

Cadre $I \subseteq \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , I est un intervalle de \mathbb{R} .
 EDL = Équation différentielle linéaire
 I - Cadre général des équations différentielles linéaires

1 - Existence et unicité des solutions

Prop 1. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Une EDL d'ordre p est une équation du type

$$[1] \quad y^{(p)}(t) = A_p y^{(p-1)}(t) + \dots + A_1 y'(t) + A_0 y(t) + B(t)$$

où $y_j \in [a, b] + i\mathbb{R}$, $A_j \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}_m(\mathbb{K}))$, $B \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}_m(\mathbb{K}))$

Si $B \equiv 0$, on parle d'équation homogène

Prop 2. Toute EDL d'ordre p peut se ramener à une EDL d'ordre 1:

$$[2] \quad \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(p-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ A_0 & A_1 & \dots & A_{p-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(p-1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ B(t) \end{bmatrix}$$

Ex 3. Si y est à valeur dans \mathbb{R}^m , $m \geq 2$ et $p=1$, on parle de système différentiel linéaire

Ex 4. (Le pendule amorti) L'EDL $\theta'' + \frac{g}{l}\theta = 0$ devient

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \theta \\ \theta' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \theta' \end{bmatrix}$$

Prop 3 (Equation intégrale) Le problème de Cauchy $\begin{cases} y'(t) = A(t)y(t) + B(t) \\ y(t_0) = y_0 \in \mathbb{K}^m \end{cases}$ avec $A \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}_m(\mathbb{K}))$, $B \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K}^m)$, $t_0 \in I$ équivaut à $y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K}^m)$ et

$$\forall t \in I, y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t [A(s)y(s) + B(s)] ds$$

Th 6 (Cauchy - Laplace, cas linéaire)

Soit le problème de Cauchy $[1] \quad \begin{cases} y'(t) = A(t)y(t) + B(t) \\ y(t_0) = y_0 \quad (t_0 \in I) \end{cases}$ JVPT 1

Alors $[1]$ admet une unique solution définie sur I

Ex 7. Ceci n'est pas forcément vrai pour les cas non linéaires

Ex 8. Le problème $[1] \quad \begin{cases} y' = 3y^{\frac{2}{3}} \\ y(0) = 0 \end{cases}$ admet des solutions sur \mathbb{R}
 $y_1(t) = 0$ et $y_2(t) = t^3$

2 - Structure de l'espace des solutions

Th 9. Soit $A \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}_m(\mathbb{K}))$. L'ensemble \mathcal{S}_h des solutions de l'EDL homogène $y' = A(t)y$ est un SEV de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{K}^m)$ de dimension m

Prop 10. Avec les prop 2, si l'EDL est d'ordre p , alors $\dim(\mathcal{S}_h) = m$

Cor 11. L'espace \mathcal{S} des solutions de $y'(t) = A(t)y(t) + B(t)$ est un espace affine $V_0 + \mathcal{S}_h$, où V_0 est solution particulière: $V_0' = AV_0 + B$ et \mathcal{S}_h est solution de $y' = AY$

Prop 12. Les formes de l'EDL admettent

Ex 13. L'EDL $ty'(t) - y(t) = 0$, d'ordre 1, admet deux solutions indépendantes $y_1 = 1 \rightarrow \int 0 dt = 0 \rightarrow y_1 = 1$ et $y_2 = t \rightarrow \int \frac{1}{t} dt = \ln|t|$

Ces deux solutions sont linéairement indépendantes

Def 14 (Wronskien) Soit y_1, \dots, y_m des solutions de l'EDL $[1] \quad y' = Ay$. On définit le Wronskien W de y_1, \dots, y_m par $W: I \rightarrow \mathbb{K}$

$$t \mapsto \det(y_1(t), \dots, y_m(t))$$

Ex 15. Pour l'EDL $\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$, les solutions sont données par:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \in \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} e^{2t} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ e^t \end{bmatrix} \right\}; \quad t \mapsto \begin{bmatrix} e^{2t} \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} 0 \\ e^t \end{bmatrix} \text{ sont donc } W(t) = e^{3t}$$

Th 16 (Formule de Liouville)

Pour l'équation $[1] \quad \begin{cases} y'(t) = A(t)y(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ le Wronskien est donné par $\forall t \in I, W(t) = W(t_0) e^{\int_{t_0}^t \text{Tr}[A(u)] du}$

II - Résolution explicite

1 - Exponentielle de matrice

Prop 17. Soit $A \in \mathbb{R}_m(\mathbb{K})$. La série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}$ est absolument convergente

Def 18. On appelle exponentielle de la matrice $A \in \mathbb{R}_m(\mathbb{K})$ la matrice

$$e^A = \exp(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}$$

Prop 19. Soient $A, B \in \mathbb{R}_m(\mathbb{K})$ et $AB = BA$. Alors $e^{A+B} = e^A e^B$

Prop 20 (Calcul d'exponentielle de matrice)

Soit $A \in \mathbb{R}_m(\mathbb{K}) \exists P \in \mathcal{O}_m(\mathbb{C}) : P^{-1}AP = \begin{bmatrix} T_1 & & \\ & \ddots & \\ & & T_p \end{bmatrix}$ où $\forall j \in \{1, \dots, p\}, T_j = \lambda_j I + N_j$, N_j est nilpotente

$$\text{Alors } e^A = Pe^{T}P^{-1} \quad e^T = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_p} \end{bmatrix} \quad e^{T_j} = e^{\lambda_j} e^{N_j}$$

Prop 21. $\forall A \in \mathbb{R}_m(\mathbb{K}) \det(e^A) = e^{\text{Tr}(A)}$

Juise

M

Ex 22:
$$\exp \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e & e \\ 0 & e \end{bmatrix}$$

2 - Cas des coefficients constants

Th 23: La solution de l'EDL
$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) \\ y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$
 est donnée par
$$y(t) = e^{(t-t_0)A} y_0$$
 pour tout $t \in \mathbb{R}$

Prop 24: Les composantes de y sont des fonctions du type $t \mapsto \sum_{j=1}^r P_j(t)e^{\lambda_j t}$ où $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{C}$ (spectre), $P_j \in \mathbb{C}[X]$

Prop 25 (cas des EDL d'ordre p à coefficients constants)

Sub [E]: $y^{(p)} + a_{p-1}y^{(p-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0$, $a_j \in \mathbb{R}$, $\forall j \in [0, p-1]$
 Sub P(X) = $X^p + a_{p-1}X^{p-1} + \dots + a_1X + a_0 \in \mathbb{C}[X]$ le polynôme caractéristique de [E]

