ serait aussi barycentre non trivial de points de $T$ : absurde, $x$ est extrémal

Prop

Une application affine préserve les barycentres

preuve

Soit $\varphi$ application affine. on note $G$ le barycentre de $(A_i, \lambda_i)_i$.

$G, A_i \in \mathcal{E}$ On a donc $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0} \in E$

Alors $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{\varphi(G)\varphi(A_i)} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{\varphi}(\overrightarrow{GA_i}) = \vec{\varphi}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{GA_i}\right) = \vec{\varphi}(\vec{0}) = \vec{0}$

$\vec{\varphi}$ linéaire

Donc $\varphi(G)$ est bien le barycentre de $(\varphi(A_i), \lambda_i)_i$

Théorème 1

Soit $T$ un tétraèdre

Alors $\mathrm{Isom}(T) \simeq \mathfrak{S}_4$ et $\mathrm{Isom}^+(T) \simeq \mathfrak{A}_4$

preuve

- Une isométrie de $T$ préserve ses points extrémaux, donc ses sommets (ou : une isométrie de $T$ préserve les longueurs et le tétraèdre. Donc forcément les sommets ?)

  Donc $\mathcal{S} := \{A, B, C, D\}$ est stable par $\mathrm{Isom}(T)$ $\longrightarrow$ on peut faire agir

  $\Phi : \mathrm{Isom}(T) \longrightarrow \mathfrak{S}_{\mathcal{S}} \simeq \mathfrak{S}_4$, action naturelle

  Montrons que c'est un isomorphisme

- $\Phi$ injectif :

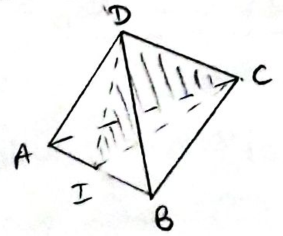
  Soit $\varphi \in \ker(\Phi)$. $\varphi$ fixe les sommets, donc le repère affine $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$.

  Donc $\varphi$ fixe tout l'espace affine $\rightarrow$ $\varphi = \mathrm{id}$

- $\Phi$ surjectif

  Il s'agit de montrer qu'on peut atteindre toutes les transpositions, car $\mathfrak{S}_4$ est engendré par les transpositions

  On considère la transposition $(AB)$, qui échange $A$ et $B$ et laisse fixe $C$ et $D$.




On considère $\varphi$ la réflexion par rapport au plan $IDC$, avec $I$ milieu de $[AB]$

. C'est une application affine : on considère le plan vectoriel $\mathrm{vect}(\overrightarrow{ID}, \overrightarrow{IC})$, $f$ la réflexion orthogonale p/r à ce plan et alors $\varphi(u) = f(u) + I$

- C'est une isométrie car $f$ en est une $\longrightarrow \varphi \in \mathrm{Isom}(T)$

- Alors $\varphi(A) = B$ et $\varphi(B) = A$ (calculs possibles via $f$)
et comme $D$ et $C$ sont invariants par $f$, $\varphi(D) = D$, $\varphi(C) = C$.

$\longrightarrow$ on obtient ainsi toutes les transpositions. $\boxed{\mathrm{Isom}(T) \simeq \mathfrak{S}_4}$
Comme $\Phi$ est un morphisme, $\Phi$ est bien surjectif.

- $\mathrm{Isom}^+(T)$

déf de $\mathrm{Isom}^+(T)$ : isométries affines dont le déterminant de l'isométrie vectorielle associée est positif.

$\det \circ \Phi^{-1} : \mathfrak{S}_4 \longrightarrow \mathbb{C}^*$ est un morphisme non trivial

Donc c'est la signature. (Car seulement deux morphismes de $\mathfrak{S}_4$ dans $\mathbb{C}^*$

à refaire

Donc $\det = \varepsilon \circ \Phi$

Mais $\mathrm{Isom}^+(T) = \ker(\det) \simeq \ker(\varepsilon) = \mathfrak{A}_4$ car $\Phi$ isomorphisme.

D'où $\boxed{\mathrm{Isom}^+(T) \simeq \mathfrak{A}_4}$.

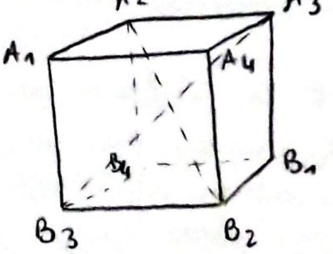
**Théorème 2**

Soit $C$ un cube.
Alors $\mathrm{Isom}(C) \simeq \mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $\mathrm{Isom}^+(C) \simeq \mathfrak{S}_4$

preuve

- Une isométrie stabilise encore l'ensemble des sommets du cube.
De plus, les longueurs sont conservées ; en particulier, deux extrémités d'une grande diagonale sont envoyées sur les deux extrémités d'une même grande diagonale.

