Transformation de Fourier + Applications

230

Cadre : pp = presque partout, VAR = variable aléatoire réelle, iid = indépendantes, identiquement distribuées

I - Transformation de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$

1 - Définition et premières propriétés

Def 1 : Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On définit sa transformée de Fourier, notée $\mathcal{F}f$ ou $\hat{f}$ par :

$$\forall \eta \in \mathbb{R}, \quad \hat{f}(\eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\eta x} f(x)\,dx$$

Ex 2 : Si $f(x) = \mathbb{1}_{[-1,1]}(x)$, alors $\forall \eta \in \mathbb{R}$, $\hat{f}(\eta) = \frac{2\sin(\eta)}{\eta}$

Prop 3 : Soit $\tau \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$; soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Soient $x, \eta \in \mathbb{R}$:

- (i) Si $g(x) = f(x)e^{i\tau x}$, alors $\hat{g}(\eta) = \hat{f}(\eta - \tau)$
- (ii) Si $g(x) = f(x - \tau)$, alors $\hat{g}(\eta) = \hat{f}(\eta)e^{-i\tau\eta}$
- (iii) Si $g(x) = f(\lambda x)$, alors $\hat{g}(\eta) = \frac{1}{\lambda}\hat{f}\left(\frac{\eta}{\lambda}\right)$
- (iv) Si $g(x) = f(-x)$, alors $\hat{g}(\eta) = \hat{f}(-\eta)$
- (v) Si $g(x) = \overline{f(x)}$, alors $\hat{g}(\eta) = \overline{\hat{f}(-\eta)}$

Rq 4 : La transformation de Fourier d'une fonction paire (resp. impaire) est paire (resp. impaire)

Lemme 5 : Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\|\hat{f}\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1}$

Ex 6 : Si $f = \mathbb{1}_{[-1,1]}$, on a une égalité

Lemme 7 : (Lemme de Riemann-Lebesgue)
Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\hat{f}(\eta) \xrightarrow[|\eta| \to +\infty]{} 0$

2 - Régularité et convolution

Prop 8 : Soit $k \in \mathbb{N}$. Soit $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R})$: $f, \dots, f^{(k)} \in L^1(\mathbb{R})$
Alors : $\forall j \in [\![0, k]\!]$, $\forall \eta \in \mathbb{R}$, $\widehat{f^{(j)}}(\eta) = (i\eta)^j \hat{f}(\eta)$

Prop 9 : Soit $k \in \mathbb{N}$. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$: $\forall j \in [\![0, k]\!]$, $x \mapsto x^j f(x) \in L^1(\mathbb{R})$
Alors $\hat{f} \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R})$ et on a $\forall j \in [\![0, k]\!]$, $\forall \eta \in \mathbb{R}$, $\hat{f}^{(j)}(\eta) = \widehat{(-ix)^j f}(\eta)$

Appli 10 : (Transformation de Fourier d'une fonction gaussienne)
Si $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$, alors $\forall \eta \in \mathbb{R}$, $\hat{f}(\eta) = \sqrt{2\pi}\, e^{-\frac{\eta^2}{2}}$

Rq 11 : La transformation de Fourier échange la décroissance avec la régularité

Def 12 : (Produit de convolution) Soit $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. On définit leur produit de convolution par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)\,dy$

Th 13 : Si $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, alors $f * g \in L^1(\mathbb{R})$ et on a : $\|f * g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}$

Prop 14 : Si $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, alors on a $\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$

3 - Inversion de Fourier

Th 15 : (Formule d'inversion de Fourier)
Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. On a alors pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\eta}\hat{f}(\eta)\,d\eta$

Coro 16 : Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ est telle que $\hat{f} = 0$ pp, alors $f = 0$ pp

Applic 17 : (Calcul d'une transformation de Fourier par la formule d'inversion)
Si $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, alors $\forall \eta \in \mathbb{R}$ $\hat{f}(\eta) = \pi e^{-|\eta|}$

