5 Prolongement de la fonction Zêta de Riemann au plan complexe

La fonction ζ de Riemann est définie facilement sous forme d'une série pour les complexes de partie réelle strictement plus grande que 1. L'objet de ce développement est de montrer que cette fonction se prolonge en fait en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$, dont l'unique pôle se situe en 1 et est simple. Cette preuve est décrite dans le livre de Conway [3].

On utilisera pour ce développement les deux lemmes suivants :

Lemme 1
Pour $t \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\operatorname{cotan}\left(\frac{it}{2}\right) = \frac{2}{it} - 4it \sum_{n \geq 1} \frac{1}{t^2 + 4n^2\pi^2}$$

Ce lemme est démontré après le développement. Il repose essentiellement sur le théorème des Résidus, appliqué à un contour bien choisi.

Lemme 2
Pour tout $z \in \{\mathrm{Re}(z) \in]0,1[\}$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^z(1+t)} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

Ce dernier lemme est démontré dans la preuve de la formule des compléments, dans l'étape 2.

On cherche donc à démontrer le théorème suivant

Théorème 1
ζ admet un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$ admettant un pôle simple en 1.

Étape 1 (Relation fonctionnelle avec Gamma)
Soit $x \in]1, +\infty[$. On a vu dans la partie II de la leçon que pour un tel x, la fonction Gamma est bien définie sous sa forme intégrale.
On a $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} \,\mathrm{e}^{-t} \,\mathrm{d}t$.

Soit maintenant $n \in \mathbb{N}^*$. On a $n^{-x}\Gamma(x) = \int_0^\infty \left(\frac{t}{n}\right)^x \frac{1}{t} \,\mathrm{e}^{-t} \,\mathrm{d}t$.

Le changement de variable $u = \frac{t}{n}$ donne alors

$$n^{-x}\Gamma(x) = \int_0^\infty u^{x-1} \,\mathrm{e}^{-nu} \,\mathrm{d}u$$

On somme alors sur les $n \geq 1$, et on intervertit l'intégrale et la somme en appliquant le théorème de Fubini-Tonelli (l'intégrande est positive). On obtient :

$$\zeta(x)\Gamma(x) = \int_0^\infty u^{x-1} \sum_{n \geq 1} \mathrm{e}^{-nu} \,\mathrm{d}u = \int_0^\infty \frac{u^{x-1}}{e^u - 1} \mathrm{d}u \tag{1}$$

Or, la fonction $z \mapsto \int_0^\infty \frac{u^{z-1}}{e^u - 1} \mathrm{d}u$ est holomorphe sur $\mathrm{Re}(z) > 1$.

En effet, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(z) > 1$, il existe $A > \delta > 1$ tel que $A > \mathrm{Re}(z) > \delta > 1$. Alors

$$\left|\frac{u^{z-1}}{e^u - 1}\right| = \frac{u^{\mathrm{Re}(z)-1}}{e^u - 1} \leq \begin{cases} \frac{u^{A-1}}{e^u-1} & \text{Si } u \geq 1 \\ \frac{u^{\delta-1}}{e^u-1} & \text{Si } 0 < u < 1 \end{cases}$$

Or, ce dernier terme est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, car d'une part $\frac{u^{\delta-1}}{e^u-1} \underset{u\to 0}{\sim} u^{\delta-2}$ qui est intégrable sur $]0,1[$ puisque $\delta - 2 > 1 - 2 = -1$, et d'autre part $\frac{u^{A-1}}{e^u-1} \underset{u\to\infty}{\sim} u^{A-2}\,\mathrm{e}^{-u}$ qui est intégrable sur $]1,+\infty[$.

Donc l'intégrale à paramètre est holomorphe sur tout domaine de $\mathbb{C}$ de la forme $A > \mathrm{Re}(z) > \delta$, donc sur $\mathrm{Re}(z) > 1$.

Par ailleurs, les fonctions ζ et Γ sont également holomorphes sur ce domaine, donc leur produit l'est aussi.

L'équation (1) nous donne alors l'égalité de deux fonctions holomorphes sur un ensemble admettant l'axe $]1,+\infty[$ pour points d'accumulation, donc le théorème de prolongement analytique nous assure que

$$\zeta(z)\Gamma(z) = \int_0^\infty \frac{u^{z-1}}{e^u - 1}\mathrm{d}u \qquad \text{pour tout } z \text{ tel que } \mathrm{Re}(z) > 1$$

Étape 2 (Prolongement à $0 < \mathrm{Re}(z) < 1$)
Le problème à un prolongement immédiat avec la formule obtenue en (1) se situe dans l'intégration au voisinage de 0 lorsque z est proche de 1.