On considère alors l'action de $\mathrm{Isom}(C)$ sur l'ensemble des grandes diagonales, noté $D$.




$\Phi : \mathrm{Isom}(C) \longrightarrow \mathfrak{S}_D \simeq \mathfrak{S}_4$

- Etude de $\ker \phi$

Soit $\varphi \in \ker \phi$. Alors $\varphi$ envoie chaque grande diagonale sur elle-m̄

On considère $D_1 = [A_1 B_1]$ $\quad f(D_1) = D_1$

Deux cas possibles :

- Si $f(A_1) = A_1$, $f(B_1) = B_1$ aussi. Pour chaque $i$, $f(A_i) = A_i$ ou $B_i$

Mais $d(f(A_i), A_1) = d(A_i, A_1)$ donc $f(A_i) = A_i \ \forall i$

et de même, $f(B_i) = B_i \ \forall i$.

Donc $f$ laisse invariant tous les sommets du cube, donc un repère affine $\longrightarrow f = id$.

- Si $f(A_1) = B_1$, alors $f(B_1) = A_1$ et par le même argument de conservation de longueur, $f(A_i) = B_i$ et $f(B_i) = A_i \ \forall i$.

Donc $f$ est la symétrie centrale p/r au centre du cube, notée $s$.

Donc $\ker \phi = \{id, s\} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ $\quad$ car $s^2 = 1$

- $\varphi$ surjective

On va encore une fois montrer qu'on peut réaliser toutes les permutations

Soit $D_1, D_2$ deux diagonales $D_3$ et $D_4$ les deux autres, que l'on veut conserver.

On considère le plan affine engendré par $D_3$ et $D_4$, et la reflexion affine par rapport à ce plan.

Alors $D_3$ et $D_4$ sont invariantes, et la reflexion intervertit $D_1$ et $D_2$.

(les plans $(D_1, D_2)$ et $(D_3, D_4)$ sont orthogonaux, car ils passent par deux diagonales ≠ d'une face, donc d'un carré, donc $\perp$.

D'où la surjectivité.

- Par le premier théorème d'isomorphisme, on a donc

$$\boxed{Isom(C)/_{\{id, s\}} \simeq \mathfrak{S}_4}$$

- De plus, $\ker(\phi|_{Isom^+(C)}) = \ker(\phi) \cap Isom^+(C) = \{id\}$

car $s \notin Isom^+(C)$ : dans une BON, $s \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Donc $\boxed{Isom^+(C) \simeq \mathfrak{S}_4.}$

- Pour conclure, on utilise un lemme :

Soit $N, H \triangleleft G$ tq $|N|.|H| = |G|$ et $N \cap H = \{e\}$.
Alors $G \simeq N \times H$

Parenthèse : preuve du lemme

Posons $\varphi : \begin{array}{ccc} N \times H & \longrightarrow & G \\ (n,h) & \longmapsto & nh \end{array}$

. $\varphi$ bien définie

. $\varphi$ injective

$nh = n'h' \Rightarrow \underset{N}{\underset{\cap}{n'^{-1}n}} = \underset{H}{\underset{\cap}{h'h^{-1}}} \in N \cap H = \{e\}$ donc $n = n'$, $h = h'$

. $\varphi$ surjective

Egalité des cardinaux + injectivité

. $\varphi$ morphisme

$\varphi((n,h)(n',h')) \underset{\text{def du produit direct}}{=} \varphi((nn', hh')) = nn'hh' \overset{?}{=} nhn'h'$

oui ssi $n'h = hn'$

ssi $h^{-1}n'hn'^{-1} = e$

Or, $\underbrace{h^{-1}n'h}_{\in N}\underbrace{n'^{-1}}_{\in N} \in N$ et $\underbrace{h^{-1}}_{\in H}\underbrace{n'hn'^{-1}}_{\in H} \in H$ donc $N \cap H = \{e\} \Rightarrow$ ok

car distingués

on applique le lemme avec

$G = Isom(C)$ (oui, c'est un gpe, car $O(E)$ en est un)

$N = Isom^+(C)$ distingué : multiplicativité du det

$H = \ker(\Phi)$ distingué : noyau d'un morphisme.

$|N|.|H| = \underbrace{\frac{|G|}{2}}_{\text{car gpe d'indice 2 (via le det)}} . 2 = |G|$

$N \cap H = \{e\} = \{id\}$, cf + haut.

D'où $Isom(C) \simeq Isom^+(C) \times \ker(\Phi) \simeq \mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$