106 Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de GL(E). Applications.

Cadre : E désigne un espace vectoriel de dimension finie n. $\mathbb{K}$ est un corps (commutatif). $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$, [illegible]

I- GL(E) et ses sous-groupes

1- Propriétés élémentaires de GL(E)

Def 1 : $GL(E) = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid \exists v \in \mathcal{L}(E),\ v \circ u = u \circ v = Id_E\}$

Prop 2 : $(GL(E), \circ)$ est un groupe pour la composition.

Prop 3 : Les assertions suivantes sont équivalentes. Pour $u \in \mathcal{L}(E)$:

(i) $u \in GL(E)$
(ii) $rg(u) = n$
(iii) $\det(u) \neq 0$
(iv) $\ker(u) = \{0_E\}$ (u est injectif)
(v) $Im(u) = E$ (u est surjectif)
(vi) u envoie une base de E sur une base de E

Ex 4 : $u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \in GL(\mathbb{R}^2)$
$(x, y) \longmapsto (y, x)$

Def 5 : $GL_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) : \exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ AB = BA = I_n\}$

Prop 6 : $(GL_n(\mathbb{K}), \times)$ est un groupe.

Prop 7 : L'application $GL(E) \longrightarrow GL_n(\mathbb{K})$ est un isomorphisme de
$u \longmapsto Mat_{\mathcal{B}}(u)$ groupes, où $\mathcal{B}$ = [illegible]

Ex 8 : $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in GL_2(\mathbb{K})$

Prop 9 : $Z(GL(E)) = \{\lambda Id_E,\ \lambda \in \mathbb{K}^*\}$

2- Sous-groupes de GL(E)

Def 9 : On définit le groupe spécial linéaire $SL(E)$ par :
$SL(E) = \{u \in GL(E),\ \det(u) = 1\}$
On définit par analogie matricielle pour $SL_n(\mathbb{K}) = \{A \in GL_n(\mathbb{K}),\ \det(A) = 1\}$

Prop 10 :
$SL(E) \xrightarrow{\sim} SL_n(\mathbb{K})$

Ex 11 :
$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \in SL_2(\mathbb{C})$, $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in SL_2(\mathbb{F}_2)$

Def 12 : Soit $u \in SL(E)$. On dit que u est une transvection s'il existe une base de E telle que
$Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{bmatrix} 1 & & (\mu) \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \end{bmatrix}$

Prop 13 : Soit H un hyperplan de E, $H = \ker(f)$ où $f \in E^* \setminus \{0\}$. Soit $u \in GL(E)$, $u \neq Id_E$ tel que $u|_H = Id_H$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) u est une transvection
(ii) $\det(u) = 1$
(iii) u n'est pas diagonalisable
(iv) $D = Im(u - Id_E) \subset H$
(v) $\exists a \in H \setminus \{0\}$, $\forall x \in E$, $u(x) = x + f(x)a$

Def 14 : On dit alors que u est une transvection d'hyperplan H et de droite $D = Im(u - Id_E)$

Th 15 : $SL(E)$ est engendré par les transvections.

Def 16 : $u \in GL(E)$ est une dilatation s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que :
$Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{bmatrix} 1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{K}^* \setminus \{1\}$

Prop 17 : Soit H un hyperplan de E et $u \in GL(E)$ tel que $u|_H = Id_H$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) u est une dilatation (ii) $\det(u) = \lambda \neq 1$
(iii) u admet une valeur propre $\lambda \neq 1$ et u est diagonalisable

Def 18 : On dit que u est une dilatation d'hyperplan H, de droite $D = Im(u - Id_E)$ et de rapport λ

Th 22 : $GL(E)$ est engendré par les transvections et les dilatations

Prop 23 : (i) $Z(GL(E)) = \{\lambda Id_E,\ \lambda \in \mathbb{K}^*\}$
(ii) $Z(SL(E)) = \{\lambda Id_E,\ \lambda^n = 1\}$