On cherche donc à s'affranchir de ce problème en découpant l'intégrale : Pour tout $z \in \mathrm{Re}(z) > 1$

$$\zeta(z)\Gamma(z) = \int_0^\infty \frac{u^{z-1}}{e^u - 1}\mathrm{d}u = \int_0^1 \frac{u^{z-1}}{e^u - 1}\mathrm{d}u + \int_1^\infty \frac{u^{z-1}}{e^u - 1}\mathrm{d}u$$

On va maintenant utiliser le développement limité de l'exponentielle au voisinage de 0 pour écrire

$$\frac{1}{e^u - 1} \underset{u\mapsto 0}{=} \frac{1}{u} - \frac{1}{2} + o(1) \tag{2}$$

En particulier, cela nous permet d'affirmer que $\frac{1}{e^u-1} - \frac{1}{u}$ est bornée au voisinage de 0.

Ainsi, on écrit

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{u^{z-1}}{e^u - 1}\mathrm{d}u &= \int_0^1 u^{z-1}\left(\frac{1}{e^u - 1} - \frac{1}{u}\right)\mathrm{d}u + \int_0^1 u^{z-1}\frac{1}{u}\mathrm{d}u \\ &= \int_0^1 u^{z-1}\left(\frac{1}{e^u - 1} - \frac{1}{u}\right)\mathrm{d}u + \frac{1}{z-1}\end{aligned}$$

On a donc finalement

$$\zeta(z)\Gamma(z) = \underbrace{\int_0^1 u^{z-1}\left(\frac{1}{e^u - 1} - \frac{1}{u}\right)\mathrm{d}u}_{\text{(a)}} + \underbrace{\frac{1}{z-1}}_{\text{Pôle en 1}} + \underbrace{\int_1^\infty \frac{u^{z-1}}{e^u - 1}\mathrm{d}u}_{\text{(b)}} \qquad \text{pour } \mathrm{Re}(z) > 1.$$

- (a) : Ce terme est holomorphe sur $\{\mathrm{Re}(z) > 0\}$. En effet, pour $z \in \{\mathrm{Re}(z) > 0\}$, il existe $\delta > 0$ tel que $\delta \leq \mathrm{Re}(z)$. Alors $|u^{z-1}|\left|\frac{1}{e^u-1} - \frac{1}{u}\right| \leq u^{\delta-1}M$ où M est une borne de $\frac{1}{e^u-1} - \frac{1}{u}$ sur $]0,1[$. Cette borne existe bien car on a vu que la fonction était bornée au voisinage de 0, et qu'elle est de plus continue sur $]0,1]$. On peut donc appliquer le théorème d'holomorphie sous le signe intégral, qui nous donne l'holomorphie du terme (a).
- (b) : Ce terme est également holomorphe sur $\{\mathrm{Re}(z) > 0\}$. Pour le montrer, on applique le théorème d'holomorphie sous l'intégrale en dominant sur des domaines de $\mathbb{C}$ de la forme $0 < \mathrm{Re}(z) \leq A$.

Par prolongement analytique, $\zeta.\Gamma$ est donc méromorphe sur $\mathrm{Re}(z) > 0$, avec un pôle simple en 1. De plus, Γ est holomorphe et ne s'annule pas sur $\mathrm{Re}(z) > 0$ donc pour tout $z \in \{\mathrm{Re}(z) > 0\}$,

$$\zeta(z) = \underbrace{\frac{1}{\Gamma(z)}}_{\textit{Holomorphe}} \times \underbrace{\left(\int_0^1 u^{z-1}\left(\frac{1}{e^u - 1} - \frac{1}{u}\right)\mathrm{d}u + \frac{1}{z-1} + \int_1^\infty \frac{u^{z-1}}{e^u - 1}\mathrm{d}u\right)}_{\text{Méromorphe}}$$

.

On a donc prolongé ζ en une fonction méromorphe sur $\mathrm{Re}(z) > 0$, avec un pôle simple en 1, de Résidu 1.

Étape 3 (Prolongement à $-1 < \mathrm{Re}(z) < 0$)
On réutilise la relation fonctionnelle obtenue à l'étape précédente pour $z \in \{0 < \mathrm{Re}(z) < 1\}$. On remarque que pour $-1 < \mathrm{Re}(z) < 1$, la fonction $u \mapsto u^{z-2}$ est intégrable sur $]1, +\infty[$ et que $-\int_1^\infty u^{z-2}\mathrm{d}u = \frac{1}{z-1}$.

