101 Groupe opérant sur un ensemble - Exemples et applications

Cadre : G est un groupe, X est un ensemble, $\mathbb{K}$ est un corps.

I - Actions et formule des classes

1 - Actions de groupes

Def 1 : On dit que G agit (à gauche) à gauche sur X, et on note $G \curvearrowright X$ s'il existe une application $G \times X \longrightarrow X$, $(g, x) \longmapsto g \cdot x$ telle que

(i) $\forall g, h \in G,\ \forall x \in X,\ (gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$

(ii) $\forall x \in X,\ 1_G \cdot x = x$

Rq 2 : On peut définir de même une action à droite $G \curvearrowright X$.

Ex 3 : (i) Action triviale : $g \cdot x = x$

(ii) Isométries affines du plan affine $\curvearrowright$ plan affine

(iii) $S_X = \{\text{bijections de } X\} \curvearrowright X$ via $\sigma \cdot x = \sigma(x)$

Th 4 : À une action $G \curvearrowright X$ correspond la donnée d'un morphisme $\rho : G \longrightarrow S_X$ où, $\forall g \in G,\ \rho(g)(x) = g \cdot x$

Ex 5 : L'action triviale correspond au morphisme trivial $g \mapsto \mathrm{Id}$

Def 6 : Une action $G \curvearrowright X$ est dite fidèle si le morphisme $\rho : G \longrightarrow S_X$ associé est injectif.

Ex 7 : $\mathbb{R}^*_+ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $(a, x) \longmapsto ax$ est fidèle.

2 - Orbite et stabilisateur

Def 8 : Soit $x \in X$. On appelle stabilisateur de x dans G l'ensemble $\mathrm{Stab}_x(G) = \{g \in G : g \cdot x = x\}$ pour une action $G \curvearrowright X$.

On dit que $G \curvearrowright X$ est libre si $\forall x \in X,\ \mathrm{Stab}_x(G) = \{1_G\}$

Rq 9 : $\forall x \in X,\ \mathrm{Stab}_x(G) \leq G$ (sous-groupe de G)

Ex 10 : Dans l'action $S_n \curvearrowright [\![1, n]\!]$, $\mathrm{Stab}_1(S_n) \simeq S_{n-1}$

Def 11 : Soit $x \in X$. On appelle orbite de x le sous-ensemble $G_x = \{g \cdot x,\ g \in G\}$

On dit que l'action $G \curvearrowright X$ est transitive si il n'existe qu'une seule orbite : $\forall x, y \in X,\ \exists g \in G : y = g \cdot x$

Rq 12 : Une action est transitive sur chaque orbite

Ex 13 : $S_n \curvearrowright [\![1, n]\!]$ est transitive

C-Ex 14 : $GL_n(\mathbb{K}) \times GL_n(\mathbb{K}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{K})$ n'est pas transitive
$(P, Q) \longmapsto PAQ^{-1}$

Prop 15 : Soit $G \curvearrowright X$ une action de groupe. La relation $\sim$ définie sur X par $x \sim y \iff \exists g \in G,\ y = g \cdot x$ est une relation d'équivalence, dont les classes d'équivalence sont les orbites.

Coro 16 : Les orbites forment une partition de X, on a alors
$$|X| = \sum_{i=1}^{r} |G_{x_i}|$$
où $x_1, \dots, x_r$ sont les représentants de chaque orbite.

Def 17 : On définit le sous-ensemble des points fixes de X par l'action $G \curvearrowright X$ par $X^G = \{x \in X : \forall g \in G,\ g \cdot x = x\}$

Rq 18 : Si l'action $G \curvearrowright X$ est transitive alors $X^G = \emptyset$

Ex 19 : Si $G = \langle (1\,2) \rangle \curvearrowright [\![1, 3]\!]$, alors $[\![1, 3]\!]^G = \{3\}$

3 - Formule des classes et applications

Prop 20 : Soit $G \curvearrowright X$ une action. Soit $x \in X$. Alors $|G_x| = \dfrac{|G|}{|\mathrm{Stab}_x(G)|}$

(On suppose G, X finis) via la bijection $G/\mathrm{Stab}_x(G) \xrightarrow{\sim} G_x$, $\bar{g} \longmapsto g \cdot x$

Th 21 : (Formule des classes)

