Fonctions et espace de fonctions Lebesgue-intégrables

Cadre : $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ p.p = presque partout
λ est la mesure de Lebesgue, m est la mesure de comptage, λ_d = mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$

I - Théorie de l'intégration de Lebesgue

1 - Construction de l'intégrale de Lebesgue

Def 1 : $f : (X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{B})$ est mesurable si $\forall B \in \mathcal{B}$, $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$. Si f est mesurable et $f = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$, $A_i \in \mathcal{A}$ disjoints deux à deux, alors f est dite étagée (elle prend un nombre fini de valeurs)

Lemme 2 : Soit $f : (X, \mathcal{A}) \to [0, +\infty]$ mesurable. Il existe une suite de fonctions étagées positives $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\forall x \in X$, $f_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x)$
On peut choisir $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croissante positive
De plus, si f est bornée, on peut choisir $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que
$\sup_X |f_n - f| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ (cf Fig 1)

Def 3 : Soit $\mathcal{E}_+(X)$ l'ensemble des fonctions étagées positives et soit $f \in \mathcal{E}_+(X)$. Si $f = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$, l'intégrale (de Lebesgue) de f est : $\int_X f \, d\mu = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \, \mu(A_i)$

Si f est mesurable positive, on pose $\int_X f \, d\mu = \sup \left\{ \int_X \varphi \, d\mu, \ \varphi \in \mathcal{E}_+(X), \ \varphi \leq f \right\}$

Prop 4 (Positivité de l'intégrale) Si f est mesurable, positive sur X alors $\int_X f \, d\mu \geq 0$, si $f \leq g$ sont mesurables, alors $\int_X f \, d\mu \leq \int_X g \, d\mu$

Th 5 : (Théorème de Beppo-Levi, ou de convergence monotone)
Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante de fonctions positives et mesurables telles que, $\forall x \in X$, $f_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x)$. Alors f est mesurable positive et
$\lim_{n \to +\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu$

Def 6 : (Intégrale de Lebesgue d'une fonction mesurable)
(i) Si f est mesurable positive sur X, f est dite intégrable par rapport à μ si $\int_X f \, d\mu < +\infty$
(ii) Si $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ est mesurable, on note $f_+ = \max\{f, 0\}$, $f_- = \max\{-f, 0\}$
Si $|f|$ est intégrable, on dit que f est également intégrable en posant
$\int_X f \, d\mu = \int_X f_+ \, d\mu - \int_X f_- \, d\mu$ (f_+ et f_- sont intégrables)

(iii) Si $f : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{C}$ est mesurable, et si $|f|$ est intégrable, alors $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ le sont aussi et : $\int_X f \, d\mu = \int_X \mathrm{Re}(f) \, d\mu + i \int_X \mathrm{Im}(f) \, d\mu$

Prop 7 : (i) Si $f, g : X \to \mathbb{K}$, sont mesurables et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a la linéarité
$\int_X (f + \lambda g) \, d\mu = \int_X f \, d\mu + \lambda \int_X g \, d\mu$
(ii) Si $A \in \mathcal{A}$, $A \subset X$, $\int_A f \, d\mu = \int_X f \mathbb{1}_A \, d\mu = \int_X \mathbb{1}_A f \, d\mu$
(iii) Si f est intégrable, alors $\mu(\{|f| = +\infty\}) = 0$ (f est finie μ-p.p)
(iv) Si $f \geq 0$ est mesurable et $\int_X f \, d\mu = 0$ alors $f = 0$ μ-p.p.
(v) (Inégalité triangulaire) Si f est intégrable, alors $\left| \int_X f \, d\mu \right| \leq \int_X |f| \, d\mu$, avec égalité si $f \geq 0$ μ-p.p.