On utilise cette remarque dans la relation fonctionnelle : pour $0 < \mathrm{Re}(z) < 1$, on a

$$\begin{aligned}\zeta(z)\Gamma(z) &= \int_0^1 u^{z-1}\left(\frac{1}{e^u - 1} - \frac{1}{u}\right)\mathrm{d}u - \int_1^\infty u^{z-2}\mathrm{d}u + \int_1^\infty \frac{u^{z-1}}{e^u - 1}\mathrm{d}u \\ &= \int_0^1 u^{z-1}\left(\frac{1}{e^u - 1} - \frac{1}{u} + \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}u - \int_0^1 \frac{u^{z-1}}{2}\mathrm{d}u + \int_1^\infty u^{z-1}\left(\frac{1}{e^u - 1} - \frac{1}{u}\right)\mathrm{d}u\end{aligned}$$

où on a, pour la dernière égalité, rajouté le terme suivant du développement de $\frac{1}{\mathrm{e}^u - 1}$ au voisinage de 0.

On développe à un ordre supérieur l'expression (2) : $\frac{1}{e^u - 1} \underset{u \mapsto 0}{=} \frac{1}{u} - \frac{1}{2} + O(u)$ qui nous permet d'affirmer que

$$u^{z-1}\left(\frac{1}{\mathrm{e}^u - 1} - \frac{1}{u} + \frac{1}{2}\right) \underset{u \to 0}{\sim} M u^z$$

qui est intégrable sur $]0, 1[$. Ainsi la fonction

$$z \mapsto \int_0^1 u^{z-1}\left(\frac{1}{e^u - 1} - \frac{1}{u} + \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}u$$

est holomorphe sur le domaine $-1 < \mathrm{Re}(z) < 1$ (Appliquer le théorème d'holomorphie sous l'intégrale en dominant sur un domaine de la forme $-1 < \delta \leq \mathrm{Re}(z) \leq 1$).

Par ailleurs, $\int_0^1 \frac{u^{z-1}}{2}\mathrm{d}u = -\frac{1}{2z}$.

Enfin, la fonction $z \mapsto \int_1^\infty u^{z-1}\left(\frac{1}{e^u - 1} - \frac{1}{u}\right)\mathrm{d}u$ est holomorphe sur le domaine $\mathrm{Re}(z) < 1$ (séparer la fraction en deux, et appliquer le théorème d'holomorphie. On domine l'intégrande de la première en majorant simplement u^{z-1} par 1, et la seconde sur des domaines de la forme $Re(z) \leq \delta < 1$).

On obtient donc, pour $-1 < \mathrm{Re}(z) < 1$, et puisque Γ ne s'annule pas sur $\mathbb{C}$:

$$
\begin{aligned}
\zeta(z) &= \frac{1}{\Gamma(z)} \times \left(\int_0^1 u^{z-1} \left(\frac{1}{e^u - 1} - \frac{1}{u} + \frac{1}{2} \right) \mathrm{d}u - \int_0^1 \frac{u^{z-1}}{2} \mathrm{d}u + \int_1^\infty u^{z-1} \left(\frac{1}{e^u - 1} - \frac{1}{u} \right) \mathrm{d}u \right) \\
&= \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^1 u^{z-1} \left(\frac{1}{e^u - 1} - \frac{1}{u} + \frac{1}{2} \right) \mathrm{d}u - \frac{1}{2\Gamma(z)z} + \frac{1}{\Gamma(z)} \int_1^\infty u^{z-1} \left(\frac{1}{e^u - 1} - \frac{1}{u} \right) \mathrm{d}u \\
&= \underbrace{\frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^1 u^{z-1} \left(\frac{1}{e^u - 1} - \frac{1}{u} + \frac{1}{2} \right) \mathrm{d}u}_{\text{Holomorphe}} - \underbrace{\frac{1}{2\Gamma(z+1)}}_{\text{Holomorphe car Re}(z+1)>0} + \underbrace{\frac{1}{\Gamma(z)} \int_1^\infty u^{z-1} \left(\frac{1}{e^u - 1} - \frac{1}{u} \right) \mathrm{d}u}_{\text{Holomorphe}}
\end{aligned}
$$

On a donc prolongé ζ au domaine $-1 < \mathrm{Re}(z) < 0$.

