$n$ désigne un entier supérieur ou égal à 2

## I - Généralités

### 1 - Définitions

**Déf 1 :** Soit $E$ un ensemble. On note $S(E) = \{\sigma : E \to E, \text{ bijections}\}$. $(S(E), \circ)$ est un groupe (la composition est la loi de composition interne de ce groupe)

**Rq 2 :** On notera $S_n = S([\![1, n]\!])$

**Rq 3 :** Si $E$ est un ensemble fini, alors $S(E) \simeq S_{|E|}$

**Rq 4 :** Pour des ensembles finis de cardinal $n$, on peut se ramener à étudier $S_n$

**Déf 5 :** Groupe symétrique et permutations
- On définit le groupe symétrique, noté $S_n$ (ou $\mathfrak{S}_n$) comme le groupe des permutations de $[\![1, n]\!]$ (i.e. des bijections). La composition est la loi de groupe. $S_n$ est d'ordre $n!$
- On définit et note une permutation $\sigma \in S_n$ de la façon suivante

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

- Soient $\sigma, \tau \in S_n$. On définit la composée $\tau \circ \sigma$ de $\sigma$ suivie de $\tau$ par

$$\tau\sigma = \tau \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \tau(\sigma(1)) & \tau(\sigma(2)) & \cdots & \tau(\sigma(n)) \end{pmatrix}$$

- La permutation identité $Id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$ est l'élément neutre pour $\circ$ (on parle aussi de produit)

**Ex 6 :** Si $\sigma, \tau \in S_3$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

**Rq 7 :** Pour $n \geq 3$, $S_n$ n'est pas un groupe abélien

**Ex 8 :** Si $\sigma, \tau \in S_n$,

avec $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 1 & 3 & \cdots & n-1 & n \end{pmatrix}$, $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ n & 2 & 3 & \cdots & n-1 & 1 \end{pmatrix}$,

alors $\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ n & 1 & 3 & \cdots & n-1 & 2 \end{pmatrix}$ et $\tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & n & 3 & \cdots & n-1 & 1 \end{pmatrix}$

**Déf 9 :** Support, points fixes et cycles

Soit $\sigma \in S_n$

(i) - $supp(\sigma) = \{i \in [\![1, n]\!] \; \sigma(i) \neq i\}$ (Support)

(ii) - $fix(\sigma) = \{i \in [\![1, n]\!] \; \sigma(i) = i\} = [\![1, n]\!] \setminus supp(\sigma)$ (points fixes)

(iii) - On dit que $\sigma$ est un $k$-cycle
- $supp(\sigma) = \{i_1, \dots, i_k\} \subset [\![1, n]\!]$
- $\forall j \in [\![1, k-1]\!] \; \sigma(i_j) = i_{j+1}$ et $\sigma(i_k) = i_1$

On note $\sigma = (i_1 \dots i_k)$

**Rq 10 :** Un 2-cycle est appelé transposition

### 2 - Propriétés du groupe symétrique

**Prop 11 :** Deux permutations à supports disjoints commutent

**Th 12 :** Toute permutation peut s'écrire comme produit de cycles à supports disjoints, cette écriture est unique, à ordre près des facteurs

**Ex 13 :**

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix} = (2\,3)(4\,6\,5) = (4\,6\,5)(2\,3)$$

**Prop 14 :** Puisque $(i_1 \cdots i_k) = (i_1\, i_2)(i_2\, i_3) \cdots (i_{k-1}\, i_k)$, on obtient que toute permutation s'écrit comme un produit de transpositions

**Prop 15 :** Un $k$-cycle est d'ordre $k$

**Coro 16 :** Soit $\sigma \in S_n$, soit $\sigma = c_1 \cdots c_d$ sa décomposition en un produit de cycles à supports disjoints. Alors $o(\sigma) = ppcm\{o(c_i) : i \in [\![1, d]\!]\}$

**Ex 17 :** Si $\sigma = (2\,3)(4\,6\,5)$, $o(\sigma) = ppcm\{2, 3\} = 6$.

**Th 18 :** $S_n$ est engendré par les familles :

(i) - $\{(1\; i),\; i \in [\![2, n]\!]\}$

(ii) - $\{(i\; i+1),\; i \in [\![1, n-1]\!]\}$

(iii) - $\{(1\; 2), (1\; 2 \cdots n)\}$

**Ex 19 :** Dans $S_4$, on a

(i) - $(2\,3) = (1\,2\,3\,4)(1\,2)(1\,2\,3\,4)^3$ (iii) - $(1\,3) = (2\,3)(1\,2)(2\,3)$

(ii) - $(2\,3) = (1\,2)(1\,3)(1\,2)$

105 Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.

**Prop 20.** Soit $\sigma \in S_n$, $(i_1 \dots i_k)$ un $k$-cycle. On a alors
$\sigma (i_1 \dots i_k) \sigma^{-1} = (\sigma(i_1) \dots \sigma(i_k))$

**Coro 21.** L'écriture en produit de cycles à supports disjoints ainsi que
$\forall i \in [\![1, n]\!]$ $(\sigma \tau \sigma^{-1})(i) = \tau_{\sigma(i)}$, pour $\sigma, \tau \in S_n$

## II - Sous groupes de $S_n$

### 1 - Groupe alterné

**Def 22.** Morphisme de signature
On définit $\varepsilon : (S_n, \circ) \longrightarrow (\{-1, 1\}, \times)$ de cette manière

$$\forall \sigma \in S_n : \varepsilon(\sigma) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}$$ C'est un morphisme de groupes

Une permutation de signature 1 est dite paire, et impaire si elle est de signature $-1$

**Prop 23.** Si $\sigma = \tau_1 \dots \tau_k$ est écrite comme un produit de $k$ transpositions, alors $\varepsilon(\sigma) = (-1)^k$