Soit $G \curvearrowright X$ une action de groupe où G et X sont finis. On a alors
$$|X| = \sum_{i=1}^{r} \frac{|G|}{|\mathrm{Stab}_{x_i}(G)|}$$

Coro 22 : (Formule de Burnside)

Soit $g \in G$, pour G, X finis, et $G \curvearrowright X$ une action de groupe. Le nombre d'orbites pour cette action est égal à $r = \dfrac{1}{|G|} \displaystyle\sum_{g \in G} |X^g|$ où $X^g = \{x \in X : g \cdot x = x\}$

Appli 23 : On colore les arêtes d'un carré en rouge et en vert. Il y a 6 manières différentes de colorer les arêtes du carré.

II - Actions classiques en théorie des groupes

1 - Action par translation

Def 24 : On définit l'action $G \curvearrowright G$ par translation de la manière suivante :

$G \times G \longrightarrow G$, $(g, h) \longmapsto g \cdot h = gh$ (G agit donc sur lui-même)

Prop 25 : $\forall g \in G,\ \mathcal{O}_g = G$, l'action est fidèle, libre et transitive

Th 26 : (Théorème de Cayley)
Tout groupe fini d'ordre n est isomorphe à un sous-groupe de S_n (où $n \in \mathbb{N}^*$)

Ex 27 : Si $H \leq G$, alors G agit sur $\frac{G}{H}$ par translation (à gauche) via cette action
$\forall gH \in \frac{G}{H}$, $\forall g \in G$, $g \cdot (\tilde{g}H) = (g\tilde{g})H$. Cette action est bien définie et on a le morphisme associé $\rho : G \longrightarrow S_{[G:H]}$
où $[G:H] = \left|\frac{G}{H}\right|$. L'action est transitive.

2- Action par conjugaison

Def 28 : G opère sur lui-même par conjugaison (ou automorphisme intérieur) via l'action suivante
$$G \times G \longrightarrow G$$
$$(g, h) \longmapsto g \cdot h = ghg^{-1}$$

Def 29 : Dans ce cas, les orbites s'appellent les classes de conjugaison et les stabilisateurs s'appellent les centralisateurs.
On note $C_G(g) = G_g$, et $Z_G(g) = Stab_g(G)$ pour $g \in G$.

Rq 30 : $Z_G(1_G) = G$, l'action n'est pas libre.
Si $|G| > 1$, l'action n'est jamais fidèle ($g \cdot g = g$, donc si on a ρ [illegible] $\rho : G \to S_G$, alors $\rho(g) = Id$) et n'est jamais transitive (puisque $G_{1_G} = \{1_G\}$ et il y a plus d'une orbite, car $|G| \geq 2$)

Def 31 : (Centre) $Z(G) = G^G$ pour cette action est appelé le centre.

Ex 32 : Dans S_n, $Z(S_n) = \{Id\}$

3- Application à l'étude des p-groupes

Dans toute cette sous-partie, p est un nombre premier.

Def 33 : On dit que G est un p-groupe dont le cardinal est une puissance de p (i.e. $\exists n \in \mathbb{N}$, $|G| = p^n$)

Ex 34 : (i) $\{1_G\}$ est un p-groupe pour tout p premier
(ii) D_4 est un 2-groupe
(iii) $\frac{\mathbb{Z}}{9\mathbb{Z}}$ est un 3-groupe abélien

Prop 35 : Soit G un p-groupe. Alors $|X| \equiv |X^G|$ $[p]$

Th 36 : (Théorème de Cauchy)
Soit G un groupe fini tel que $p \mid |G|$. Alors G admet un élément d'ordre p.

Prop 37 : Soit G un p-groupe où $|G| > 1$. Alors $Z(G) \neq \{1_G\}$

Cor 38 : Tout groupe d'ordre p^2 est abélien.

App 39 : Classification des groupes d'ordre inférieur ou égal à 8
(cf. Dv 1)

III - Applications en algèbre linéaire et en géométrie

1- Action par équivalence et similitude

Dans toute cette sous-partie, $m, n \in \mathbb{N}^*$, G est $G = GL_m(\mathbb{K}) \times GL_n(\mathbb{K})$

Def 40 : $GL_m(\mathbb{K}) \times GL_n(\mathbb{K})$ opère sur $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ par équivalence via l'action
$$GL_m(\mathbb{K}) \times GL_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$$
$$((P, Q), A) \longmapsto PAQ^{-1}$$

Prop 41 : Le rang d'une matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ est invariant par l'action de G par équivalence.