Étape 4 (Prolongement à $\mathrm{Re}(z) < -1$)
On a obtenu à l'étape précédente la formule suivante pour tout $-1 < \mathrm{Re}(z) < 0$:

$$
\zeta(z)\Gamma(z) = \int_0^1 u^{z-1} \left(\frac{1}{e^u - 1} - \frac{1}{u} + \frac{1}{2} \right) \mathrm{d}u - \frac{1}{2z} + \int_1^\infty u^{z-1} \left(\frac{1}{e^u - 1} - \frac{1}{u} \right) \mathrm{d}u
$$

On remarque que pour $-1 < \mathrm{Re}(z) < 0$, $u \mapsto u^{z-1}$ est intégrable sur $]1, +\infty[$, et que $-\frac{1}{2z} = \int_1^\infty \frac{1}{2} u^{z-1} \mathrm{d}u$.
On a alors, en regroupant les termes,

$$
\zeta(z)\Gamma(z) = \int_0^\infty u^{z-1} \left(\frac{1}{e^u - 1} - \frac{1}{u} + \frac{1}{2} \right) \mathrm{d}u.
$$

On remarque que pour tout $u \in \mathbb{R}_+$,

$$
\frac{1}{e^u - 1} + \frac{1}{2} = \frac{i}{2} \mathrm{cotan} \left(\frac{iu}{2} \right)
$$

On utilise ensuite la formule de la cotangente énoncée au lemme 1. On a donc

$$
\frac{1}{e^u - 1} + \frac{1}{2} = \frac{1}{u} + 2u \sum_{n \geq 1} \frac{1}{u^2 + 4n^2\pi^2}
$$

Soit maintenant $x \in]-1, 0[$. En combinant l'équation fonctionnelle précédemment obtenue, valable pour de tels x, et le calcul sur la cotangente, on obtient :

$$
\zeta(x)\Gamma(x) = \int_0^\infty u^{x-1} \left(2u \sum_{n \geq 1} \frac{1}{u^2 + 4n^2\pi^2} \right) \mathrm{d}u
$$

L'intégrande étant positive, on applique Fubini-Tonnelli, puis on réalise le changement de variable $t = \frac{u}{2n\pi}$, à n fixé :

$$
\zeta(x)\Gamma(x) = 2 \sum_{n \geq 1} \int_0^\infty \frac{u^x}{u^2 + 4n^2\pi^2} \mathrm{d}u \overset{F.T}{=} 2 \int_0^\infty \frac{t^x}{1 + t^2} \mathrm{d}t \times \underbrace{\sum_{n \geq 1} (2n\pi)^{x-1}}_{=(2\pi)^{x-1}\zeta(1-x)}
$$

Par ailleurs, le changement de variable $v = t^2$ et le lemme 2 donnent pour l'intégrale restante :

$$
\int_0^\infty \frac{t^x}{1 + t^2} \mathrm{d}t = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{v^{\frac{1}{2}(x-1)}}{1 + v} \mathrm{d}v = \frac{1}{2} \frac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{2}(1 - x))}
$$

On termine le calcul à l'aide de formules trigonométriques :

$$\frac{1}{2}\frac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{2}(1-x))} = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}\sin(\frac{\pi}{2}x)$$

Revenons maintenant à ζ. On a obtenu, toujours pour $x \in]-1, 0[$,

$$\zeta(x) = \frac{2}{\Gamma(x)}\frac{\pi}{\sin(\pi x)}\sin(\frac{\pi}{2}x)(2\pi)^{x-1}\zeta(1-x)$$

La formule des compléments, valable sur $\mathbb{C}$ privé des entiers, donc sur $]-1, 0[$, donne encore $\frac{1}{\Gamma(x)}\frac{\pi}{\sin(\pi x)} = \Gamma(1-x)$.

D'où finalement

$$\zeta(x) = 2\Gamma(1-x)\sin(\frac{\pi}{2}x)(2\pi)^{x-1}\zeta(1-x)$$

Or, $\mathrm{Re}(z) < 0 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(1-z) > 1$, et la fonction $z \mapsto 2\Gamma(1-z)\sin(\frac{\pi}{2}z)(2\pi)^{z-1}\zeta(1-z)$ est holomorphe sur $\mathrm{Re}(z) < -1$ (on utilise ici en particulier le fait que ζ est une fonction holomorphe sur $\mathrm{Re}(z) > 1$).

La théorème de prolongement analytique nous permet de conclure, et de prolonger ζ en une fonction holomorphe sur $\mathrm{Re}(z) < 0$.

