104 Représentations et caractères d'un groupe fini sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel

Cadre : G désigne un groupe fini d'ordre m et V est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension d … sous-espace vectoriel.

I - Représentations - premières propriétés

1 - Définitions et premiers exemples

Def 1 (Représentation) Une représentation linéaire de G dans V est un morphisme $\rho : G \longrightarrow GL(V)$. Si ρ est sous-entendu, on dit que V est une représentation.

Ex 2 (i) La représentation triviale $\rho_{triv} : G \longrightarrow GL(V)$, $g \longmapsto Id_V$; d est le degré de la représentation.

(ii) Lorsque $d = 1$ les représentations sont des morphismes $\rho : G \to \mathbb{C}^*$. Une représentation de $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ est la donnée de $u : \rho(1) \in GL(V)$ telle que $u^n = 1$.

(iii) $\rho : S_n \longrightarrow GL(\mathbb{C}^n)$ est une représentation
$\sigma \longmapsto P_\sigma = [\delta_{i\sigma(j)}]_{1 \leq i,j \leq n}$

Def 3 : Soient $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ et $\rho' : G \longrightarrow GL(V')$ deux représentations. On dit qu'une application linéaire $\varphi : V \longrightarrow V'$ est un morphisme de représentations si, et seulement si, $\forall g \in G$, $\varphi \circ \rho(g) = \rho'(g) \circ \varphi$, i.e. pour tout $g \in G$, le diagramme [Diag 1] commute (cf Fig 1).
Si φ est iso, on dit que ρ et ρ' sont isomorphes.

Def 4 : Si ρ est injectif, on dit que la représentation est fidèle.

Def 5 : (Sous-représentation)
Soit $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ une représentation et soit W un sev de V. On dit que W est une sous-représentation de V si W est G-stable, i.e. $\forall g \in G$, $\rho(g)(W) \subset W$.

Ex 6 : Si $\varphi : V \longrightarrow V'$ est un morphisme de représentations, alors $\ker(\varphi)$ et $Im(\varphi)$ sont des sous-représentations, respectivement de V et V'.

Prop 7 : (Représentation somme directe)
Si $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ et $\rho' : G \longrightarrow GL(V')$ sont deux représentations, alors on peut construire une nouvelle représentation, appelée représentation somme directe :
$\rho \oplus \rho' : G \longrightarrow GL(V \oplus V')$
$g \longmapsto (\rho \oplus \rho')(g)$

et, d'un point de vue matriciel, on a, dans une bonne base B de $V \oplus V'$:

$$Mat_B((\rho \oplus \rho')(g)) = \begin{bmatrix} \rho(g) & 0 \\ 0 & \rho'(g) \end{bmatrix}$$

Def 8 : (Représentation régulière)
Si $d = m$, V peut être muni d'une base $\{e_g\}_{g \in G}$, indexée par G (puisque $\dim(V) = |G|$). On définit alors la représentation régulière ρ_{reg} par :

$$\rho_{reg} : G \longrightarrow GL(V), \quad g \longmapsto \left[\begin{array}{l} V \longrightarrow V \\ e_h \longmapsto e_{gh} \end{array}\right], \ h \in G$$

Ex 9 : Si $G = \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$, $V = \mathbb{C}^2$, alors

$$\rho_{reg} : \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \longrightarrow GL(\mathbb{C}^2), \quad \bar{0} \longmapsto Id_{\mathbb{C}^2}, \quad \bar{1} \longmapsto \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

où $e_{\bar{0}} = (1,0)$, $e_{\bar{1}} = (0,1)$

Th 10 : Si on considère la représentation régulière de S_n et si on note P_σ la matrice de permutation associée à $\rho_{reg}(\sigma)$, alors P_σ et $P_{\sigma'}$ sont semblables ssi σ et σ' sont conjuguées dans S_n.

2 - Irréductibilité des représentations

Def 11 : Une représentation est dite irréductible (ou simple) si ses seules sous-représentations sont $\{0\}$ et V. On dit qu'elle est semi-simple si elle est somme directe de sous-représentations simples.

Ex 12 : Toute représentation de degré 1 est irréductible.

Th 13 : (Théorème de Maschke)
Toute représentation de degré fini est semi-simple.

Rq 14 Cette décomposition n'est pas unique.

Lemme 15 : (Lemme de Schur)
Soient $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ et $\rho' : G \longrightarrow GL(V')$ deux représentations irréductibles. Soit $\varphi : \rho \longrightarrow \rho'$ un morphisme de représentations. On a alors :
(i) Soit $\varphi = 0$, soit φ est un isomorphisme.
(ii) Si $V = V'$ et $\rho = \rho'$, alors φ est une homothétie.