- (i) Si P a pour racines $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ de multiplicités m_1, \dots, m_r , alors les solutions de [E] sont des combinaisons linéaires de $t \mapsto t^q e^{\lambda_j t}$ où $q \in [0, m_j-1]$, $j \in [1, r]$
- (ii) Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, les solutions s'obtiennent en considérant la partie réelle et la partie imaginaire de solutions

Ex 26: Les solutions de l'EDL $y'' + 2y' + y = 0$ sont des combinaisons linéaires de $t \mapsto e^{-t}$ et $t \mapsto te^{-t}$

Ex 27 (Pendule amortie)

Les solutions réelles de $\theta'' + \frac{g}{l}\theta = 0$ sont des combinaisons linéaires de $t \mapsto \cos(\sqrt{\frac{g}{l}}t)$ et $t \mapsto \sin(\sqrt{\frac{g}{l}}t)$ ($g, l > 0$)

3 - Cas des coefficients variables

Def 28 (Problème de Cauchy). On appelle résolution du problème de Cauchy [E₀]
$$\begin{cases} y'(t) = A(t)y(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$
, $A \in C^1(I, \mathbb{R}_n(\mathbb{R}))$, $t_0 \in I$

Il existe une unique solution $S(\cdot, t_0): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_n(\mathbb{R})$ de [E₀].

Prop 29: (Propriétés de la résolution) Soient $t_0, t_1, t_2 \in I$

- (i) $R(t_1, t_1) = R(t_0, t_0) = I_n$
- (ii) $R(t_1, t_0) = R(t_1, t_1)R(t_1, t_0)$
- (iii) $R(t_1, t_2) = R(t_1, t_0)R(t_0, t_2)$

Prop 30: La solution du problème de Cauchy [E]
$$\begin{cases} y'(t) = A(t)y(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$
 est donnée par $y(t) = S(t, t_0)y_0$

Prop 31: la résolution du système
$$\begin{cases} y'(t) = A(t)y(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$
, $A \in C^1(I, \mathbb{R}_n(\mathbb{C}))$ est donnée par $y(t) = S(t, t_0)y_0$

Ex 32: le système
$$y'(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} y(t)$$
 admet pour solution

$$y(t) = \begin{bmatrix} \cos(t-t_0) & \sin(t-t_0) \\ -\sin(t-t_0) & \cos(t-t_0) \end{bmatrix} y_0$$

4 - Recherche de solutions particulières

Th 33 (Formule de Duhamel)

Une solution du problème de Cauchy
$$\begin{cases} y'(t) = A(t)y(t) + B(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$
 est donnée par
$$y(t) = S(t, t_0)y_0 + \int_{t_0}^t S(t, s)B(s)ds$$

Prop 34: C'est une généralisation de la valeur de la constante en annexe 1 $y(t) = A(t)$

Méthode 35 (Valeur de la constante)

Sub [L]: $y' = A(t)y + B(t)$ où $B \in C^0(I, \mathbb{R})$, $A \in C^0(I, \mathbb{R}_n(\mathbb{R}))$

Sub $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$ solutions indépendantes du système homogène associé

[L] \Rightarrow sous la forme $y = \sum_{j=1}^m \lambda_j(t)v_j(t)$, $\lambda_j \in C^1(I, \mathbb{R})$ et v est solution de [L] si $\sum_{j=1}^m \lambda_j'(t)v_j(t) = B(t)$. On trouve les λ_j' puis les λ_j par intégration

Ex 36: La solution de $y' + y = \sin(t)$ sur \mathbb{R} est $t \mapsto \lambda \cos(t) + \mu \sin(t) + t \cos(t)$

Prop 37: D'autres méthodes existent pour chercher des solutions

Ex 38 (Changement de fonction)

Soit à résoudre sur \mathbb{R}^+ l'EDL $xy'' + 2xy'(x) + y(x) = 0$ [L]. On pose $x = e^t$, et $z(t) = y(x) = y(e^t)$. En dérivant z , on a l'équation [L] en [L'] : $z''(t) + z'(t) + z(t) = 0$ sur \mathbb{R} que l'on résout. Les solutions réelles sont $t \mapsto \sqrt{2} \left[\lambda \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right) + \mu \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right) \right]$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$.

Ex 35 (Système développable en série entière)
 $xy''(x) + 2y'(x) + 6xy(x) = 0$ admet une solution sur \mathbb{R}
 $z_1 = a_0 \sin(\sqrt{2}x), a_0 \in \mathbb{R}$
 (On écrit $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, on dérive et on identifie dans $\mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, on obtient des relations sur les coefficients)

III - Étude qualitative des systèmes différentiels

1 - Stabilité des équilibres

On considère le système autonome (invariant) $[A]: x'(t) = f(x(t))$, où $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$

Def 40. Un point d'équilibre (ou zéro) de $[A]$ est un point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(x_0) = 0$

Def 41. On dit qu'un point d'équilibre x_0 est -

- (i) Stable si $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$: $\forall x(t_0) \in TB(x_0, \delta)$, $x(t) \in TB(x_0, \epsilon)$ (Boule ouverte) (cf Fig 4)
- (ii) Asymptotiquement stable si $\exists \delta > 0$ tel que si $x(t_0) \in TB(x_0, \delta)$, $x(t) \rightarrow x_0$ en plus d'être stable (cf Fig 2)
- (iii) Instable si $\forall \delta > 0$ il n'existe pas de δ (cf Fig 3)

Th 42 (Théorème de stabilité, cas linéaire)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ (spectre de A). Alors le point d'équilibre 0 est :

- (i) Asymptotiquement stable si $\forall j \in \{1, \dots, n\}, \operatorname{Re}(\lambda_j) < 0$
- (ii) Stable si $\forall j \in \{1, \dots, n\}, \operatorname{Re}(\lambda_j) \leq 0$ ou $\operatorname{Re}(\lambda_j) = 0$ et le bloc de A correspondant à λ_j est diagonal ($\lambda_j I_{r_j}$)

Th 43: (Stabilité en première approximation) Soit le système $\begin{cases} y' = f(y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$ où $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Si le système linéaire $\begin{cases} y' = dg(0) \cdot y \\ y(0) = y_0 \end{cases}$ admet un point d'équilibre asymptotiquement stable, alors 0 est un point d'équilibre asymptotiquement stable pour $\begin{cases} y' = f(y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$.

Ex 44. Soit le système $\begin{cases} x' = x(x+z) \\ y' = y(y+z) \end{cases}$, $x, y < 0, (0,0)$ est asymptotiquement stable. On pose $dg(0) = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}$.

