$(X,\mathcal{A},\mu)$ est un espace mesuré, et $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

I - Régularité sous le signe intégral

1 - Continuité

Th 1 : Soit $I\subset\mathbb{R}$ un intervalle

Soit $f : X\times I \to \mathbb{K}$. On suppose que

(i) $\forall t\in I$, $x\mapsto f(x,t)$ est mesurable sur X

(ii) Pour μ-presque tout $x\in X$, $t\mapsto f(t,x)$ est continue

(iii) $\exists g\in L^1(X)$ tq pour μ-presque tout $x\in X$, $\forall t\in I$, $|f(x,t)|\le g(x)$

Alors $F : I \to \mathbb{K}$, $t\mapsto \int_X f(x,t)\,d\mu(x)$ est continue.

Rq 2 : On peut remplacer (iii) par : $\forall K\subset I$ compact, $\exists g\in L^1$: pour μ-p.p. tout $x\in X$, $\forall t\in K$, $|f(x,t)|\le g(x)$ (car la continuité est une notion locale)

Ex 3 : Fonction Γ.

Soit $\Gamma :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$, $t \mapsto \int_0^{+\infty} x^{t-1}e^{-x}\,dx$

Rq 4 : L'hypothèse de domination est importante.

Ex 5 : Soit $f : \mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $(x,t)\mapsto e^{-tx}$ et $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $t\mapsto \int_0^{+\infty} e^{-tx}\,dx$

F n'est pas continue en 0.

2 - Dérivabilité

Th 6 : Soit $I\subset\mathbb{R}$ un intervalle ouvert et $k\in\mathbb{N}^*$

Soit $f : X\times I\to\mathbb{K}$. On suppose que :

(i) $\forall t\in I$, $x\mapsto f(x,t)$ est mesurable sur X

(ii) Pour μ-presque tout $x\in X$, $t\mapsto f(t,x)$ est de classe C^k et $\forall j\in[\![1,k]\!]$, $\forall t\in I$, $x\mapsto \frac{\partial^j f}{\partial t^j}(x,t)$ est mesurable sur X

(iii) $\forall j\in[\![1,k]\!]$, $\exists g_j\in L^1(X)$ tq pour μ-presque tout $x\in X$, $\forall t\in I$, $\left|\frac{\partial^j f}{\partial t^j}(x,t)\right|\le g_j(x)$

Alors $F : I\to\mathbb{K}$, $t\mapsto \int_X f(x,t)\,d\mu(x)$ est de classe C^k sur I

et $\forall t\in I$, $\forall j\in[\![0,k]\!]$, $F^{(j)}(t) = \int_X \frac{\partial^j f}{\partial t^j}(x,t)\,d\mu(x)$

Rq 7 : On peut remplacer (iii) par : $\forall j\in[\![1,k]\!]$, $\forall K\subset I$ compact, $\exists g_j\in L^1(X)$ tq pour presque tout $x\in X$, $\forall t\in K$, $\left|\frac{\partial^j f}{\partial t^j}(x,t)\right|\le g_j(x)$ (car la dérivabilité est une notion locale)

Ex 8 : Γ est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$ et, $\forall n\in\mathbb{N}$, sa dérivée n-ième est donnée par :

$$\forall t>0,\quad \Gamma^{(n)}(t) = \int_0^{+\infty} (\ln x)^n x^{t-1} e^{-x}\,dx$$

3 - Holomorphie

Th 9 : Holomorphie sous le signe intégral

Soit $\Omega\subset\mathbb{C}$ un ouvert

Soit $f : X\times\Omega\to\mathbb{C}$. On suppose que

(i) $\forall z\in\Omega$, $x\mapsto f(x,z)$ est mesurable sur X

(ii) Pour μ-presque tout $x\in X$, $z\mapsto f(x,z)$ est holomorphe sur Ω

(iii) $\forall z\in\Omega$, $\exists r>0$, $D(z,r)\subset\Omega$ et $\exists g_z\in L^1(X)$: $\forall u\in D(z,r)$, pour μ-presque tout $x\in X$, $|f(x,u)|\le g_z(x)$

Alors $F : \Omega\to\mathbb{C}$, $z\mapsto \int_X f(x,z)\,d\mu(x)$ est holomorphe sur Ω

et $\forall k\in\mathbb{N}$, $\forall z\in\Omega$, $F^{(k)}(z) = \int_X \frac{\partial^k f}{\partial z^k}(x,z)\,d\mu(x)$

Rq 10 : Seule f doit être dominée ici.