On a donc bien prolongé ζ en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$, admettant un unique pôle, en 1, de résidu 1.

Preuve du lemme 1

Soit $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. On va appliquer le théorème des résidus à la fonction

$$\mathrm{f} : z \mapsto \frac{\pi}{z^2 - a^2}\mathrm{cotan}(\pi z)$$

qui est méromorphe de pôles a, $-a$, et tous les entiers, sur le contour rectangulaire ci-après, où n est choisi de façon à ce que le point a se trouve à l'intérieur du contour. En faisant ensuite tendre n vers $+\infty$, on obtiendra le résultat souhaité.

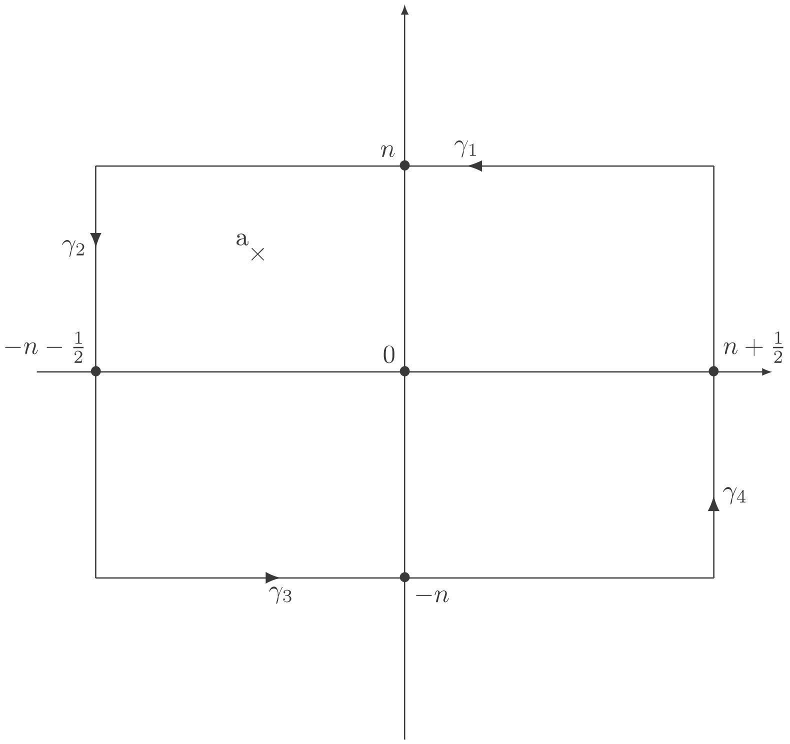

Figure 3 – Contour d'intégration pour la formule de la cotangente

Ces choix sont motivés par le fait qu'ainsi, le contour englobe plusieurs pôles de la fonction f sans en rencontrer : a, $-a$, et les entiers compris entre $-n$ et n inclus.

Le théorème des Résidus donne alors :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_n} f(z)\mathrm{d}z = \mathrm{Res}(f,a) + \mathrm{Res}(f,-a) + \sum_{|k|\leq n} \mathrm{Res}(f,k)$$

On calcule :

— a est un pôle simple de f. Donc $\mathrm{Res}(f,a) = (z-a)f(z)|_{z=a} = \frac{\pi}{2a}\mathrm{cotan}(\pi a)$

— $-a$ est également un pôle simple de f, donc $\mathrm{Res}(f,-a) = -\frac{\pi}{2a}\mathrm{cotan}(-\pi a) = \frac{\pi}{2a}\mathrm{cotan}(\pi a)$

— soit $k \in [\![0,n]\!]$, k est un pôle simple de cotan, car c'est un zéro simple de la fonction sin. Donc $\mathrm{Res}(f,k) = \lim\limits_{z\to k}(z-k)f(z) = \frac{\pi\cos(\pi k)}{k^2-a^2} \lim\limits_{z\to k} \frac{z-n}{\sin(\pi z)}$
Or, $\sin(\pi z) = \sin(\pi(z-n)+\pi n) = (-1)^n \sin(\pi(z-n))$.
Donc $\lim\limits_{z\to k} \frac{z-n}{\sin(\pi z)} = (-1)^n \lim\limits_{z\to k} \frac{z-n}{\sin(\pi(z-n))} = \frac{(-1)^n}{\pi}$.
D'où finalement $\mathrm{Res}(f,k) = \frac{1}{k^2-a^2} = \mathrm{Res}(f,-k)$. On va donc, dans la somme, isoler le terme $k=0$ et regrouper les opposés.