2 - Cas particulier : Systèmes différentiels à coefficients constants sur \mathbb{R}^2

Prop 45. On considère le système $y' = Ay, A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$

- (i) Si λ_1, λ_2 sont des valeurs propres réelles, soit λ_1, λ_2 et λ_1^* et λ_2^* conjugués.
 - Si λ_1, λ_2 sont de même signe ($\operatorname{tr}(A) \neq 0$), et $0 < |\lambda_1| < |\lambda_2|$, alors les trajectoires sont tangentes à \mathbb{R}^n et forment des paraboles de sommet $\frac{1}{\lambda_1}$ (cf Fig 4)
 - Si $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ (saddle point), on a un col (instabilité) (cf Fig 5)
 - (ii) Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ est une valeur propre réelle double de A.
 - Si A est diagonalisable, on a un noeud propre stable ($\lambda < 0$) ou instable ($\lambda > 0$) (cf Fig 6)
 - Si A n'est pas diagonalisable, on a un noeud récepteur stable ($\lambda < 0$) ou instable (cf Fig 7)

- (iii) Si $\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta, \beta \neq 0$: les valeurs propres sont conjuguées.
 - $\alpha \neq 0$: On a un foyer stable ($\alpha < 0$) ou instable ($\alpha > 0$) (spirales) (cf Fig 8)
 - $\alpha = 0$, on a un centre (solutions périodiques)

* On parle de noeud impropre stable ($\lambda_1 < 0$) ou instable ($\lambda_1 = 0$)

IV - Équations différentielles linéaires en sens des distributions

On note $\mathcal{D}(\mathbb{R}) = C_c^\infty(\mathbb{R})$ et $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ l'ensemble des distributions

Def 46: (i) Si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, on définit $T' \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ par $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \langle T', \varphi \rangle = -\langle T, \varphi' \rangle$
 (ii) Si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et $g \in C^\infty(\mathbb{R})$, alors $T \cdot g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \langle T \cdot g, \varphi \rangle = \langle T, g \cdot \varphi \rangle$

Prop 47: Les solutions de $T' = 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ sont les constantes

Prop 48: Les solutions de $xT' + T = 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ sont de la forme $T = a \delta_0 + c \nu_0$ ($\frac{1}{x}$), $a, c \in \mathbb{R}$

Def 49 (Convolution de distributions) Soient $S, T \in \mathcal{D}'_s = \mathcal{D}'_s(\mathbb{R})$ (Support compact)

On définit le produit de convolution de S et T par $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \langle S * T, \varphi \rangle = \langle S, \int_{\mathbb{R}} T(x) \varphi(x+y) dx \rangle$

Prop 50: $\forall T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \forall \lambda \in \mathbb{N}, T * \delta_0^{(\lambda)} = \delta_0^{(\lambda)} * T = T^{(\lambda)}$

Th 51 (Une EDL dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$)

Une solution de l'EDL $[E]: T^{(n)} + a_{n-1} T^{(n-1)} + \dots + a_1 T' + a_0 T = S$ avec $S \in \mathcal{D}'_s(\mathbb{R}), (a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$, $a_0 \neq 0$, d'ordre n dans $\mathcal{D}'_s(\mathbb{R})$ est donnée par $t \mapsto H(t) e^{\lambda_0 t} + \dots + H(t) e^{\lambda_{n-1} t} + S(t)$ (DIFT 2)

où $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{C}$ sont les racines du polynôme $X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_0$

Ex 52 (i) $\langle \delta_0, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'_s} = \varphi(0)$ (valeur)
 (ii) $\langle \nu_0, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'_s} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx$ (valeur principale)