Th 8 : (i) Si $a < b \in \mathbb{R}$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est Riemann intégrable, il existe $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ λ-Lebesgue intégrable telle que $f = g$ λ-p.p. et $\int_a^b f(x) \, dx = \int_{[a,b]} g \, d\lambda$
(ii) Si $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et si $\sum_{n \in \mathbb{N}} |u_n| < +\infty$, alors $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n = \int_{\mathbb{N}} u \, dm$

Rq 9 : la réciproque n'est pas toujours vraie

C-Ex 10 : $f = \mathbb{1}_{[0,1] \cap \mathbb{Q}}$ est λ-Lebesgue intégrable mais pas Riemann intégrable

2 - Suites d'intégrales et intégrales à paramètre

Lemme 11 : (Lemme de Fatou) Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables positives
Alors $0 \leq \int_X \liminf_{n \to +\infty} f_n \, d\mu \leq \liminf_{n \to +\infty} \int_X f_n \, d\mu$

Rq 12 : L'inégalité peut être stricte

Ex 13 : $f_n = \mathbb{1}_{[n, n+1]}$, $\liminf_{n \to +\infty} f_n = 0$ donc $0 = \int_X \liminf_{n \to +\infty} f_n \, d\lambda < \liminf_{n \to +\infty} \int_X f_n \, d\lambda = 1$

Th 14 : (Théorème de Convergence Dominée de Lebesgue)
Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables telles que $f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} f$ μ-p.p. On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq g$ μ-p.p, g intégrable
Alors f est intégrable et $\int_X |f_n - f| \, d\mu \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, de plus, $\int_X f_n \, d\mu \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_X f \, d\mu$

Appli 15 : $\int_0^1 t^n e^{-t^2} \, dt \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Rq 16 : L'hypothèse de majoration est importante

C-Ex 17 : $f_n = \frac{1}{n} \mathbb{1}_{[n, 2n]}$, $1 = \int_{\mathbb{R}} f_n \, d\lambda$ et $f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ λ-p.p

Th 18 : (Continuité des intégrales à paramètre)
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et $f : I \times X \to \mathbb{K}$. On suppose que
(i) $\forall x \in I$, $t \mapsto f(x, t)$ est mesurable sur X et $\forall t \in X$, $x \mapsto f(x, t)$ est continue sur I
(ii) $\forall (x, t) \in I \times X$, $|f(x,t)| \leq g(t)$, g intégrable. Alors $F : x \mapsto \int_X f(x,t) \, d\mu(t)$ est continue sur I

234

Th 19 : (Régularité des intégrales à paramètre)

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, soit $f : I \times X \to \mathbb{K}$. On suppose que :

(i) $\forall t \in I$, $x \mapsto f(t,x)$ est mesurable et $\forall x \in X$, $t \mapsto f(t,x)$ est de classe C^n sur I

(ii) $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $\forall (t,x) \in I \times X$, $\left|\frac{\partial^j f}{\partial t^j}(t,x)\right| \leq g_j(x)$, g_j intégrables.

Alors $F : t \mapsto \int_X f(t,x)\, d\mu(x)$ est de classe C^n sur I et $\forall t \in I$, $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $F^{(j)}(t) = \int_X \frac{\partial^j f}{\partial t^j}(t,x)\, d\mu(x)$

Appli 20. $\forall t > 0$, $\int_0^{+\infty} e^{-tx} \frac{\sin(x)}{x}\, dx = -\operatorname{Arctan}(t)$, et on a calculé de $t \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-tx} \frac{\sin x}{x}\, dx$ en 0

et $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}$

Th 21 : (Holomorphie des intégrales à paramètre)

Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f : U \times X \to \mathbb{C}$, on suppose que

(i) $\forall z \in U$, $x \mapsto f(z,x)$ est intégrable sur X et μ-pp $z \mapsto f(z,x)$ est holomorphe sur U

(ii) $\forall z \in U$, $\exists r > 0$, $D(z,r) \subset U$ et $\exists g_z$ intégrable : $\forall u \in D(z,r)$, $|f(u,x)| \leq g_z(x)$ μ-p.p.