Prop 24 : (i) Si $n \geq 3$, $D(SL(E)) = D(GL(E)) = SL(E)$
(ii) Si $n = 2$, $\mathbb{K} \neq \mathbb{F}_2, \mathbb{F}_3$, $D(GL(E)) = D(SL(E)) = SL(E)$
(iii) Si $n = 2$, $\mathbb{K} = \mathbb{F}_2$, $GL(E) = SL(E)$, $D(GL(E)) \simeq A_3$
(iv) Si $n = 2$, $\mathbb{K} = \mathbb{F}_3$, $D(SL(E)) \simeq H_8$

Def 25 : On définit :
(i) $O(E) = \{u \in GL(E),\ \forall x \in E,\ \|u(x)\| = \|x\|\}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
(ii) $O_n(\mathbb{R}) = \{P \in GL_n(\mathbb{R}),\ P^T P = P P^T = I_n\}$

Rq 26 : On parle d'isométries vectorielles et de matrices orthogonales

Def 27 : On définit :
(i) $SO(E) = \{u \in O(E),\ \det(u) = 1\}$ $(\mathbb{K} = \mathbb{R})$
(ii) $SO_n(\mathbb{R}) = \{P \in O_n(\mathbb{R}),\ \det(P) = 1\}$

3 - Injections de sous-groupes

Th 28 : Soit G un groupe fini. On a les injections suivantes :

$$\begin{array}{ccccccc} G & \hookrightarrow & S_G \simeq S_{|G|} & \hookrightarrow & O_n(\mathbb{R}) & \hookrightarrow & SO_{n+1}(\mathbb{R}) \\ g & \longmapsto & \tau_g : x \mapsto gx & & & & \\ & & \sigma & \longmapsto & P_\sigma & \longmapsto & \begin{bmatrix} P_\sigma & 0 \\ 0 & \det(P_\sigma) \end{bmatrix} \end{array}$$

où $n = |G|$, $P_\sigma = [\delta_{i,\sigma(j)}]_{1 \leq i,j \leq n}$

Cor 29 : G s'injecte dans $GL_n(\mathbb{R})$, où $n = |G| < +\infty$

II - Actions de groupe

1 - Action sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Prop 29 : On donne trois actions sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$: $P \in GL_{n,p}(\mathbb{K})$, $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

(i) $GL_n(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par $P \cdot A = PA$ (multiplication à gauche)

(ii) $GL_p(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par $P \cdot A = AP$ (multiplication à droite)

(iii) $GL_n(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par $P \cdot A = PAP^{-1}$ (action par conjugaison)

Prop 30 : L'action $GL_n(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par multiplication à gauche (resp. à droite) est donnée par des matrices d'opérations élémentaires (inversibles) générant des opérations élémentaires respectivement sur les lignes et les colonnes de la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ (cf Annexe)

Appli 31 : Pivot de Gauss, résolution de systèmes linéaires

Def 32 : On dit que deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables si elles sont dans la même orbite pour l'action par conjugaison i.e. $\exists P \in GL_n(\mathbb{K})$, $PAP^{-1} = B$. Les classes de conjugaison sont appelées classes de similitude.

Ex 33 :

$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ sont semblables, conjuguées

par $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; $A, B, P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Prop 34 : Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices semblables. Alors on a :

(i) $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(B)$; (ii) $\det(A) = \det(B)$; (iii) $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B)$

(iv) $\chi_A = \chi_B$ (polynôme caractéristique)

Rq 35 :

(i) On dit que ce sont des invariants de similitude

(ii) Si un des invariants n'est pas le même sur A et B, alors A et B ne sont pas semblables

Ex 35-bis : Avec les matrices précédentes, on a bien (toujours avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) : $\det(A) = \det(B) = 6$, $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(B) = 5$, $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B) = 2$, $\chi_A = \chi_B = (X-2)(X-3) = X^2 - 5X + 6$

Th 36 : (Dénombrement de matrices diagonalisables sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{F}_q)$)