Ex 11 : Si on étend Γ au domaine $\Omega := \{z\in\mathbb{C} : Re(z)>0\}$

$\Gamma : \Omega\to\mathbb{C}$, $z\mapsto \int_0^{+\infty} x^{z-1}e^{-x}\,dx$

II – Produit de convolution et applications

1 – Définition et premières propriétés

Def 12 : Produit de convolution

Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. On définit le produit de convolution de f et g, noté $f * g$, par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, g(x-y)\, dy$$

Prop 13 : Propriétés du produit de convolution

Soient $f, g, h \in L^1(\mathbb{R})$. On a alors

(i) – $f * g = g * f$

(ii) – $(f * g) * h = f * (g * h)$

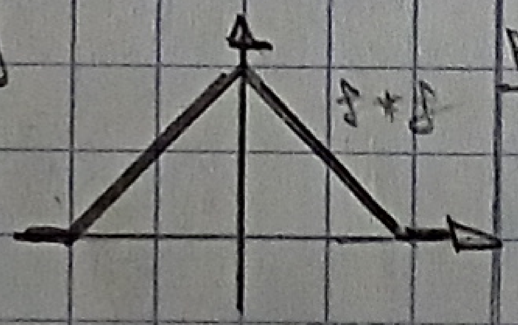
Rq 14 : Le fait que $f, g \in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow f * g \in L^1(\mathbb{R})$ est justifié par la propriété suivante

Prop 15 : Soit $p \in [1, +\infty]$. Soit $f \in L^p(\mathbb{R})$, $g \in L^1(\mathbb{R})$. Alors

$f * g \in L^1(\mathbb{R})$ et $\|f * g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}$ ... $f, g \in L^1(\mathbb{R})$

Ex 16 : Si $f = \mathbb{1}_{[-1,1]}$,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f * f)(x) = \begin{cases} 2 + x & \text{si } x \in [-2, 0] \\ 2 - x & \text{si } x \in [0, 2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



2 – Régularité du produit de convolution

Prop 17 : Soient $f \in \mathcal{C}_c^m(\mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{C}_c^n(\mathbb{R})$ telles que $f * g$ existe. Alors $f * g \in \mathcal{C}^{m+n}(\mathbb{R})$ et $(f * g)^{(m+n)} = f^{(m)} * g^{(n)}$

Rq 18 : Si P est une fonction polynomiale de degré m et $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, alors $P * f$ est une fonction polynomiale de degré m

3 – Approximation de l'unité

Def 19 : Soit $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions régulières à support compact vérifiant

(i) – $\mathrm{Supp}(\varphi_n) \subset \overline{\mathcal{B}}(0, r_n)$ avec $r_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

(ii) – $\varphi_n \geq 0$

(iii) – $\int_{\mathbb{R}} \varphi_n(x)\, dx = 1$

Ex 20 : Soit $\Psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$: $\int_{\mathbb{R}} \Psi(x)\, dx = 1$. Soit $\Psi_n(x) = n \Psi(nx)$. Alors $(\Psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une approximation de l'unité

Prop 21 : Soit $p \in [1, +\infty[$. Soit $f \in L^p(\mathbb{R})$, et soit $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une approximation de l'unité. Alors $\| f^{(n)} * \varphi_n - f \|_{L^p} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ où $f^{(n)} = \mathbb{1}_{[-n,n]} f$

Comme on a $\overline{\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})}^{L^p} = L^p(\mathbb{R})$

III – Applications : Transformations de Laplace et de Fourier

1 – Transformée de Laplace

Def 22 : Soit $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$. On définit la transformée de Laplace par

$$\forall s > 0, \quad \mathcal{L}\{f\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt$$

Prop 23 : Soit $f \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$

(i) – Si $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*)$, alors $\forall s > 0$, $\mathcal{L}\{f'\}(s) = s\,\mathcal{L}\{f\}(s) - f(0)$

(ii) – Si f est mesurable sur $\mathbb{R}_+$, alors $\mathcal{L}\{f\}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a

$$\forall s > 0, \quad \mathcal{L}\{f\}'(s) = -\int_0^{+\infty} t e^{-st} f(t)\, dt$$

Th 24 : Intégrale de Dirichlet

L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$ est convergente et on connaît sa valeur $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}$ — DVPT 1

Rq 25 : C'est un exemple d'intégrale semi-convergente

2 - Transformée de Fourier

Déf 26 : Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On définit sa transformée de Fourier par :

$$\forall \eta \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{F}\{f\}(\eta) = \hat{f}(\eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\eta t} \, dt$$

