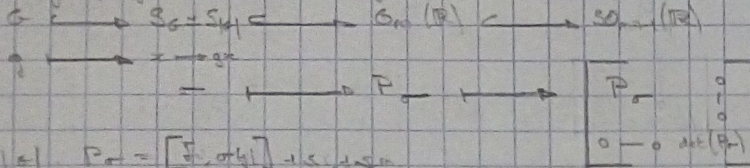




### 3- Isomorphismes de sous-groupes

Th 28:

Soit  $G$  un groupe fini. On a les isomorphismes suivants:



où  $n = |G|$ ,  $P_G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \in GL_n(\mathbb{R})$

Cor 28:  $G$  s'injecte dans  $SO_n(\mathbb{R})$ , où  $n = |G| + 1$

### II - Actions de groupes

#### 1- Action sur $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$

Ex 19: On donne trois actions de  $GL_n(\mathbb{C})$  sur  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathbb{C}^n$ :

- (1)  $GL_n(\mathbb{C})$  sur  $\mathbb{R}^n$  par  $P \cdot A = PA$  (multiplication à gauche)
- (2)  $GL_n(\mathbb{C})$  sur  $\mathbb{R}^n$  par  $P \cdot A = AP$  (multiplication à droite)
- (3)  $GL_n(\mathbb{C})$  sur  $\mathbb{C}^n$  par  $P \cdot z = PzP^{-1}$  (action par conjugaison)

Ex 20: L'action  $GL_n(\mathbb{C})$  sur  $\mathbb{R}^n$  par multiplication à gauche ou à droite par des matrices d'opérateurs rétrograds (convergent) généralise des opérations élémentaires respectivement sur les lignes et les colonnes de la matrice de  $\mathbb{R}^n$  (cf. Exercice)

Ex 21: Problème de Gauss, résolution de systèmes linéaires

Def 31: On dit que deux matrices  $A, B \in GL_n(\mathbb{C})$  sont semblables si elles sont dans la même orbite pour l'action par conjugaison:  $\exists P \in GL_n(\mathbb{C})$ ,  $PAV^{-1} = B$ . Les classes de conjugaison sont appelées classe de similarité.

Ex 33:

$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$  et  $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$  sont semblables, conjugués par  $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $A, B, P \in GL_2(\mathbb{R})$

Prop 34: Soit  $A, B \in GL_n(\mathbb{C})$  deux matrices semblables. On a:

- (i)  $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(B)$ ; (ii)  $\det(A) = \det(B)$ ; (iii)  $\text{rg}(A) = \text{rg}(B)$ ; (iv)  $\chi_A = \chi_B$  (polynôme caractéristique)

Ex 35:

- (1) On dit que  $A$  est un scalaire si  $A = \lambda I_n$ .
- (2) Si un des valeurs propres n'est pas le même que  $\lambda$ , alors  $A$  et  $B$  ne sont pas semblables.

Ex 36: On a les matrices  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$  et  $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ .  $\det(A) = \det(B) = 2$ ,  $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(B) = 3$ .  $\chi_A = \chi_B = (x-1)(x-2) = x^2 - 3x + 2$ .

Th 38: (Caractérisation de matrices diagonalisables sur  $\mathbb{C}$ )

Soit  $D_n(\mathbb{C})$  l'ensemble des matrices diagonalisables de  $GL_n(\mathbb{C})$ . En utilisant la convention  $|\mathbb{C}| = 1$ , on a:

$$|D_n(\mathbb{C})| = \sum_{\substack{m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N} \\ m_1 + \dots + m_n = n}} \frac{n!}{m_1! \dots m_n!} |D_{m_i}(\mathbb{C})|$$

DVT 1

Ex 36-bis:  $\int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$ ,  $|D_n(\mathbb{R})| = (n!) \cdot 2^{n-1}$

#### 2- Action sur la sphère unité, groupe orthogonal

Ex 37: On a donné pour  $A \in GL_n(\mathbb{R})$  l'action sur  $\mathbb{R}^n$  par  $VA \cdot x = Ax$ , c'est-à-dire l'action par translation à gauche.

Ex 38: On a une  $GL_n(\mathbb{R})$  sur  $\mathbb{R}^n$  par  $u \cdot x = ux$ .

Ex 39: Le groupe orthogonal est le sous-groupe de  $GL_n(\mathbb{R})$  qui stabilise la sphère unité  $S^{n-1}$  de  $\mathbb{R}^n$ , où  $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ .

Ex 40: Si  $m \neq 2$ , toute matrice de  $SO_m(\mathbb{R})$  stabilise la droite unité  $S^1$ .

Def 41: Soit  $u \in GL_n(\mathbb{R})$ . On dit que:
 

- (1)  $u$  est une réflexion orthogonale si  $\exists B$  une base de  $\mathbb{R}^n$  telle que  $u|_B = \begin{bmatrix} -1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$ .
- (2)  $u$  est un renversement si  $\exists B$  une base de  $\mathbb{R}^n$  telle que  $u|_B = \begin{bmatrix} -1 & & 0 \\ & -1 & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$ .

Th 42:  $SO_n(\mathbb{R})$  est engendré par les réflexions orthogonales.

Th 43:  $\forall n \geq 3$ ,  $SO_n(\mathbb{R})$  est engendré par les rotations.

Ex 44:  $\forall n \geq 2$ ,  $Z(O_n(\mathbb{R})) = \{I_n, -I_n\}$ .  $\forall n \geq 3$ ,  $Z(SO_n(\mathbb{R})) = \{I_n\}$ .

Ex 45:  $\forall n \geq 3$ ,  $Z(SO_n(\mathbb{R})) = \{I_n\}$ .