**Ex 24:**
(i) Si $\sigma = (1\,2\,3)(4\,5)$, comme $(1\,2\,3) = (1\,2)(2\,3)$, $\varepsilon(\sigma) = (-1)^3 = -1$
(ii) Si $\sigma = (1\,3\,2)$, $\varepsilon(\sigma) = \frac{\sigma(2) - \sigma(1)}{2 - 1} \cdot \frac{\sigma(3) - \sigma(1)}{3 - 1} \cdot \frac{\sigma(3) - \sigma(2)}{3 - 2}$

$$\varepsilon(\sigma) = \frac{1 - 2}{2 - 1} \cdot \frac{2 - 3}{3 - 1} \cdot \frac{2 - 1}{3 - 2} = (-2)(-\tfrac{1}{2})(1)$$
$$\varepsilon(\sigma) = 1$$

**Def 25.** Groupe alterné
On définit le groupe alterné, noté $A_n$, par $A_n = \ker(\varepsilon) = \{\sigma \in S_n : \varepsilon(\sigma) = 1\}$
$|A_n| = \frac{1}{2} n!$

**Prop 26.** Pour $n \geq 3$, $\{(1\, i\, j),\ 2 \leq i \neq j \leq n\}$ engendre $A_n$

**Coro 27.** Les 3-cycles engendrent $A_n$ (pour $n \geq 3$)

**Ex 28.** $\sigma = (1\,2\,3\,4\,5) \in A_5$, $\sigma = (1\,2\,3)(3\,4\,5)$

### 2 - Classes de conjugaison et propriétés des sous groupes de $S_n$

**Def 29.** Type
Soit $\sigma \in S_n$. On appelle type de $\sigma$ le tableau $[m_1, \dots, m_n]$ où $m_i$ est le nombre de $i$-cycles dans la décomposition de $\sigma$ en produit de cycles à support disjoints.

**Ex 30.** $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, $\sigma$ est de type $[1, 1, 1, 0, 0, 0]$

**Def 31.** Une classe de conjugaison de $S_n$ est exactement l'ensemble des permutations de même type

**Prop 32.** La classe de conjugaison d'une permutation de type $[m_1, \dots, m_n]$ est de cardinal $\dfrac{n!}{\prod_{1 \leq i \leq n} m_i!\, i^{m_i}}$

**Th 33:** Si $n \geq 5$, $A_n$ est simple ] DVPT 1

**Prop 34:** $D(S_n) = A_n$  $D(A_n) = A_n$
$D(A_4) = V_4 = \{Id, (1\,2)(3\,4), (1\,3)(2\,4), (1\,4)(2\,3)\}$

**Rq 35:** Les sous-groupes normaux de $S_n$ sont
(i) - $\{Id\}$, $A_n$ et $S_n$ pour $n \neq 4$,
(ii) - $\{Id\}$, $V_4$, $A_4$ et $S_4$ pour $n = 4$

## III - Applications

### 1 - Matrices et permutations

**Def 36:** Déterminant d'une matrice
Soit $A$ un anneau commutatif, soit $M = [M_{ij}]_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(A)$ une matrice carrée.
On définit son déterminant par

$$\det(M) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} M_{i, \sigma(i)}$$

**Ex 37.** Matrice $2 \times 2$
Si $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(A)$, alors $\det(M) = ad - bc$

**Prop 38:** $\det : (GL_n(A), \times) \longrightarrow (A^{\times}, \times)$
est un morphisme de groupe.

**Def 39.** Soit $\sigma \in S_n$, on définit la matrice de permutation de $\sigma$, notée $P_\sigma$, par
$$\forall i, j \in [\![1, n]\!],\ [P_\sigma]_{i,j} = \delta_{\sigma(i), j}$$

**Ex 40** Si $\sigma = (1\,2\,3)$

$$P_\sigma = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**Prop 41** L'application $\varphi : (S_n, \circ) \longrightarrow (GL_n(\mathbb{R}), \times)$, $\sigma \longmapsto P_\sigma$

est un morphisme de groupes, en particulier

$$P_{\sigma \circ \tau} = P_\sigma P_\tau , \quad P_{\sigma^{-1}} = P_\sigma^{-1} , \quad P_{Id} = I_n$$

De plus, on a $\det(P_\sigma) = \varepsilon(\sigma)$

**Prop 42** Action de groupe $S_n$ sur $\mathbb{R}^n$

$S_n$ agit sur $\mathbb{R}^n$ via cette action :

$$\forall \sigma \in S_n, \ \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \ \sigma \cdot x = (x_{\sigma(1)} ; \dots ; x_{\sigma(n)})$$

## 2 - Groupe d'isométries de figures

**Déf 43** Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble fini. On note

$$Is(A) = \{ g = f + a, \ f \in O_n(\mathbb{R}), \ a \in \mathbb{R}^n, \ g(A) = A \}$$

$$Is^+(A) = \{ g = f + a, \ f \in SO_n(\mathbb{R}), \ a \in \mathbb{R}^n, \ g(A) = A \}$$

$Is(A)$ est le groupe d'isométrie (affine) de $A$

**Th 44** Groupes d'isométries du cube et du tétraèdre

(i) Soit $\Delta_4 \subset \mathbb{R}^3$ un tétraèdre régulier. $\begin{cases} Is(\Delta_4) = S_4 \\ Is^+(\Delta_4) = A_4 \end{cases}$

(ii) Soit $C_6 \subset \mathbb{R}^3$ un cube. $\begin{cases} Is(C_6) = S_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ Is^+(C_6) = S_4 \end{cases}$

DVPT 2


Références :

F. Ulmer, Théorie des groupes

D. Perrin, Cours d'algèbre