Cadre : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}^*$

I - Algèbre linéaire

1 - Normes subordonnées et rayon spectral

Def 1 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On définit la norme subordonnée à $\|\cdot\|$ de A où $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathbb{K}^n$ par :

$$|||A||| = \sup_{x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

Prop 2 : $|||\cdot|||$ est une norme, i.e. vérifie les axiomes suivants :

(i) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ $|||\lambda A||| = |\lambda|\,|||A|||$ (Homogénéité)

(ii) $|||A||| = 0 \Rightarrow A = 0$ (Séparation)

(iii) $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $|||A+B||| \leq |||A||| + |||B|||$ (Inégalité triangulaire)

Ex 3 $|||A|||_2 = \sup_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2$, $|||A|||_1 = \sup_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_1$, $|||A|||_\infty = \sup_{\|x\|_\infty=1} \|Ax\|_\infty$

Rq Pour toute norme subordonnée $|||\cdot|||$ on a $|||I_n||| = 1$. De plus, $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $|||AB||| \leq |||A|||\,|||B|||$ (Norme d'algèbre)

Rq 4-bis : La norme de Frobenius $A \mapsto \mathrm{Tr}(A^TA)^{\frac{1}{2}}$ est une norme, mais n'est pas subordonnée, puisque $\mathrm{Tr}(I_n^T I_n) = \mathrm{Tr}(I_n) = n$

Def 5 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On définit le rayon spectral de A par $\rho(A) = \max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|$ où $\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{K} : \exists x \neq 0 : Ax = \lambda x\}$ est le spectre de A

Prop 5-bis : Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: $\rho(AB) \leq \rho(A)\rho(B)$

Prop 6 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ $|||A|||_2 = \rho(A^*A)^{\frac{1}{2}}$

Rq 7 : En particulier, si A est auto-adjointe (i.e. $A^* = A$), alors $|||A|||_2 = \rho(A)$

Prop 8 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les assertions suivantes sont équivalentes

(i) $\lim_{k \to +\infty} A^k = 0$ (ii) $\forall x \in \mathbb{K}^n$, $\lim_{k \to +\infty} A^k x = 0_{\mathbb{K}^n}$ (iii) $\rho(A) < 1$

Ex 8-bis : $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, $\rho(A) = \frac{1}{2} < 1$, donc $A^k \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$

2 - Conditionnement

Def 9 : Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{K}^n$ et $|||\cdot|||$ sa norme subordonnée. On définit le conditionnement de $A \in GL_n(\mathbb{K})$ relativement à $\|\cdot\|$ par :

$$\mathrm{Cond}_{\|\cdot\|}(A) = |||A|||\cdot|||A^{-1}|||$$

Rq 10 : Pour la norme $\|\cdot\|_p$, $p \in [1, +\infty]$, on note $\mathrm{Cond}_{\|\cdot\|_p}(\cdot) = \mathrm{Cond}_p(\cdot)$

Prop 11 : (Quelques propriétés du conditionnement)

Soient $A, B \in GL_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$; on note $\mathrm{Cond}(\cdot) = \mathrm{Cond}_{\|\cdot\|}(\cdot)$

(i) $\mathrm{Cond}(A) = \mathrm{Cond}(A^{-1})$ (iv) $\forall P \in O_n(\mathbb{R})$ $\mathrm{Cond}(P) = 1$,

(ii) $\mathrm{Cond}(AB) \leq \mathrm{Cond}(A)\,\mathrm{Cond}(B)$ en particulier $\mathrm{Cond}(I_n) = 1$

(iii) $\mathrm{Cond}(\lambda A) = \mathrm{Cond}(A)$ (v) $\mathrm{Cond}(A) \geq 1$

Prop 12 : (Propriétés du conditionnement relativement à $\|\cdot\|_2$). Soit σ le spectre d'une matrice

(i) $\mathrm{Cond}_2(A) = \left[\dfrac{\max_{\lambda \in \sigma(AA^*)} |\lambda|}{\min_{\lambda \in \sigma(AA^*)} |\lambda|}\right]^{\frac{1}{2}}$

(ii) Si A est auto-adjointe, alors $\mathrm{Cond}_2(A) = \dfrac{\max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|}{\min_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|}$

Ex 14 Si $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathrm{Cond}_2(A) = \dfrac{3+\sqrt{8}}{3-\sqrt{8}}$

3 - Conditionnement et systèmes linéaires

Def 15 : On appelle système linéaire (sous forme matricielle) toute équation de la forme $AX = B$, où $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $X \in \mathbb{K}^n$ est l'inconnue et où $B \in \mathbb{K}^m$ est le second membre. Le système est dit homogène si $B = 0$.

Dans toute cette sous-partie, on suppose que $m = n$ et $A \in GL_n(\mathbb{K})$.