Ex 46: (1) Si  $n$  est pair,  $Z(O_n(\mathbb{R})) = \{I_n, -I_n\}$ .

(2) Si  $n$  est impair,  $Z(O_n(\mathbb{R})) = \{I_n\}$ .

### 3- Action sur les droites de $K^n$

Def 46: On définit

(i) le groupe projectif linéaire  $PSL_n(K) = \frac{SE_n(K)}{Z(SE_n(K))}$

(ii) le groupe projectif spécial linéaire  $PSE_n(K) = \frac{SE_n(K)}{Z(SE_n(K))}$

Prop 47: On a une action de  $PSL_n(K) / PSE_n(K)$  sur l'ensemble des droites vectorielles de  $K^n$ ,  $P(K^n)$

$\forall P \in PSL_n(K) / PSE_n(K), \forall D \in \{ \text{droites de } K^n \}$

$P \cdot D = PD = \{ PD, D \in D \}$  où  $P$  est dans la classe de  $P$

L'action  $PSL_n(K) / PSE_n(K)$  sur  $P(K^n)$  est fidèle

Prop 48: On a les isomorphismes suivants

(i)  $PSL_2(\mathbb{R}) \cong SO_2$  (ii)  $PSL_2(\mathbb{F}_3) \cong S_3$

(iii)  $PSL_2(\mathbb{F}_4) \cong A_5$

Th 49:

Si  $(n, K) \neq (2, \mathbb{F}_2), (2, \mathbb{F}_3)$ , le groupe  $PSL_n(K)$  est simple

### III - Applications

#### 1- Topologie

Dans toute cette section,  $K = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  (sans distinction combative)

Prop 50:  $SE_n(K)$  est connexe, dense dans  $GL_n(K)$

Prop 51:  $SE_n(K)$  est fermé dans  $GL_n(K)$  et est connexe par arcs

Prop 52:  $O_n(\mathbb{R})$  est compact

Prop 53:  $SO_n(\mathbb{R})$  est compact et connexe par arcs

Prop 54:  $SO_2(\mathbb{R})$  est simple. DVIPT 2

Prop 55:  $O_n(\mathbb{R})$  admet deux composantes connexes par arcs

$$SO_n(\mathbb{R}) = \{ P \in O_n(\mathbb{R}) : \det(P) = 1 \}$$

$$\text{et } O_n^-(\mathbb{R}) = \{ P \in O_n(\mathbb{R}) : \det(P) = -1 \}$$

#### 2- Représentations de groupe

Def 56: Une représentation linéaire d'un groupe  $G$  (sur  $K$ ) est un espace vectoriel  $V$  non nul  $K$ -espace vectoriel

Prop 57:  $\rho: S_n \rightarrow GL_n(K)$  est une représentation du groupe symétrique  $S_n$  sur  $V = K^n = GL_n(K)$

Prop 58: Un  $K$ -espace vectoriel  $V$  est une  $S_n$ -représentation si  $V$  est stable par  $\rho(g)$  pour tout  $g \in S_n$  et  $\rho$  est une représentation linéaire sur  $V$  avec  $\rho(g)$  son représentant dans  $GL(V)$  ( $V \neq \{0\}$ )

Prop 59:  $\rho: S_3 \rightarrow GL_3(K) \rightarrow \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{bmatrix} \right\}$  n'est pas irréductible

Car  $\rho(1)(x, y) = (x, y)$ ,  $\rho(2)(x, y) = (y, x)$  On a  $\text{Vect}\{(x, x)\}$  stable par  $\rho: S_3 \rightarrow GL_3(K)$  est une sous-représentation irréductible.

Prop 60: On appelle caractère d'une représentation  $\rho$  l'application

$$\chi: G \rightarrow \mathbb{C}$$

$$g \mapsto \text{tr}(\rho(g))$$

Si  $\rho$  est irréductible,  $\chi$  est dite irréductible

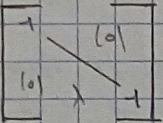
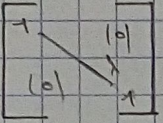
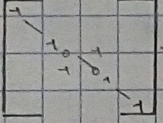
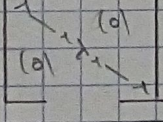
Prop 61:  $\rho: S_3 \rightarrow GL_3(K) \rightarrow \rho_0 = \left[ \begin{matrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -2 \end{matrix} \right]_{\text{sur } S_3}$

On a donc  $\forall \sigma \in S_3, \chi(\sigma) = \# \text{Fix}(\sigma)$

Prop 62:  $\chi(1_\sigma) = \dim(V)$

Annexe:

Opérations élémentaires: On considère une matrice  $A \in \mathbb{Z}_p[[k]]$  de lignes  $L_1, \dots, L_m$  et de colonnes  $C_1, \dots, C_p$

Opération élémentaire	Matrice associée
Transvection $L_i \leftarrow L_i + \lambda C_j$	 $\lambda$ en ligne $i$ , colonne $j$
Transvection $C_i \leftarrow C_i + \lambda L_j$	 $\lambda$ en ligne $j$ , colonne $i$
Transposition $L_i \leftrightarrow L_j$ $C_i \leftrightarrow C_j$	 $i < j$ - ligne $i$ , colonne $j$ - ligne $j$ , colonne $i$
Dilatation $L_i \leftarrow \lambda L_i$ $C_i \leftarrow \lambda C_i$	 - ligne $i$ , colonne $i$

Références

D. Perron, Cours d'Algèbre, édition Eyrolles

F. Hana, Théorie des Groupes