Coro 16 : Soient $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ et $\rho' : G \longrightarrow GL(V')$ deux représentations irréductibles et $\varphi : V \longrightarrow V'$ un morphisme de représentations. Posons

$$\tilde{\varphi} = \frac{1}{m} \sum_{g \in G} \rho'(g) \circ \varphi \circ \rho(g)^{-1}. \text{ On a alors :}$$

(i) $\tilde{\varphi} = 0$ si ρ et ρ' ne sont pas isomorphes
(ii) Si $(V, \rho) = (V', \rho')$ alors $\tilde{\varphi} = \frac{Tr(\varphi)}{d} Id_V$

II - Caractères et applications en théorie des groupes

1 - Définitions, exemples, orthogonalité

Déf 16 : Soit $\rho : G \to GL(V)$ une représentation. On appelle caractère de cette représentation la fonction $\chi_\rho : G \to \mathbb{C}$, $g \mapsto Tr(\rho(g))$.

Si $\rho : G \to GL(V)$ est irréductible, alors on dit que χ_ρ est un caractère irréductible.

Prop 17 : Soit $\rho : G \to GL(V)$ une représentation et soit χ_ρ son caractère.

(i) $\chi_\rho(1_G) = d$ (ii) $\forall g, h \in G$, $\chi_\rho(ghg^{-1}) = \chi_\rho(h)$

(iii) $\forall g \in G$, $\chi_\rho(g^{-1}) = \overline{\chi_\rho(g)}$

Ex 19 : (i) Si ρ et ρ' sont deux représentations de caractères χ et χ', alors $\chi_{\rho \oplus \rho'} = \chi + \chi'$

(ii) Si $G = S_n$ et $V = \mathbb{C}^n$, alors, si $\rho : S_n \to GL_n(\mathbb{C})$, $\sigma \mapsto P_\sigma$, on a

$\forall \sigma \in S_n$, $\chi_\rho(\sigma) = \# Fix(\sigma) = \# \{ i \in [\![1,n]\!],\ \sigma(i) = i \}$

(iii) $\forall g \in G$, $\chi_{\rho_{reg}}(g) = n\,\delta_{g,1_G} = \begin{cases} n & \text{si } g = 1_G \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Déf 20 (fonction centrale)

Soit $f : G \to \mathbb{C}$. On dit que f est une fonction centrale si f est constante sur les classes de conjugaison de G. On note $\mathbb{C}[G] = \{$fonctions centrales $G \to \mathbb{C}\}$

Ex 21 : Un caractère associé à une représentation est une fonction centrale.

Déf 22 : On définit un produit scalaire sur $\mathbb{C}[G]$ donné par

$$\langle \cdot | \cdot \rangle : \mathbb{C}[G] \times \mathbb{C}[G] \to \mathbb{C}, \quad (f, \varphi) \mapsto \frac{1}{n} \sum_{g \in G} f(g)\overline{\varphi(g)}$$

Th 23 : Les caractères irréductibles de G forment une base orthonormée de l'espace des fonctions centrales sur G.

Coro 24 : Les représentations irréductibles étant déterminées par leur caractère, l'ensemble $Irr(G)$ des représentations irréductibles est fini, de cardinal égal au nombre de classes de conjugaison de G.

2 - Décomposition de représentations

Th 25 : Soit V une représentation de G, de caractère χ. Soit $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_k$ une décomposition en somme directe de sous-représentations irréductibles. Soit $i \in [\![1,k]\!]$. Le nombre de représentations irréductibles isomorphes à W_i est $\langle \chi | \chi_i \rangle$, où χ_i est un caractère associé à W_i.

Rq 26 : Ce nombre est indépendant de la décomposition.

On notera $mV = V \oplus \dots \oplus V$ (m fois)

Coro 27 : Si $V = m_1 W_1 \oplus \dots \oplus m_s W_s$, $W_1, \dots, W_s$ irréductibles non isomorphes, alors $\langle \chi | \chi \rangle = \sum_{i=1}^{s} m_i^2$

Coro 28 : Si χ est le caractère d'une représentation, alors $\langle \chi | \chi \rangle$ est un entier positif et $\langle \chi | \chi \rangle = 1$ si et seulement si χ est irréductible.

Ex 29 : Si $G = S_3$, $\chi : S_3 \to \mathbb{R}$, $\sigma \mapsto \varepsilon(\sigma)$ est irréductible.

Coro 30 : Soit $\chi \in Irr(G)$, soit d_χ la dimension de la représentation irréductible (V_χ, ρ_χ).

(i) La multiplicité de V_χ dans la représentation régulière ρ_{reg} est égale à d_χ

(ii) On a $\sum_{\chi \in Irr(G)} (d_\chi)^2 = n$

(iii) Pour tout $g \neq 1_G$, on a $\sum_{\chi \in Irr(G)} d_\chi \chi(g) = 0$

3 - Tables de caractères

Déf 31 : (Table de caractères)

Soit G un groupe fini et $k = |Conj(G)|$ le nombre de ses classes de conjugaison. On appelle table de caractères de G le tableau carré T_G de format (k,k) tel que :

(i) Les lignes sont indexées par les caractères irréductibles $\chi \in Irr(G)$

(ii) Les colonnes sont indexées par les classes de conjugaison $\bar{g} \in Conj(G)$

(iii) Dans la case de position $\langle \chi | \bar{g} \rangle$ on trouve $\chi(g)$

Ex 32 : Représentation de $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. La table de caractères est une matrice de Vandermonde, où $\zeta = e^{\frac{2i\pi}{n}}$

χ	0	1	$\dots$	$n-1$
Id	1	1	$\dots$	1
ζ^{Id}	1	ζ	$\dots$	ζ^{n-1}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
ζ^{n-1}	1	ζ^{n-1}	$\dots$	ζ^{n^2-1}

Rq 33 : i) Une table de caractères peut se compléter à l'aide d'outils géométriques.
ii) On finit de la compléter à l'aide d'outils employés dans les [illegible] précédentes.