Prop 17. Soit à résoudre $AX = B$. Supposons que le système soit « perturbé » en $A(X + \delta X) = B + \delta B$. On a alors l'estimation suivante :

$$\frac{\|\delta X\|}{\|X\|} \leq \mathrm{Cond}_{\|\cdot\|}(A) \frac{\|\delta B\|}{\|B\|}$$

Prop 18. Soit à résoudre $AX = B$. Supposons que le système soit « perturbé » en $(A + \delta A)(X + \delta X) = B$. On a alors l'estimation suivante

$$\frac{\|\delta X\|}{\|X\|} \leq \mathrm{Cond}_{\|\cdot\|}(A) \frac{|||\delta A|||}{|||A|||}$$

Rq 19 : Plus le conditionnement de la matrice est élevé, plus le système linéaire sera sensible aux perturbations des données. On dit que la matrice est mal conditionnée.

Appli 20 (Laplacien discret)

Soit A la matrice de discrétisation du Laplacien (1D)

$A_n = (n+1)^2 \begin{bmatrix} 2 & -1 & & (0) \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ (0) & & -1 & 2 \end{bmatrix}$, approchant le problème $\begin{cases} -u''(x) = f(x) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$ $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$

$\sigma(A_n) = (n+1)^2 \left\{ 2\left(1 - \cos\left(\frac{2\pi j}{n+1}\right)\right) \right\}_{1 \leq j \leq n}$, et $\mathrm{Cond}(A_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$

Ainsi, plus important sera le nombre de subdivisions en espace, moins bien conditionnée sera A_n.

DVPT 1

233

II – Méthode de résolution de systèmes linéaires

Dans cette partie, on prend $n = m$ (cf. Def 15) et $A \in GL_n(\mathbb{K})$

1 – Méthodes directes : décompositions matricielles

Prop 21 : Si A est triangulaire supérieure (resp. inférieure), on peut toujours résoudre $AX = B$ via l'algorithme de remontée (resp. de descente)

ordre décroissant

$$\forall i \in [\![n, 1]\!],\ x_i = \frac{1}{A_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=i+1}^{n} A_{ij} x_j\right] \quad \left(\text{resp } \forall i \in [\![1, n]\!]\ x_i = \frac{1}{A_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij} x_j\right]\right)$$

Ex 22 :
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Th 23 (Décomposition PLU) Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$. Il existe P une matrice de permutation, L triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale, U triangulaire supérieure telle que
$$A = PLU$$

Ex 24 :
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

Th 25 (Décomposition de Cholesky) Soit A une matrice auto-adjointe ($A^* = A$) définie positive (i.e. $\langle x | Ax \rangle = 0 \iff x = 0$). Alors il existe $L \in GL_n(\mathbb{K})$ triangulaire inférieure telle que : $A = LL^*$. Les coefficients diagonaux de L sont dans $\mathbb{R}_+^*$

Ex 26 :
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ i & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -i \\ i & 2 \end{bmatrix}$$

Th 27 (Factorisation QR) Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$. Alors il existe une unique paire de matrices (Q, R) telle que $Q \in O_n(\mathbb{R})$ et R soit triangulaire supérieure et : $A = QR$

Rq 28 On a donc $AX = B \iff RX = Q^* B$ et on applique l'algorithme de remontée.

Prop 29 L'algorithme de factorisation QR utilisant l'algorithme de Gram-Schmidt est en $O(n^3)$ opérations

2 – Méthodes itératives

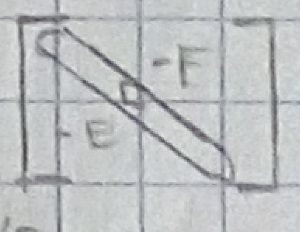
Def 30. On écrit $A = M - N$, où $M \in GL_n(\mathbb{K})$ et M^{-1} est facile à calculer. $AX = B$ devient $MX = NX + B \iff X = F(X)$, où $F : X \longmapsto M^{-1}NX + M^{-1}B$. On s'est ramené à un problème de point fixe : la solution $A^{-1}B$ est un point fixe de F. On définit (X_n) comme
$$\begin{cases} X_0 \in \mathbb{K}^n \\ X_{n+1} = F(X_n) \end{cases}$$

Def 31 : On dit que la méthode converge si $\forall B \in \mathbb{K}^n$, la suite $(X_n)_n$ est converge vers la solution $A^{-1}B$

Prop 32 : (i) Si $\rho(M^{-1}N) < 1$, alors la méthode converge

(ii) Si il existe une norme $\|\ \|$ telle que $|||M^{-1}N||| < 1$ alors la méthode converge

Rq 33 : Comme nous sommes en dimension finie, le choix de la norme importe peu

Def 34 : On décompose A de la manière suivante : $A =$ 

$(A = D - E - F)$

On définit alors les méthodes suivantes :

(i) Méthode de Jacobi : $M = D$, $N = E + F$

(ii) Méthode de Gauss-Seidel $M = D - E$, $N = F$

Prop 35 : (i) Si A est à diagonale strictement dominante, alors la méthode de Jacobi converge

(ii) Si $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, alors la méthode de Gauss-Seidel converge

Prop 36. Si la méthode converge, alors on a, pour $X_* = A^{-1}B$
$$\|X_k - X_*\| \leqslant |||M^{-1}N|||^k \|X_0 - X_*\| \quad (\text{pour une norme } |||\cdot|||)$$
(la convergence est géométrique)

Rq 37 Si $\rho(M^{-1}N) < 1$, on a : $\|X_k - X_*\| \leqslant \rho(M^{-1}N)^k \|X_0 - X_*\|$

Ex 37-bis : Si $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $A = M - N$, $M = 2I_2$, $N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\rho(M^{-1}N) = \frac{1}{2}$. A est à diagonale strictement dominante donc la méthode de Jacobi converge.