Alors $F : z \mapsto \int_X f(z,x)\, d\mu(x)$ est holomorphe sur U et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall z \in U$, $F^{(n)}(z) = \int_X \frac{\partial^n f}{\partial z^n}(z,x)\, d\mu(x)$

Appli 22 : $\Gamma : z \mapsto \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t}\, dt$ est holomorphe sur $\{\operatorname{Re}(z) > 0\}$ et

$\Gamma'(z) = \int_0^{+\infty} \ln t \, t^{z-1} e^{-t}\, dt$

3 - Intégrales multiples

Th 23 : (Changement de variables)

Soit $\varphi : U \to V$ un C^1-difféomorphisme, U, V deux ouverts de $\mathbb{R}^d$, $f : V \to \mathbb{R}$ mesurable.

f est λ_d-intégrable sur V ssi $(f \circ \varphi) |J\varphi|$ est λ_d-intégrable sur U, $J\varphi$ est la jacobienne de φ

et $\int_V f(x)\, dx = \int_U f(\varphi(u)) |J\varphi(u)|\, du$

Th 24 : (Théorème de Fubini-Tonelli)

Si $f : (X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \nu) \to \overline{\mathbb{R}_+}$ est mesurable, où μ et ν sont σ-finies, alors :

(i) $x \mapsto \int_Y f(x,y)\, d\nu(y)$ et $y \mapsto \int_X f(x,y)\, d\mu(x)$ sont mesurables

(ii) $\int_{X \times Y} f\, d(\mu \otimes \nu) = \int_X \left(\int_Y f\, d\nu\right) d\mu = \int_Y \left(\int_X f\, d\mu\right) d\nu$

Appli 25. $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$

Th 26 : (Théorème de Fubini)

Soit $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ intégrable par rapport à $\mu \otimes \nu$, μ, ν σ-finies. Alors

(i) $x \mapsto f(x,y)$ et $y \mapsto f(x,y)$ sont intégrables resp. sur X ν-pp et Y μ-pp

(ii) $x \mapsto \int_Y f(x,y)\, d\nu(y)$ et $y \mapsto \int_X f(x,y)\, d\mu(x)$ sont intégrables resp. sur X et Y

(iii) $\int_{X \times Y} f\, d(\mu \otimes \nu) = \int_X \left(\int_Y f\, d\nu\right) d\mu = \int_Y \left(\int_X f\, d\mu\right) d\nu$

Rq 27. L'hypothèse d'intégrabilité est indispensable

C-Ex 28. $f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}$ n'est pas $\lambda \otimes \lambda$-intégrable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$,

$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\, dy\right) dx = \frac{\pi}{4} \neq -\frac{\pi}{4} = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\, dx\right) dy$

III - Analyse fonctionnelle

1 - Structure d'espace vectoriel normé

Déf 29. (i) Pour $p \in [1, +\infty[$, on pose $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu) = \{f : X \to \mathbb{K}$ où $\|f\|_{L^p} < +\infty\} / \sim$

avec $\|f\|_{L^p} = \left(\int_X |f|^p\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$

On fait de même pour $p = +\infty$, avec $\|f\|_{L^\infty} = \inf\{M > 0 : \mu(\{x \in X : |f(x)| > M\}) = 0\}$

(ii) $\forall p \in [1, +\infty]$ on note $L^p(X, \mathcal{A}, \mu) = \mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu) / \sim$, où

$f \sim g \Leftrightarrow f = g$ μ-pp (égalité presque partout). On note parfois $L^p(X)$ pour simplifier

Th 30. (Inégalités de Hölder et de Minkowski)

(i) Soient $p, q \in [1, +\infty]$: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors, si $f \in L^p(X)$, $g \in L^q(X)$, $fg \in L^1(X)$ et

$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \cdot \|g\|_{L^q}$ (Inégalité de Hölder)

(ii) Si $f, g \in L^p(X)$, alors $f + g \in L^p(X)$ et $\|f+g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}$ (Inégalité de Minkowski)

Coro 31 : $(L^p(X), \|\cdot\|_{L^p})$ est un espace vectoriel normé

Prop 32 : Si $\mu(X) < +\infty$, $1 \leq p < q \leq +\infty$, $L^q(X) \subset L^p(X)$