Annexe

Points d'équilibre

• Stabilité



Fig 1

• Asymptotique stable

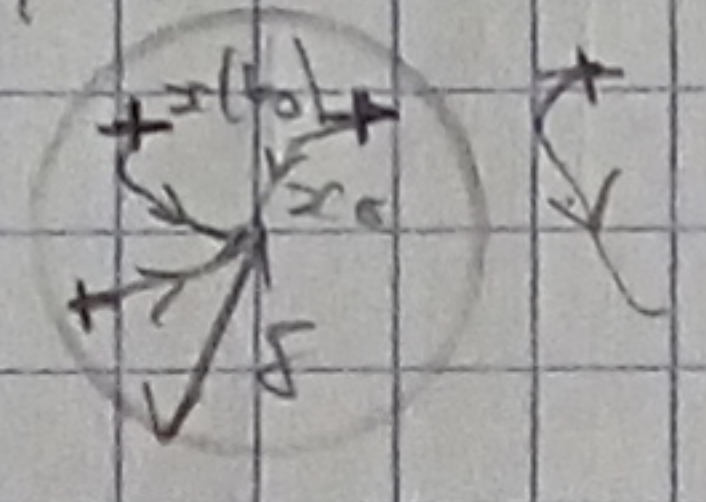


Fig 2

• Instabilité

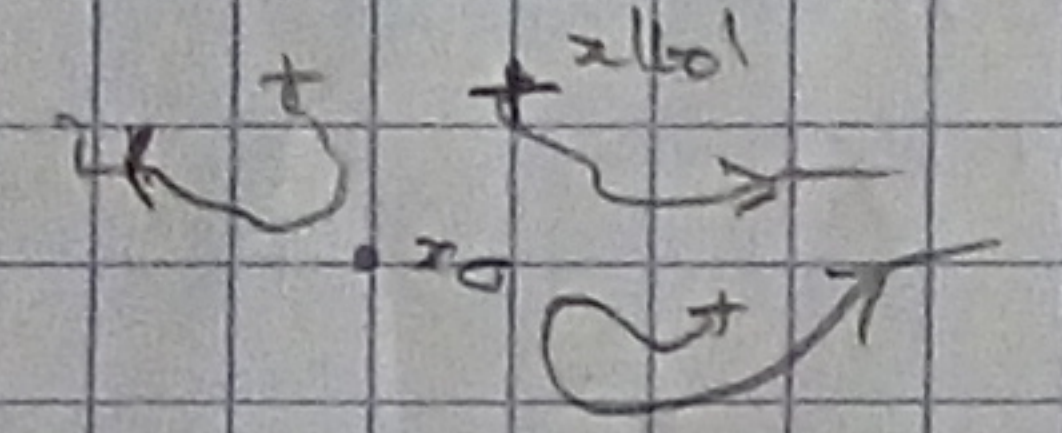
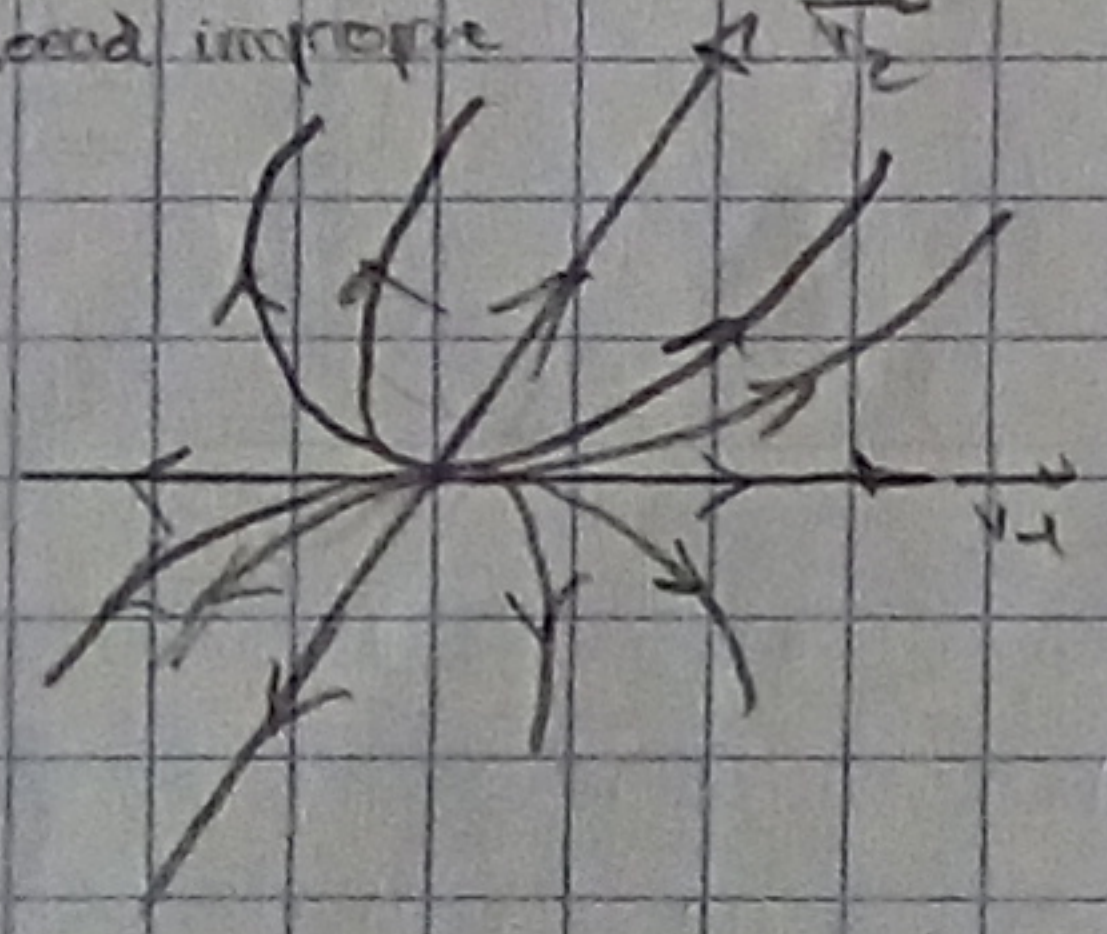


Fig 3

Systèmes différentiels dans \mathbb{R}^2

• Nœud impropre

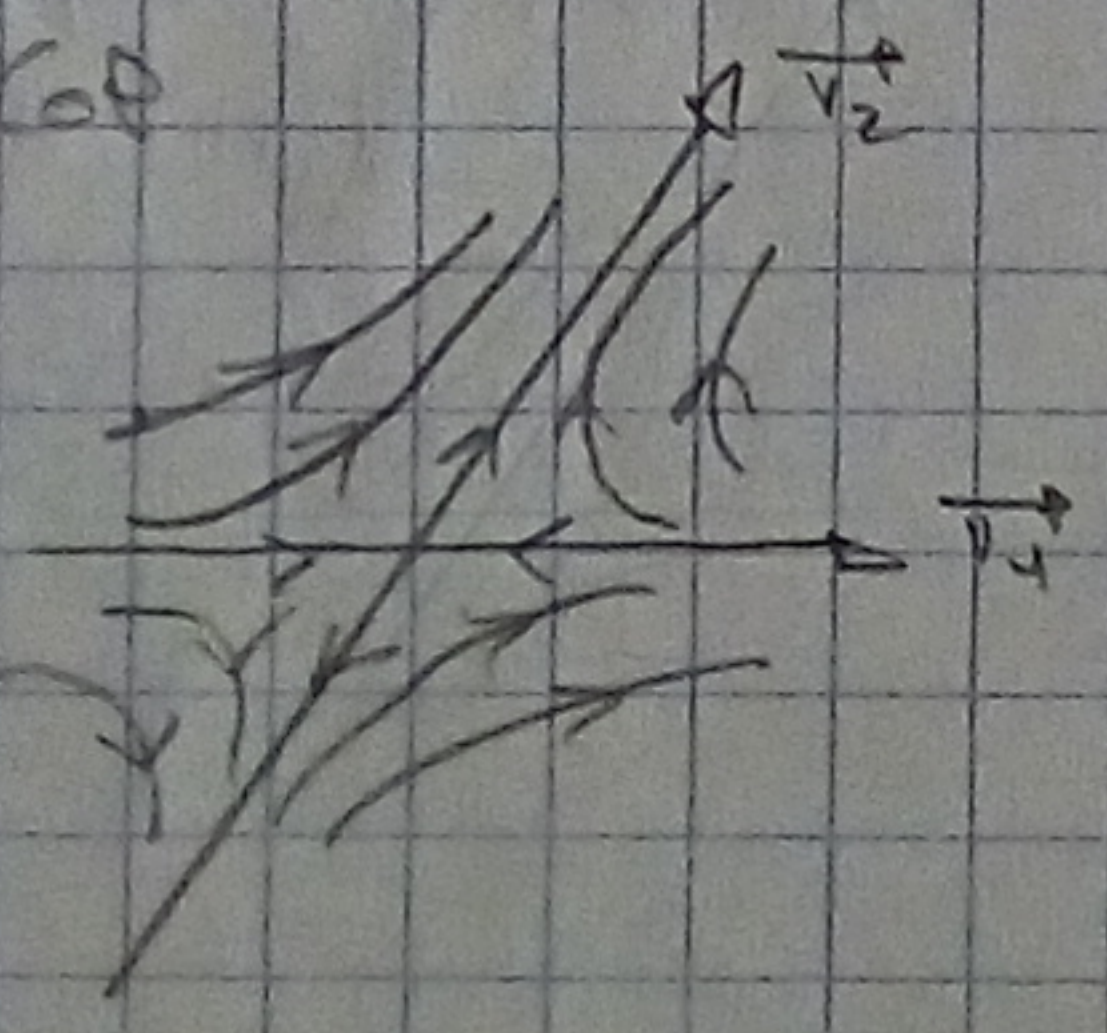


$0 < \lambda_1 < \lambda_2$ (instable)