On a alors obtenu

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_n} f(z)\mathrm{d}z = \frac{\pi}{a}\mathrm{cotan}(\pi a) - \frac{1}{a^2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k^2-a^2}$$

Étape 1 (Majoration de cotan sur le contour)
Soit $z \in \mathbb{C}$. On note $z = x+iy$, avec $x, y \in \mathbb{R}$.

Alors, grâce à la formule de Moivre, on a $\cos(z) = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \frac{\cos(x)\left(e^{-y}+e^{y}\right)+i\sin(x)\left(e^{-y}-e^{y}\right)}{2} = \cos(x)\cosh(y)+i\sin(x)\sinh(-y)$.
On passe au module pour obtenir $|\cos(z)|^2 = \cos(x)^2 + \sinh(y)^2$

De même, on a $\sin(z) = i\sin(x)\cosh(y) + \cos(x)\sinh(-y)$, donc $|\sin(z)|^2 = \sin(x)^2 + \sinh(y)^2$.

On obtient donc $|\text{cotan}(\pi z)|^2 = \frac{\cos(\pi x)^2+\sinh(\pi y)^2}{\sin(\pi x)^2+\sinh(\pi y)^2}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.
- Si $|x| = n + \frac{1}{2}$, c'est à dire si z est sur γ_2 ou γ_4, alors $\cos(\pi x) = \cos(\pm\pi(n+\frac{1}{2})) = 0$. Donc $|\text{cotan}(\pi z)|^2 = \frac{\sinh(\pi y)^2}{1+\sinh(\pi y)^2} \leq 1$
- Si $|y| = n$, c'est à dire si z est sur γ_1 ou γ_3, alors on minore $\sin(\pi x)^2 + \sinh(\pi y)^2 \geq \sinh(\pi y)^2$, et on majore $\cos(\pi y)^2 \leq 1$ pour obtenir $|\text{cotan}(\pi z)|^2 \leq \frac{1+\sinh(\pi n)^2}{\sinh(\pi n)^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Ainsi, cotan est bornée sur le contour.

Donc il existe $M > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $z \in \gamma_n$, $|\text{cotan}(\pi z)| \leq M$.

Étape 2 (Convergence des intégrales sur le contour)
On va pouvoir grâce à la majoration effectuée précédemment, contrôler la valeur des intégrales sur le contour lorsque $n \to \infty$.

▷ Sur γ_1, on paramètre le segment comme suit :

$$\begin{array}{cccc} \gamma & : & [-n-\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & & t & \longmapsto & in - t \end{array}$$

On a alors, en appliquant l'inégalité triangulaire et en utilisant la majoration démontrée précédemment :

$$\left|\int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z\right| \leq \int_{-n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \frac{\pi}{|in-t|^2 - |a|^2} M \mathrm{d}t \leq \pi M \frac{2n+1}{n^2-|a|^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Car n est choisi tel que $|a| < n$.

▷ On traite de la même façon les intégrales sur les autres segments, pour obtenir

$$\int_{\gamma_k} f(z)\mathrm{d}z \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad \forall k \in \{1,2,3,4\}$$

Étape 3 (Conclusion)
On a donc

$$\lim_{n\to\infty} \quad \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_n} f(z)\mathrm{d}z = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\pi}{a}\text{cotan}(\pi a) - \frac{1}{a^2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k^2-a^2}\right)$$

Et la série converge, donc

$$0 = \frac{\pi}{a}\text{cotan}(\pi a) - \frac{1}{a^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^2-a^2}$$

Ce qui donne encore

$$\boxed{\text{Pour tout } a \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}, \quad \text{cotan}(\pi a) = \frac{1}{\pi a} - \frac{2a}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2-a^2} \qquad \text{Pour tout } a \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}}$$

Pour le prolongement de ζ, on cherche à calculer $\frac{i}{2}\text{cotan}(i\frac{u}{2})$, avec $u \in \mathbb{R}$. On peut donc appliquer la formule que l'on vient de démontrer, puisque pour tout $u \in \mathbb{R}$, $i\frac{u}{2} \notin \mathbb{Z}$. On pose alors $i\frac{u}{2} = \pi a$, et simplifiant les expressions, on trouve bien

$$\frac{i}{2}\text{cotan}(i\frac{u}{2}) = \frac{1}{u} + 2u\sum_{n\geq 1}\frac{1}{4n^2\pi^2 + u^2}$$