Th 33 : (Théorème de Riesz-Fischer)

$\forall p \in [1, +\infty]$ $(L^p(X), \|\cdot\|_{L^p})$ est complet

DVPT 1

Ex 34 : $(L^2(X), \|\cdot\|_{L^2})$ est un espace de Hilbert

2 - Produit de convolution et applications

Prop 35 : Si $p \in [1, +\infty[$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert, alors $\overline{C_c^0(\Omega)}^{L^p} = L^p(\Omega)$ (fonctions continues à support dans Ω, pour la norme $\|\cdot\|_{L^p}$)

Appli 36 : (Continuité des translations) Si $\forall a \in \mathbb{R}$, $\tau_h : f \mapsto [x \mapsto f(x+h)]$, $\forall h \in \mathbb{R}$

$\tau_h : L^p(\mathbb{R}) \to L^p(\mathbb{R})$ est continue pour $\|\cdot\|_{L^p}$: $\forall f \in L^p(\mathbb{R})$, $\|\tau_h f - f\|_{L^p} \xrightarrow[h \to 0]{} 0$

Déf 37 : Si $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, on définit et on note $f * g$, le produit de convolution

de f avec g, par $\forall x \in \mathbb{R}$, $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y) g(y)\, dy$

Rq 38 : $f * g$ est commutatif et associatif

Prop 39 : (i) Si $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, alors $f * g \in L^1(\mathbb{R})$ et $\|f * g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} \cdot \|g\|_{L^1}$

(ii) Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ alors $f * g \in L^\infty(\mathbb{R})$ et $\|f * g\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1} \cdot \|g\|_{L^\infty}$

(iii) Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, $g \in L^p(\mathbb{R})$, alors $f * g \in L^p(\mathbb{R})$ et $\|f * g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^1} \cdot \|g\|_{L^p}$ $p \in [1, \infty[$

Th 40 : (Régularité du produit de convolution)

Soit $n \in \mathbb{N}$, $p \in [1, +\infty[$. Si $f \in C_c^n(\mathbb{R})$, $g \in L^p(\mathbb{R})$, alors $f * g \in C^n(\mathbb{R})$ et

$\forall j \in [\![0,n]\!]$, $(f * g)^{(j)} = f^{(j)} * g$

Prop 41 : Il n'existe pas d'élément $f \in L^1(\mathbb{R})$ tel que $\forall g \in L^1(\mathbb{R})$, $f * g = g$

Prop 42 : $\operatorname{Supp}(f * g) \subset \overline{\operatorname{Supp}(f) + \operatorname{Supp}(g)}$

Déf 43. (Approximation de l'unité)
Une suite (ϕ_n) est une approximation de l'unité si :
(i) $\phi_n \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ (ii) $\phi_n \geq 0$ (iii) $\int_{\mathbb{R}} \phi_n(x)dx = 1$
(iv) $\forall \varepsilon > 0$, $\int_{\{|x| > \varepsilon\}} \phi_n(x)dx \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Th 44. (Densité dans $L^p(\mathbb{R})$)
Soit $p \in [1, +\infty[$; soit $f \in L^p(\mathbb{R})$, soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ (régulière à support compact), $\phi_n = n\phi(n\cdot)$ est une identité approchée. Alors $\| f - \phi_n * f \mathbb{1}_{[-n,n]} \|_{L^p} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$
Ainsi, $\overline{\mathcal{D}(\mathbb{R})}^{L^p} = L^p(\mathbb{R})$

3 - Transformée de Fourier

Déf 45. (Transformée de Fourier)
Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, on définit la transformée de Fourier $\mathcal{F}[f] = \hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $\xi \mapsto \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} f(x)dx$

Prop 46. (i) Si $f \in C^1(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$, $\forall \eta \in \mathbb{R}$, $\widehat{f'}(\eta) = i\eta \hat{f}(\eta)$
(ii) Si $x \mapsto x f(x) \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\hat{f} \in C^1(\mathbb{R})$ et $\forall \eta \in \mathbb{R}$, $\widehat{xf}(\eta) = i \hat{f}'(\eta)$

Rq 47. $\mathcal{F}$ échange dérivation et régularité

Prop 48. Si $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$

Th 49. (Inversion de Fourier)
Si $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{i\eta x}\hat{f}(\eta)d\eta$ λ-p.p.