$\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ (stable) Fig 4

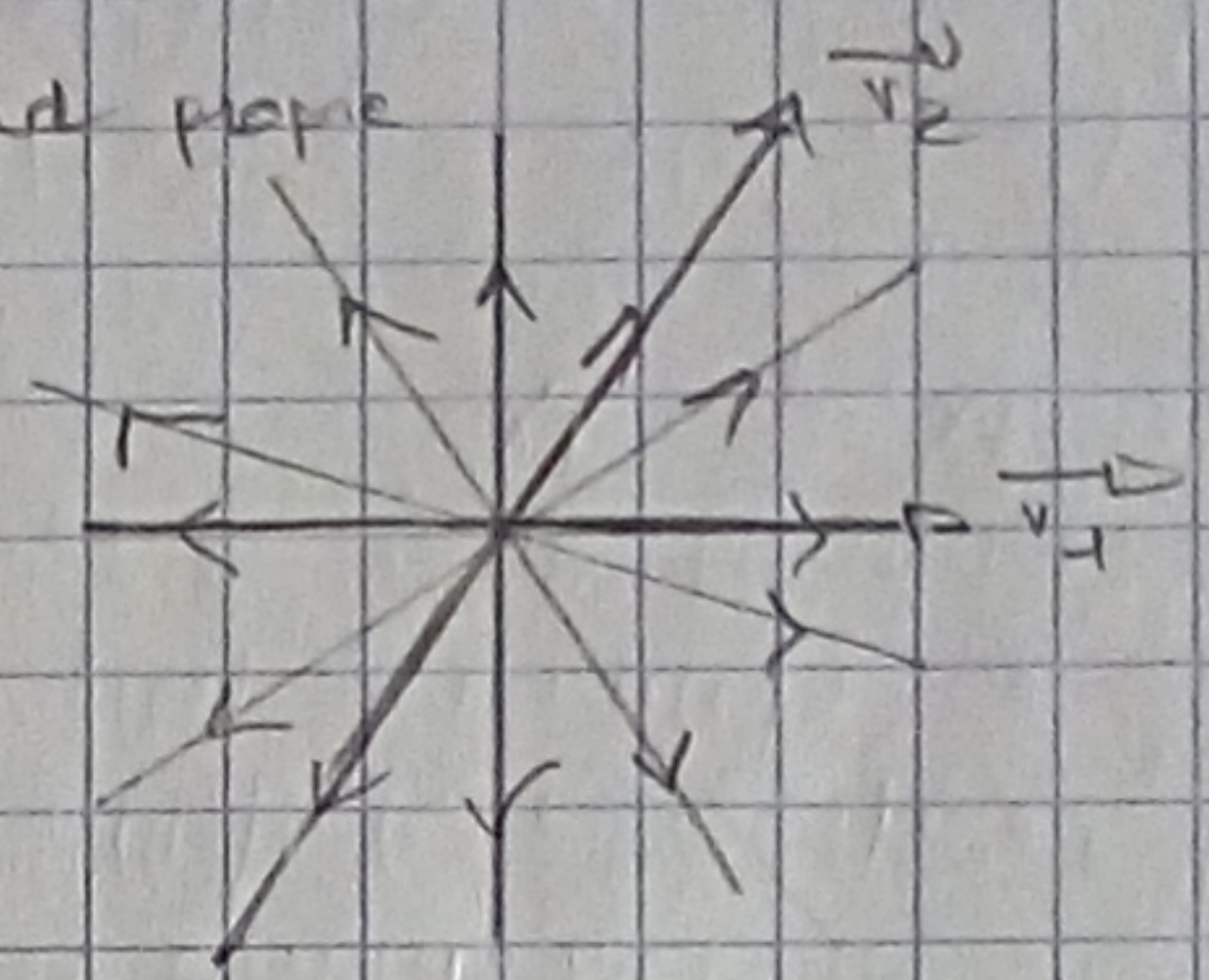
• Col



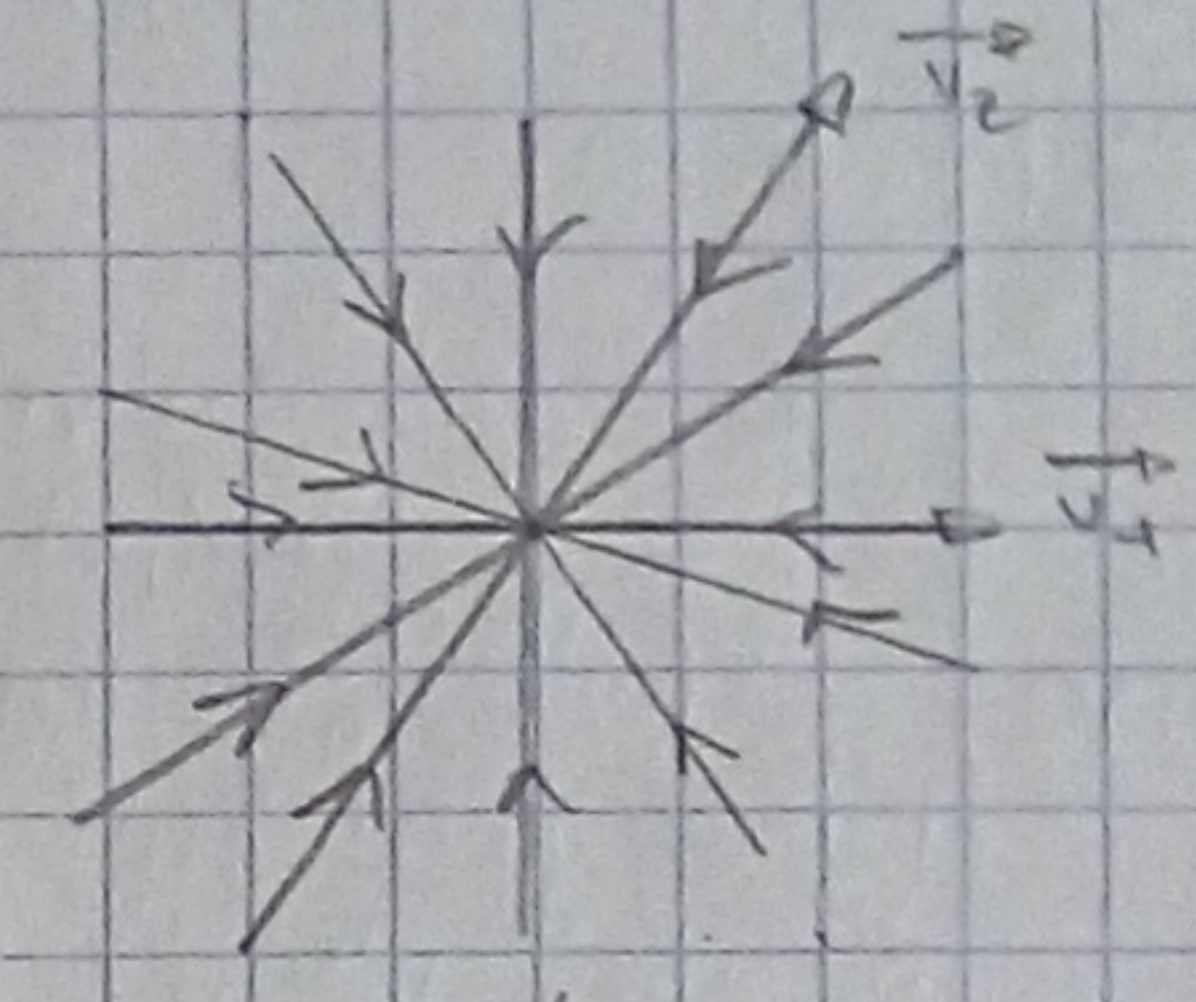
$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ Fig 5