Appli 34 : (Table de caractères de S_4)

χ	Id [1]	$(\cdot\,\cdot)$ [6]	$(\cdot\,\cdot\,\cdot)$ [8]	$(\cdot\,\cdot)(\cdot\,\cdot)$ [3]	$(\cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot)$ [6]
χ_t	1	1	1	1	1
χ_ε	1	-1	1	1	-1
$\mathrm{Iso}(\Delta)$	3	1	0	-1	-1
$\mathrm{Iso}(C)$	3	-1	0	-1	1
χ	2	0	-1	2	0

- $\mathrm{Iso}(\Delta_4) \to$ Associé au groupe d'isométries du tétraèdre $\Delta_4 \subset \mathbb{R}^3$
- $\mathrm{Iso}^+(C_8) \to$ Associé au groupe d'isométries du cube $C_8 \subset \mathbb{R}^3$

DVPT 1

II - Groupes abéliens et dualité

Dans cette partie, on considère G abélien.

1 - Dualité

Prop 35 : G est abélien ssi les caractères irréductibles de G sont de dimension 1.

Cor 36 : Les caractères irréductibles de G sont alors les morphismes de G dans $\mathbb{C}^*$.

Def 37 : (Dual) On définit le dual de G, noté $\hat{G}$, par : $\hat{G} = \{\chi : G \to \mathbb{C}^*, \text{ morphisme}\}$

Rq 38 : Ce sont en fait des morphismes dans $\mathbb{U}_n$ ($n = |G|$)

Ex 39 : Si $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, alors on a

$$\widehat{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} = \left\{ \chi_j : \begin{array}{l} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{C}^* \\ k \mapsto e^{\frac{2i\pi jk}{n}} \end{array}, \ j \in [\![0, n-1]\!] \right\}$$

Th 40 : i) On a $\hat{G} \simeq G$ (isomorphisme non canonique)
ii) On a cet isomorphisme canonique :

$$G \xrightarrow{\sim} \hat{\hat{G}}, \quad g \mapsto \left[ev_g : \begin{array}{l} \hat{G} \to \mathbb{C} \\ \chi \mapsto \chi(g) \end{array} \right]$$

2 - Transformée de Fourier

Def 41 : On définit la transformée de Fourier par

$$\mathcal{F} : \mathbb{C}[G] \to \mathbb{C}[\hat{G}], \quad f \mapsto \left[\begin{array}{l} \hat{G} \to \mathbb{C} \\ \chi \mapsto \sum_{g \in G} f(g)\chi(g) \end{array} \right]$$

On note $\hat{f} = \mathcal{F}(f)$

Prop 42 : (Formule d'inversion) $f = \frac{1}{n} \sum_{\chi \in \hat{G}} \hat{f}(\chi)\chi^{-1}$. $\mathcal{F}$ est donc un isomorphisme d'espace vectoriel.

Def 43 : (Produit de convolution)
i) $\forall g, h \in G$, $\delta_g * \delta_h = \delta_{gh}$ $\left(\delta_g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq g \\ 1 & \text{si } x = g \end{cases} \right)$
ii) $\forall f_1, f_2 \in \mathbb{C}[G]$, $\forall g \in \mathbb{C}[G]$, $(f_1 * f_2)(g) = \sum_{h \in G} f_1(h) f_2(h^{-1}g)$
(étendu par bilinéarité, via $f = \sum_{g \in G} f(g)\delta_g$)

Prop 44 : $\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$

Appli 45 : Calcul du déterminant circulant et convergence de la suite de polygones définie par

$$\begin{cases} U^{[0]} = [z_1^{[0]} \dots z_n^{[0]}] \\ \forall k \in \mathbb{N}, \ U^{[k+1]} = \frac{1}{2}\left[z_1^{[k]} + z_2^{[k]}, \dots, z_n^{[k]} + z_1^{[k]}\right] \end{cases}$$

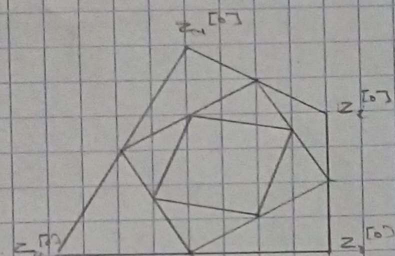
via l'expression de $U^{[k]}$: $U^{[k]} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} [illegible]$

(cf [illegible])

Annexe :

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\rho(g)"'] & V' \arrow[d, "\rho'(g)"] \\ V \arrow[r, "\varphi"] & V' \end{tikzcd}$$

Diagramme [Diag 1] de morphisme de représentations (Fig 1)



Convergence d'une suite de polygones vers l'isobarycentre (Fig 2)