Déf 50. (Classe de Schwartz)
$S(\mathbb{R}) = \left\{ f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) : \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}, \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^\alpha f^{(\beta)}(x)| < +\infty \right\}$

Prop 51. $\mathcal{F} : S(\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} S(\mathbb{R})$ est bijective.

Th 52. (Formule de Plancherel)
Si $f \in S(\mathbb{R})$, $\hat{f} \in S(\mathbb{R})$ et $\|f\|_{L^2}^2 = \frac{1}{2\pi}\|\hat{f}\|_{L^2}^2$
$\mathcal{F}$ s'étend à $L^2(\mathbb{R})$ et on a : $\forall f \in L^2(\mathbb{R})$, $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ et $\|f\|_{L^2}^2 = \frac{1}{2\pi}\|\hat{f}\|_{L^2}$

III - Applications

1 - En probabilités

Déf 53. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire ($X : \Omega \to \mathbb{R}$ mesurable). Si $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, on définit son espérance $\mathbb{E}[X] = \int_\Omega X d\mathbb{P}$. La loi de X, $\mathbb{P}_X$, est la mesure image de $\mathbb{P}$ par X.

Th 54. (Théorème de transfert)
Si X est une variable aléatoire réelle et si $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est mesurable, alors $\varphi(X) \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $\mathbb{E}[\varphi(X)] = \int_\Omega \varphi(X) d\mathbb{P}$

Appli 55. (Calcul de moments) Si $p \in [1, +\infty[$ et $X \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, alors $\mathbb{E}[X^p] = \int_\Omega X^p d\mathbb{P}$, on dit que X admet un moment d'ordre p.

Ex 56. (i) $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $\mathbb{P}_X = e^{-\lambda}\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\lambda^n}{n!}\delta_n$, $\mathbb{E}[X^2] = e^{-\lambda}\sum_{n \in \mathbb{N}} n^2 \frac{\lambda^n}{n!} = \lambda^2 - \lambda$
(ii) Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \sigma^2$, $\mathbb{P}_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

2 - Polynômes orthogonaux

Déf 57. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle. Soit $\rho : I \to \mathbb{R}_+^*$ mesurable (fonction poids)
Soit $L^2(I, \rho) = \left\{ f : I \to \mathbb{R} \text{ mesurable} : \int_I |f|^2\rho < +\infty \right\}$, muni du produit scalaire $\langle f | g \rangle_\rho = \int_I f g \rho$. C'est un Hilbert.

Th 58. (Densité des polynômes orthogonaux)
(i) Il existe une unique famille $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes unitaires deux à deux orthogonaux telle que $\deg(P_n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
(ii) Si $\exists \alpha > 0$, $\int_I e^{\alpha|x|}\rho(x)dx < +\infty$, alors $\{P_n, n \in \mathbb{N}\}$ forme une base Hilbertienne de $L^2(I, \rho)$: $\overline{\mathrm{Vect}\{P_n, n \in \mathbb{N}\}} = L^2(I, \rho)$

DVPT 2

Ex 59. Si $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, la famille de polynômes orthogonaux est $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$, les polynômes de Hermite

3 - Distributions et espaces de Sobolev

Déf 60. On note $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions intégrables sur tout compact de $\mathbb{R}$

Déf 61. $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est une distribution si $\forall K \subset \mathbb{R}$ compact, $\exists p_K \in \mathbb{N}$, $\exists C_K > 0$:
$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$: $|\langle T | \varphi \rangle| \leq C_K \max_{m \in [\![0, p_K]\!]} \|\varphi^{(m)}\|_{L^\infty}$
T est une forme linéaire.