Prop 42 : Il y a $m+1$ orbites de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, qui sont les matrices de rang $r \in [\![0, m]\!]$. Un représentant de chaque orbite est la matrice
$$J_{m,n,r} = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ Taille } m \times n$$

App 43 : Calcul pratique du rang d'une matrice par opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes via le pivot de Gauss.
On pose $G' = GL_n(\mathbb{K}) \times GL_n(\mathbb{K})$

Def 44 : G' opère sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par similitude via l'action
$$G' \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$
$$(P, A) \longmapsto PAP^{-1}$$

Prop 45 : La trace, le déterminant et le polynôme caractéristique sont invariants par l'action de G' sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par similitude. Ce sont des invariants de similitude.

Th 46 : Soit $\mathbb{F}_q$ le corps à q éléments, $q = p^n$, p premier. Soit $D_n(\mathbb{F}_q)$ l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{F}_q)$

Alors
$$|D_n(\mathbb{F}_q)| = \sum_{\substack{n_1 + \dots + n_q = n \\ n_i \geq 0}} \frac{|GL_n(\mathbb{F}_q)|}{\prod_{i=1}^{q} |GL_{n_i}(\mathbb{F}_q)|}$$

DVPT 1

2 - Action par congruence

Def 47 : $GL_n(\mathbb{K})$ agit par congruence sur $S_n(\mathbb{K})$ (matrices symétriques) via l'action

$$GL_n(\mathbb{K}) \times S_n(\mathbb{K}) \longrightarrow S_n(\mathbb{K})$$
$$(P, A) \longmapsto PAP^T$$

Th 48 : (i) Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\mathcal{O}_A = \mathcal{O}_B \iff rg(A) = rg(B)$

(ii) Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\mathcal{O}_A = \mathcal{O}_B \iff rg(A) = rg(B)$ et A et B ont la même signature (théorème d'inertie de Sylvester)

Appli 49 : Classification des formes quadratiques réelles en fonction de leur signature.

Ex 50 : $Stab_{I_n}(GL_n(\mathbb{R})) = \{P \in GL_n(\mathbb{R}) : PP^T = I_n\} = O_n(\mathbb{R})$, c'est le groupe orthogonal

3 - D'autres actions

Def 51 : $GL_n(\mathbb{K})$ opère sur $\mathbb{K}^n$ par translation à gauche via l'action :

$$GL_n(\mathbb{K}) \times \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$$
$$(P, X) \longmapsto P \cdot X = PX$$

C'est une action à gauche.

Ex 52 : $O_n(\mathbb{R})$ stabilise S^{n-1} par cette action

Prop 53 : Soit $P \in GL_n(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}^{n^P} = \{X \in \mathbb{K}^n : (P - I_n)X = 0\}$.

Si 1 est valeur propre de P, c'est le sous-espace propre associé à la valeur propre 1

Prop 54 : $\forall x \in \mathbb{K}^n$, $\mathcal{O}_X = \mathbb{K}^n$, on a donc une action transitive

Def 55 : (Droites vectorielles)

On définit l'ensemble $\mathbb{P}(\mathbb{K}^n)$ des droites vectorielles de $\mathbb{K}^n$

Def 56 : (Groupe (projectif) spécial linéaire)

On définit :

(i) le groupe projectif linéaire par $\mathbb{P}GL_n(\mathbb{K}) = \dfrac{GL_n(\mathbb{K})}{\{\lambda I_n, \lambda \in \mathbb{K}^*\}}$

(ii) le groupe projectif spécial linéaire par $\mathbb{P}SL_n(\mathbb{K}) = \dfrac{SL_n(\mathbb{K})}{\{\pm I_n\}}$

Def 57 : (Action du groupe projectif linéaire sur les droites)

$\mathbb{P}GL_n(\mathbb{K})$ opère sur $\mathbb{P}(\mathbb{K}^n)$ via l'action

$$\mathbb{P}GL_n(\mathbb{K}) \times \mathbb{P}(\mathbb{K}^n) \longrightarrow \mathbb{P}(\mathbb{K}^n)$$
$$(P, \mathcal{D}) \longmapsto P \cdot \mathcal{D} = \{Px, x \in \mathcal{D}\}$$