Th 38 (Gradient à pas fixe) Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$. Résoudre $Ax = b$ revient à minimiser $f : x \longmapsto \frac{1}{2}\langle Ax | x \rangle - \langle b | x \rangle$. Soit $\rho > 0$. Si ρ est assez petit, alors la suite (x_k) donnée par : $\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R}^n \\ \forall k \in \mathbb{N},\ x_{k+1} = x_k - \rho(Ax_k - b) \end{cases}$ converge vers x^* solution de $Ax = b$.

III – Applications

1 – Calcul de la [illegible] des valeurs propres

Th 39 : (Méthode de la puissance)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ avec $|\lambda_1| > \dots > |\lambda_n|$. Soit la suite X_k définie par :
$$\begin{cases} X_0 \notin \ker(A - \lambda_1 I_n) \\ X_{k+1} = A^k X_0 \end{cases}$$

Alors $\dfrac{1}{\|X_k\|^2}\langle X_k | X_{k+1} \rangle \xrightarrow[k \to +\infty]{} \lambda_1$, où $\langle x | y \rangle = x^* y$

et $\lambda_1^{-k} X_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} V_1$ où V_1 est un vecteur propre associé à λ_1

Prop 40 : Si les valeurs propres de A sont simples, la vitesse de convergence de la méthode de la puissance est en $O\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^n\right)$ (géométrique)

Rq 41 : La convergence est d'autant plus rapide que λ_1 et λ_2 seront éloignés en module.

Ex 42 : $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Soit $x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = \begin{bmatrix} 2^n & 2^n - 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

donc $\|A^n x_0\|^2 = 4^n - 2 \cdot 2^n + 2 \underset{n \to +\infty}{\sim} 4^n$

$\langle A^{n+1} x_0 | A^n x_0 \rangle = 2 \cdot 4^n - 2^{n+1} - 2^n + 2 \underset{n \to +\infty}{\sim} 2 \cdot 4^n$

D'où $\frac{1}{\|x_n\|^2} \langle x_{n+1} | x_n \rangle \xrightarrow[n \to +\infty]{} 2$

Th 43 (Méthode QR)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On pose $A^{(1)} = A$, et, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $A^{(n+1)} = R^{(n+1)} Q^{(n+1)}$

Alors $(A^{(n)})$ converge vers une matrice triangulaire dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de A (si elles sont positives)

Th 44 (Théorème de Gerschgorin)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$

Alors $\sigma(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - a_{i,i}| \leq \sum_{i \neq j} |a_{i,j}| \right\}$

Rq 45 : Ce théorème implique donc que les valeurs propres d'une matrice dont les coefficients extra-diagonaux sont « négligeables » devant les coefficients diagonaux seront proches de ces coefficients diagonaux.

On a donc une localisation des valeurs propres.

Ex 46 : $A = \begin{bmatrix} 100 & 1 \\ 1 & 100 \end{bmatrix}$ $\sigma(A) = \{99, 101\}$

$\sigma(A) \subset \overline{D(100, 1)}$

Appli 47 : (Calcul de racines de polynômes)

Soit $P = X^n + \sum_{j=0}^{n-1} a_j X^j \in \mathbb{K}[X]$, un polynôme unitaire

Soit $C_P = \begin{bmatrix} 0 & & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & -a_1 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ (0) & & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}$ la matrice compagnon de P

$\chi_{C_P} = \det(XI_n - C_P) = P$, et les racines du polynôme caractéristique sont les valeurs propres de la matrice. Pour les trouver, on peut appliquer un algorithme à C_P.

2 - Le problème des moindres carrés

Def 48 : On appelle problème des moindres carrés le problème consistant à rechercher $X \in \mathbb{K}^n$ tel que :

$$\|AX - B\|_2 = \min_{Y \in \mathbb{K}^n} \|AY - B\|_2, \text{ où } A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}), B \in \mathbb{K}^m$$

Prop 49 : (Équation normale) Si X est solution du problème des moindres carrés alors X vérifie $A^* A X = A^* B$

Th 50 (Méthode QR) On se place dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. On suppose également que $rg(A) = n \leq m$. Alors, $\exists Q \in O_m(\mathbb{R})$, $\exists R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure, telle que :

$$A = Q \begin{bmatrix} R \\ 0_{m-n,n} \end{bmatrix}$$

DVPT 2

Alors la solution X du problème des moindres carrés est solution du système linéaire $RX = C_1$, où

$$Q^* B = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}, \quad C_1 \in \mathbb{R}^n, \quad C_2 \in \mathbb{R}^{m-n}$$

Références

Analyse numérique appliquée à l'art de l'ingénieur, 1 - Méthodes directes
Patrick Lascaux, Raymond Théodor