Soit $\mathcal{D}_n(\mathbb{F}_q)$ l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{F}_q)$. En adoptant la convention $|GL_0(\mathbb{F}_q)| = 1$, on a :

$$|\mathcal{D}_n(\mathbb{F}_q)| = \sum_{\substack{n_1, \dots, n_q \in \mathbb{N} \\ n_1 + \dots + n_q = n}} \frac{|GL_n(\mathbb{F}_q)|}{\prod_{i=1}^{q} |GL_{n_i}(\mathbb{F}_q)|}$$

DVPT 1

Rq 36-bis : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|GL_n(\mathbb{F}_q)| = (q^n - 1)(q^n - q) \dots (q^n - q^{n-1})$

2 - Action sur la sphère unité, groupe orthogonal

Prop 37 : On se donne une action $GL_n(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}^n$ par $\forall (P, x) \in GL_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n$, $P \cdot x = Px$, c'est une action par multiplication à gauche

Rq 38 : On a aussi $GL(E)$ sur E via $u \cdot x = u(x)$

Prop 39 : Le groupe orthogonal est le sous-groupe de $GL(E)$ qui stabilise la sphère unité $\mathbb{S}^{n-1}$ de $\mathbb{R}^n$, où $\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$

Ex 40 : Si $n = 2$, toute rotation de matrice $R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ stabilise le cercle unité $\mathbb{S}^1$

Def 41 : Soit $u \in O_n(\mathbb{R})$. On dit que :

- u est une réflexion orthogonale si $\exists \mathcal{B}$ une base de E : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{bmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
- u est un retournement si $\exists \mathcal{B}$ une base de E : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{bmatrix} I_{n-2} & 0 \\ 0 & -I_2 \end{bmatrix}$

Th 42 : $O_n(\mathbb{R})$ est engendré par les réflexions orthogonales

Th 43 : $\forall n \geq 3$, $SO_n(\mathbb{R})$ est engendré par les retournements

Prop 44 : (i) $\forall n \geq 2$, $D(O_n(\mathbb{R})) = SO_n(\mathbb{R})$ (ii) $D(SO_2(\mathbb{R})) = \{I_2\}$

(iii) $\forall n \geq 3$, $D(SO_n(\mathbb{R})) = SO_n(\mathbb{R})$

Prop 45 : (i) Si n est pair, $Z(O_n(\mathbb{R})) = \{-I_n, I_n\}$

(ii) Si n est impair, $Z(O_n(\mathbb{R})) = \{I_n\}$

3 - Action sur les droites de $\mathbb{K}^n$

Def 46 : On définit

(i) le groupe projectif linéaire $PGL_n(\mathbb{K}) = \dfrac{GL_n(\mathbb{K})}{Z(GL_n(\mathbb{K}))}$

(ii) le groupe projectif spécial linéaire $PSL_n(\mathbb{K}) = \dfrac{SL_n(\mathbb{K})}{Z(SL_n(\mathbb{K}))}$

Prop 47 : On trouve une action de $PGL_n(\mathbb{K}) / PSL_n(\mathbb{K})$ sur l'ensemble des droites vectorielles de $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{P}(\mathbb{K}^n)$

$\forall \bar{P} \in PGL_n(\mathbb{K}) / PSL_n(\mathbb{K}), \forall \mathcal{D} \in \{\text{Droites de } \mathbb{K}^n\}$,

$$\bar{P} \cdot \mathcal{D} = \underline{P}\,\mathcal{D} = \{\underline{P}D, D \in \mathcal{D}\}$$ où $\underline{P}$ est dans la classe de P

L'action $PSL_n(\mathbb{K})$ sur $\mathbb{P}(\mathbb{K}^n)$ est fidèle

Prop 48 : On a les isomorphismes suivants

(i) $PSL_2(\mathbb{F}_2) \simeq S_3$ (ii) $PGL_2(\mathbb{F}_3) \simeq S_4$

(iii) $PSL_2(\mathbb{F}_3) \simeq A_4$

Th 49 :