(Instabilité)

• Nœud propre

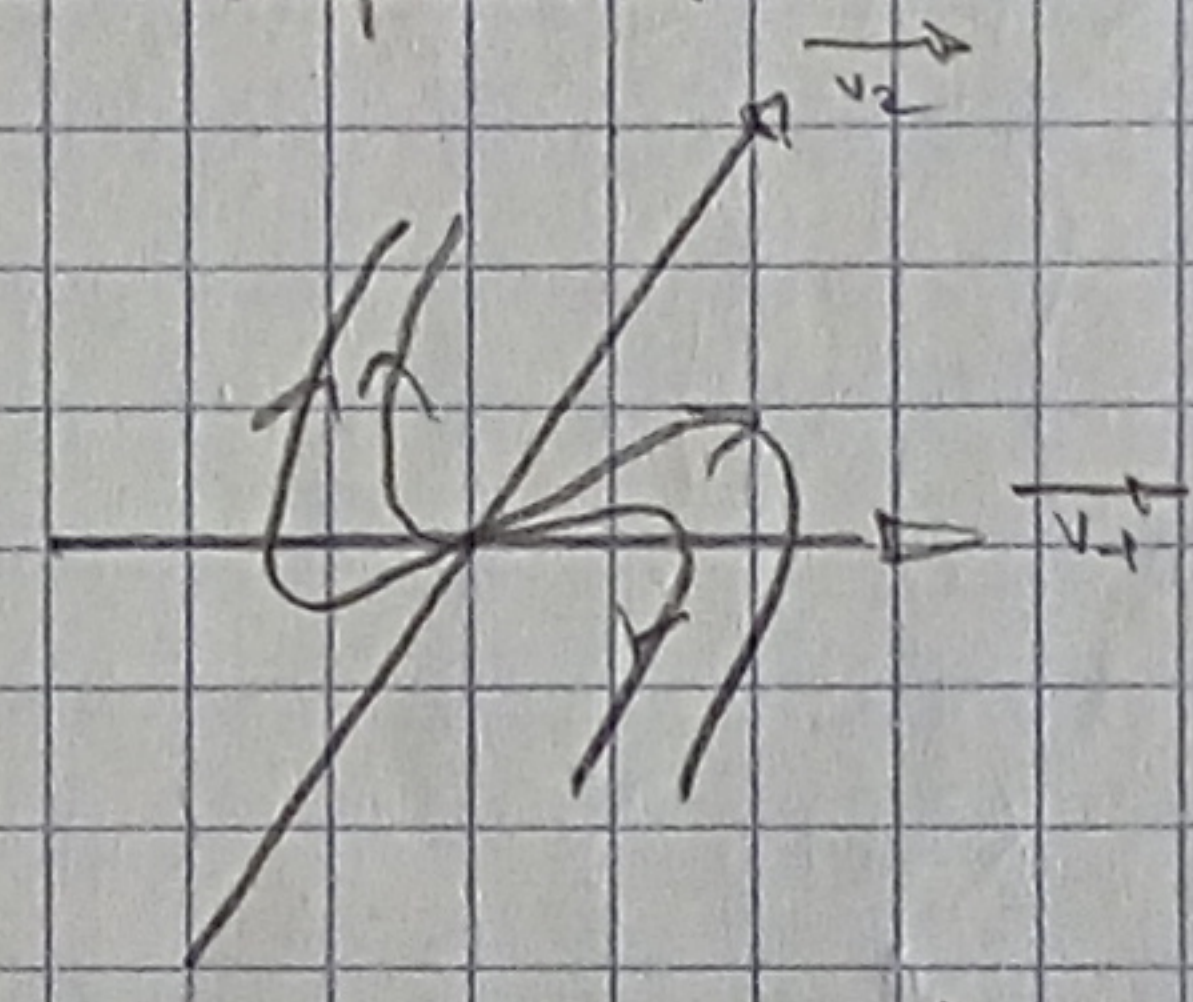


$\lambda > 0$ (instable)