Prop 27 : Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$.
Alors $\hat{f} \in L^\infty(\mathbb{R})$ et on a $\|\hat{f}\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1}$

Lemme 28 (Lemme de Riemann-Lebesgue)
Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Alors $\lim_{|\eta| \to +\infty} \hat{f}(\eta) = 0$

Prop 29 : Soit $n \in \mathbb{N}$. $\mathcal{F}$ inverse décroissance avec régularité.
(i) Si $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $t \mapsto t^k f(t) \in L^1(\mathbb{R})$ alors $\hat{f} \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R})$ et $\frac{d^n}{d\eta^n} \hat{f}(\eta) = (-i)^n \mathcal{F}\{t^n f(t)\}(\eta)$
(ii) Si $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^n(\mathbb{R})$ alors $\mathcal{F}\{f^{(n)}\}(\eta) = (i\eta)^n \hat{f}(\eta)$

Ex 30 : Transformée de Fourier d'une gaussienne. Soit $a > 0$.
Soit $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto e^{-at^2}$. Alors $\forall \eta \in \mathbb{R}$, $\hat{f_a}(\eta) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\eta^2}{4a}}$

Prop 31 : En général, on a : Produit $\underset{\mathcal{F}}{\overset{\mathcal{F}}{\rightleftarrows}}$ Produit de Convolution
(i) Si $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, $\mathcal{F}\{f * g\} = \hat{f}\hat{g}$
(ii) Si $\hat{f}, \hat{g} \in L^1(\mathbb{R})$, $\mathcal{F}\{fg\} = \frac{1}{2\pi} \hat{f} * \hat{g}$

Th 32 : (Formule d'inversion de Fourier). Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ tq $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Alors on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\eta) e^{ix\eta} \, d\eta$$

Th 33 : (Densité des polynômes orthogonaux)
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle. Soit $\rho : I \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction mesurable (appelée fonction poids). Soit $L^2(I, \rho) = \left\{ f : I \to \mathbb{R} \text{ mesurable} : \int_I |f|^2 \rho < +\infty \right\}$ muni du produit scalaire $\langle f | g \rangle_\rho = \int_I f g \rho$. Il existe une unique famille de polynômes unitaires deux à deux orthogonaux avec $\deg(P_n) = n$.
Si il existe $a > 0$ tel que $\int_I e^{a|x|} \rho(x) \, dx < +\infty$, alors la famille $\{P_n, n \in \mathbb{N}\}$ forme une base hilbertienne de $L^2(I, \rho)$, i.e.

$$f \in L^2(I, \rho) \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \ \langle f | x^n \rangle = 0 \implies f = 0$$

$$\left(\mathrm{Vect}\{P_n, n \in \mathbb{N}\} = \mathrm{Vect}\{x^n, n \in \mathbb{N}\} \right)$$

DVPT 2

3 - Transformée de Fourier en probabilités

Déf 34 (Fonction caractéristique)
Soit Y une variable aléatoire. On appelle fonction caractéristique de Y la fonction

$$\varphi_Y = \widehat{\mathbb{P}_Y} : t \longmapsto \mathbb{E}\left[e^{itY}\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ity} \, d\mathbb{P}_Y(y)$$

Rq 35 : On a un + dans la phase, ce qui diffère de la transformée de Fourier « classique »

Ex 36 : Loi Gaussienne. Si $N \sim \mathcal{N}(0, 1)$, alors $\varphi_N(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$

Th 37 (Théorème d'injectivité de Lévy) Soient Y_1 et Y_2 deux variables aléatoires réelles
$$\forall t \in \mathbb{R}, \ \varphi_{Y_1}(t) = \varphi_{Y_2}(t) \iff \mathbb{P}_{Y_1} = \mathbb{P}_{Y_2}$$

Prop 38 : Si Y_1 et Y_2 sont deux variables aléatoires indépendantes, alors
$$\forall t \in \mathbb{R}, \ \varphi_{Y_1 + Y_2}(t) = \varphi_{Y_1}(t) \varphi_{Y_2}(t)$$

Th 39 : (Théorème central limite) Soit $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées, avec $\mathbb{E}[Y_1] = 0$, $\mathbb{E}[Y_1^2] = 1$

Alors $$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} Y_k \xrightarrow[n \to +\infty]{\text{Loi}} \mathcal{N}(0, 1)$$

Rq 40 : Le théorème se généralise au cas de variables aléatoires iid $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $\mathbb{E}[Y_1] = \mu$, $\mathrm{Var}(Y_1) = \sigma^2$

M