Si $(n, \mathbb{K}) \neq (2, \mathbb{F}_2), (2, \mathbb{F}_3)$, le groupe $PSL_n(\mathbb{K})$ est simple

III - Applications

1 - Topologie

Dans toute cette sous-partie, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (sauf indication contraire)

Prop 50 : $GL_n(\mathbb{K})$ est ouvert, dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Prop 51 : $SL_n(\mathbb{K})$ est fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et est connexe par arcs

Prop 52 : $O_n(\mathbb{R})$ est compact

Prop 53 : $SO_n(\mathbb{R})$ est compact et connexe par arcs

Prop 54 : $SO_3(\mathbb{R})$ est simple. DVPT 2

Prop 55 : $O_n(\mathbb{R})$ admet deux composantes connexes par arcs

$$SO_n(\mathbb{R}) = \{P \in O_n(\mathbb{R}) : \det(P) = 1\}$$

et $$O_n^-(\mathbb{R}) = \{P \in O_n(\mathbb{R}) : \det(P) = -1\}$$

2 - Représentations de groupe

Def 56 : Une représentation linéaire d'un groupe G (groupe fini) est un morphisme $\rho : G \to GL(V)$, V est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel

Ex 57 : $\rho : S_n \to \{-1, 1\}$ est une représentation du morphisme signature, où $\{-1, 1\} \subset \mathbb{C}^* = GL_1(\mathbb{C})$

Def 58 : Un sous-espace vectoriel $W \subset V$ est une sous-représentation si W est stable par $\rho(g)$ pour tout $g \in G$

ρ est une représentation irréductible si les seules sous-représentations sont $\{0\}$ et V ($V \neq \{0\}$)

Ex 59 : $\rho : \{-1, 1\} \to \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ n'est pas irréductible

puisque $\rho(1)(x, y) = (x, y)$, $\rho(-1)(x, y) = (y, x)$. On a $\mathrm{Vect}\{(1,1)\}$ stable.

$\rho : \{-1, 1\} \to \{-1, 1\}$ est bien entendu irréductible.

Def 60 : On appelle caractère d'une représentation ρ, l'application

$$\chi : \begin{array}{rcl} G & \to & \mathbb{C} \\ g & \mapsto & \mathrm{Tr}(\rho(g)) \end{array}$$

Si ρ est irréductible, χ est dite irréductible

Ex 61 : Si $\rho : \begin{array}{rcl} S_3 & \to & GL_3(\mathbb{C}) \\ \sigma & \mapsto & P_\sigma = [\delta_{i,\sigma(j)}]_{1 \le i,j \le 3} \end{array}$

On a donc $\forall \sigma \in S_3$, $\chi(\sigma) = \# \mathrm{Fix}(\sigma)$

Rq 62 : $\chi(Id) = \dim_{\mathbb{C}}(V)$

Annexe :

Opérations élémentaires : On considère une matrice $A \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{K})$ de lignes $L_1, \dots, L_m$ et de colonnes $C_1, \dots, C_p$

Opération élémentaire	Matrice associée	
Transvection $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$	$\begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) \quad \lambda & & 1 \end{pmatrix}$	λ en ligne i, colonne j
Transvection $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$	$\begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & \ddots & \lambda \\ (0) & & 1 \end{pmatrix}$	λ en ligne j, colonne i
Transposition $L_i \leftrightarrow L_j$ $C_i \leftrightarrow C_j$	$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 \; 0 \; 1 & & \\ & & 1 \; 0 \; 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$	$i < j$ - Ligne i, colonne j - Ligne j, colonne i
Dilatation $L_i \leftarrow \lambda L_i$ $C_i \leftarrow \lambda C_i$	$\begin{pmatrix} 1 & & & & (0) \\ & 1 & & & \\ & & \lambda & & \\ & & & 1 & \\ (0) & & & & 1 \end{pmatrix}$	- Ligne i, colonne i

Références

D. Perrin, Cours d'Algèbre, édition Ellipses

F. Ulmer, Théorie des Groupes