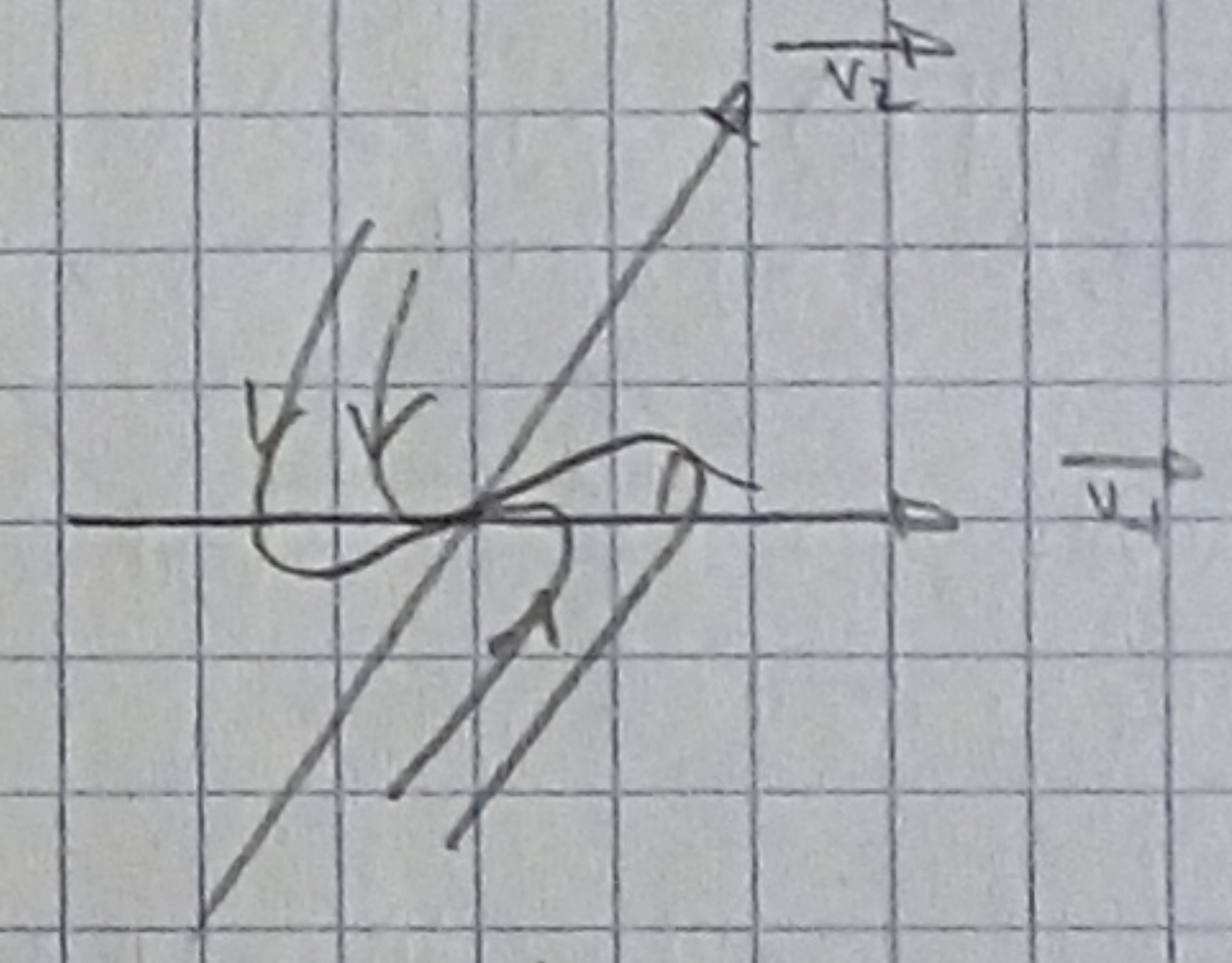


$\lambda < 0$ (stable) Fig 6

• Nœud exceptionnel

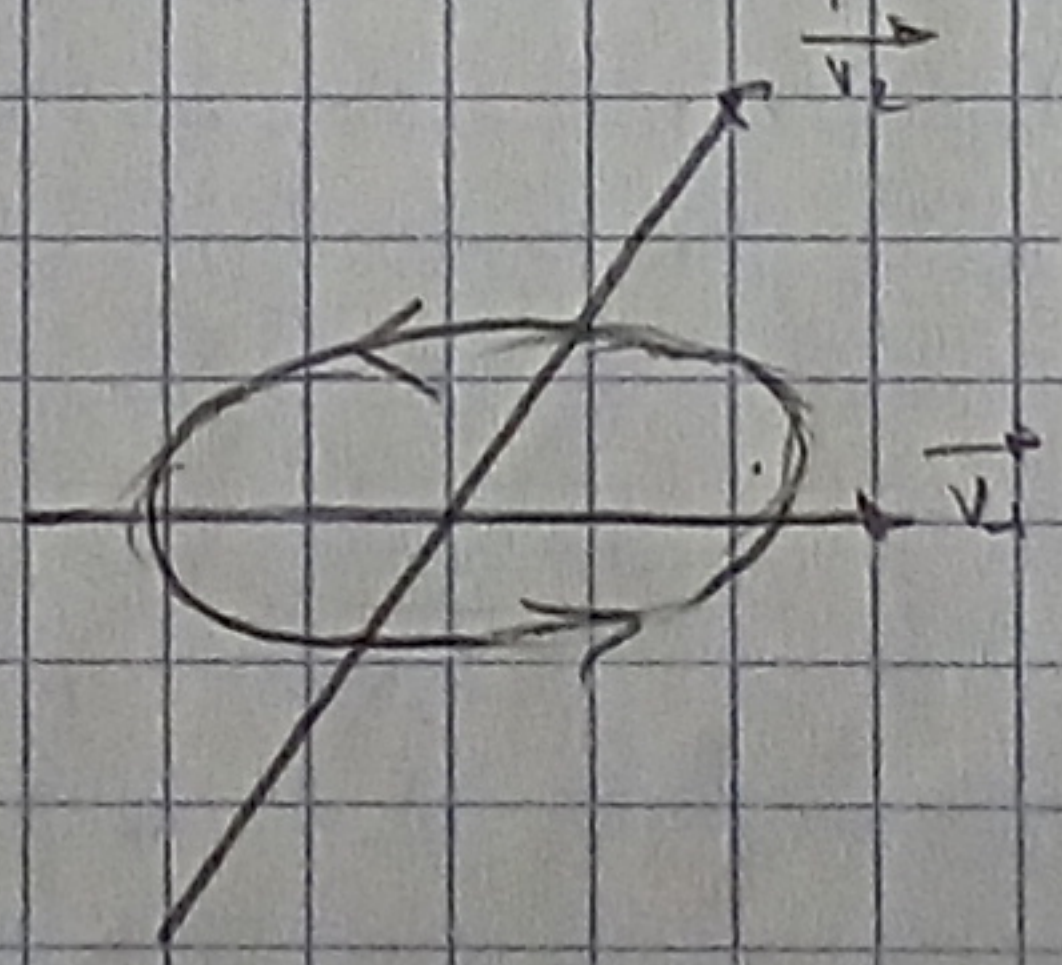


$\lambda > 0$ (instable)