La définition est la même avec $\mathbb{P}SL_n(\mathbb{K})$

Prop 58 : (Isomorphismes exceptionnels)

(i) $\mathbb{P}SL_2(\mathbb{F}_2) \simeq S_3$ (ii) $\mathbb{P}GL_2(\mathbb{F}_3) \simeq S_4$

(iii) $\mathbb{P}SL_2(\mathbb{F}_3) \simeq A_4$

4 - Isométries

Def 59 : Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble fini. On note :

(i) $Iso(A) = \{g = f + a, f \in O(\mathbb{R}^n), a \in \mathbb{R}^n : g(A) = A\}$

(ii) $Iso^+(A) = \{g = f + a, f \in SO(\mathbb{R}^n), a \in \mathbb{R}^n : g(A) = A\}$

$Iso(A)$ est le groupe d'isométries de A (affines)

$Iso^+(A)$ est le groupe d'isométries directes de A (affines)

Def 60 : Si $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, on note P_n le n-gone régulier

Prop 61 : $Iso(P_n) = D_n = \langle r, s : r^n = s^2 = Id, srs^{-1} = r^{-1} \rangle$, $Iso^+(P_n) \simeq \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$

Ex 62 : $Iso(P_3) \simeq S_3$

Prop 63 : (Admis) Si A possède un centre de symétrie, et si on a compris alors $Iso(A) \simeq Iso^+(A) \times \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$

Def 64 :

(i) On note $\Delta_4 \subset \mathbb{R}^3$ le tétraèdre régulier, et on note $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ ses quatre sommets

(ii) On note $C_6 \subset \mathbb{R}^3$ le cube, et on note $\{D_1, D_2, D_3, D_4\}$ ses grandes diagonales, ainsi que $\{A_1 B_1, A_2 B_2, A_3 B_3, A_4 B_4\}$ les extrémités associées à ces grandes diagonales

(cf. Fig 2)

Th 65 : (Groupe d'isométries du tétraèdre et du cube)

(i) $Iso(\Delta_4) \simeq S_4$

(ii) $Iso(C_6) \simeq S_4 \times \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$

DVPT 2

M

Annexe :

$\lvert G\rvert$	Groupes d'ordre $\lvert G\rvert$	$\lvert G\rvert$	Groupes d'ordre $\lvert G\rvert$
1	$\{1\}$	6	$\frac{\mathbb{Z}}{6\mathbb{Z}}$; $D_3 \simeq S_3$
2	$\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$	7	$\frac{\mathbb{Z}}{7\mathbb{Z}}$
3	$\frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}}$	8	$\frac{\mathbb{Z}}{8\mathbb{Z}}$, $\frac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$, $\left(\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}\right)^3$, D_4, $\mathbb{H}_8$
4	$\frac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}}$; $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$	9	$\frac{\mathbb{Z}}{9\mathbb{Z}}$; $\frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}}$
5	$\frac{\mathbb{Z}}{5\mathbb{Z}}$		

$$\mathbb{H}_8 = \langle -1, i, j, k \; : \; i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1 \rangle$$

Classification des groupes d'ordre inférieur ou égal à 9 Fig 1

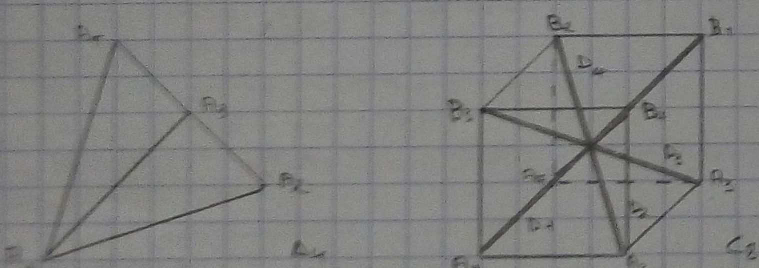

Illustration du tétraèdre (Δ_4) et du cube (C_8) Fig 2

Référence

F. Ulmer, Théorie des groupes
D. Perrin, Cours d'algèbre