Th 62. (Admis)
$L^1_{loc}(\mathbb{R}) \to \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $f \mapsto \left[\varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx\right]$ est bien définie et est injective.

Déf 63. (Dérivée faible) Si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, sa dérivée faible est donnée par $\forall \varphi$, $\langle T' | \varphi \rangle = -\langle T | \varphi' \rangle$

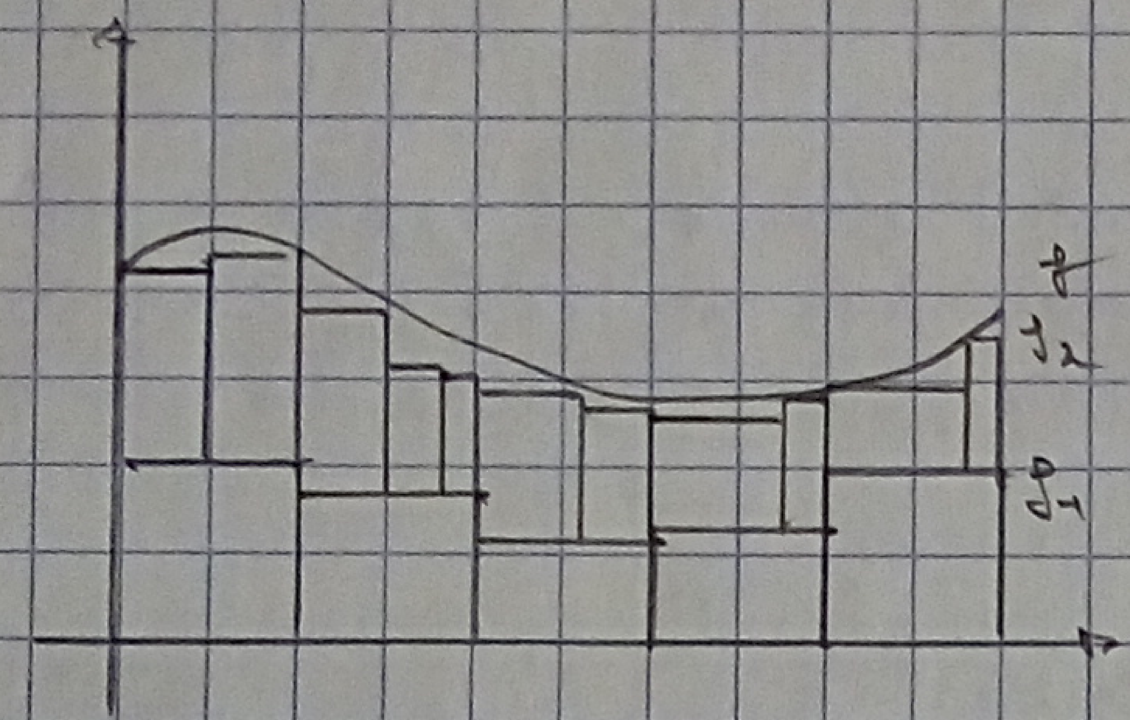
Ex 64. (Heaviside) $\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}' = \delta_0$ (Dirac), $\langle \delta_0 | \varphi \rangle = \varphi(0)$ (dérivée faible dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$)

Déf 65. (Espace de Sobolev)
On définit $H^1(0,1) = \{ f \in L^2(0,1) : f' \in L^2(0,1) \text{ dans } \mathcal{D}'(0,1) \}$

Th 66. $H^1(0,1)$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire $\langle u | v \rangle = \int_0^1 uv\,dx + \int_0^1 u'v'\,dx$
Tout $u \in H^1(0,1)$ admet un représentant continu.

Appli 67. Étude d'EDP elliptiques dont les solutions sont dans les espaces de Sobolev.

Annexe :



Approximation par une suite croissante de fonctions étagées Fig 1

Références :

M. Briane, G. Pagès - Analyse, Théorie de l'intégration

H. Brezis, Analyse Fonctionnelle