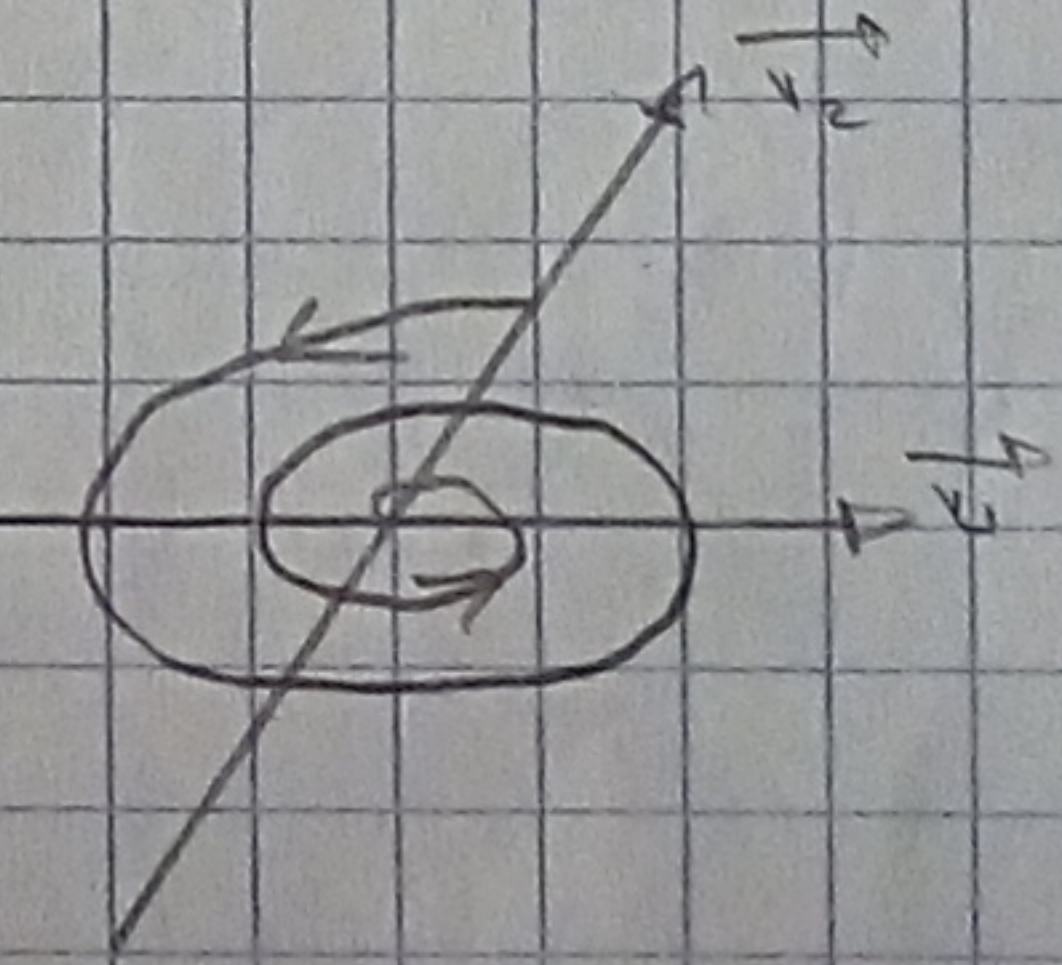


$\lambda < 0$ (stable) Fig 7

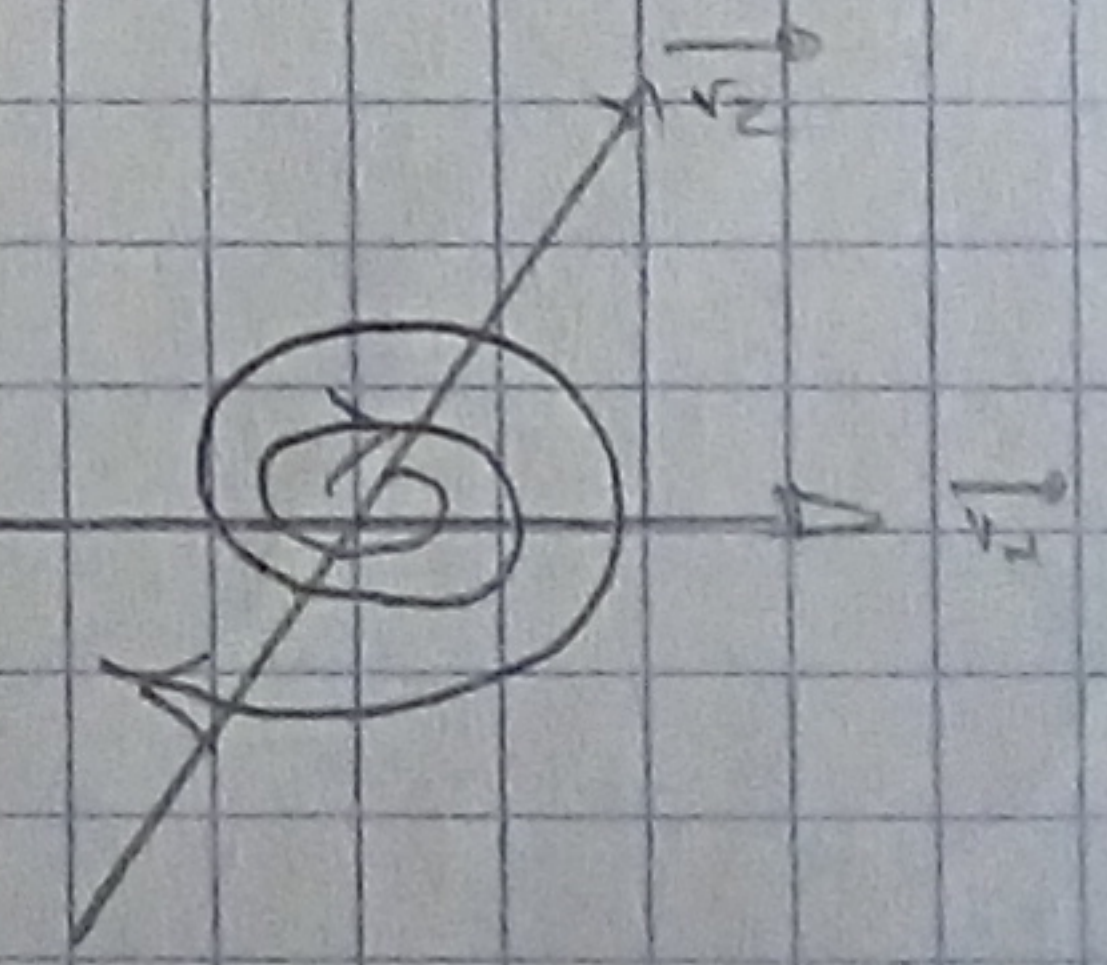
• Centre et Foyer



Centre ($\alpha = 0$)



Foyer stable ($\alpha < 0$)



Foyer instable ($\alpha > 0$)