II - Transformation de Fourier dans d'autres espaces

1 - Dans l'espace de Schwartz

Def 18 : On définit l'espace de Schwartz par :
$$S(\mathbb{R}) = \left\{ f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) : \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}, \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^\alpha f^{(\beta)}(x)| < +\infty \right\}$$
On y définit la semi-norme $\mathcal{N}_p : f \mapsto \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq p} \|x^\alpha f^{(\beta)}\|_{L^\infty}$

Ex 19 : $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}) \subset S(\mathbb{R})$, $x \mapsto e^{-x^2} \in S(\mathbb{R})$

Rq 20 : (i) $S(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$ donc $\mathcal{F}$ y est correctement définie
(ii) Toute fonction de $S(\mathbb{R})$ est régulière et à décroissance rapide

Th 21 : On a un isomorphisme
$$\mathcal{F} : S(\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} S(\mathbb{R}), \quad f \longmapsto \hat{f}$$

2 - Dans l'espace $L^2(\mathbb{R})$

Th 22 : (Théorème de Plancherel)

(i) - Soit $f \in S(\mathbb{R})$. Alors $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ et $\|f\|_{L^2}^2 = \frac{1}{2\pi}\|\hat{f}\|_{L^2}^2$

(ii) - $\mathcal{F}$ s'étend en une application linéaire continue $\tilde{\mathcal{F}} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ et l'égalité est alors conservée si $f \in L^2(\mathbb{R})$

DVPT 1

Ex 23 : Si $f = \mathbb{1}_{[-1,1]}$, alors on a $2 = \|f\|_{L^2}^2 = \frac{1}{2\pi}\|\hat{f}\|_{L^2}^2$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2(\eta)}{\eta^2}\,d\eta$$

D'où $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2(\eta)}{\eta^2}\,d\eta = \pi$

Cor 24 : Si $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ et si $\langle f|g\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}\,dx$, alors on a
$\langle f|g\rangle = \frac{1}{2\pi}\langle \hat{f}|\hat{g}\rangle$

Prop 25 : Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$, $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. On a alors, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\eta) e^{ix\eta}\,d\eta$$

Rq 26 : $\tilde{\mathcal{F}}$ s'étend de $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ à $L^2(\mathbb{R})$ et on a un isomorphisme $\tilde{\mathcal{F}} : L^2(\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} L^2(\mathbb{R})$

3 - Dans l'espace des distributions tempérées

Def 27 : On définit l'ensemble des distributions tempérées par :

$$S'(\mathbb{R}) = \left\{ T \in \mathcal{L}(S(\mathbb{R}), \mathbb{C}) ; \exists p \in \mathbb{N}, \exists C > 0, \forall \varphi \in S(\mathbb{R}), \langle T|\varphi\rangle_{S',S} \leq C N_p(\varphi) \right\}$$

Ex 28 : $\delta_0 \in S'(\mathbb{R})$

Def 29 : Soit $T \in S'(\mathbb{R})$. On définit la transformée de Fourier d'une distribution tempérée par :

$$\forall \varphi \in S(\mathbb{R}), \quad \langle \mathcal{F}T|\varphi\rangle_{S',S} = \langle T|\hat{\varphi}\rangle_{S',S}$$

Ex 30 : $\mathcal{F}\delta_0 = 1$, $\mathcal{F}1 = 2\pi\delta_0$

Prop 31 : Les propriétés de dérivabilité sur les distributions tempérées sont conservées.

Ex 32 : $\mathcal{F}(\delta_0') = i\eta\,\mathcal{F}(\delta_0) = i\eta$

III - Applications

1 - En probabilités

Def 33 : (Fonction caractéristique)
Soit X une VAR. On appelle fonction caractéristique de X la fonction $\widehat{\mathbb{P}_X}$ définie par : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\widehat{\mathbb{P}_X}(t) = \mathbb{E}\left[e^{itX}\right]$

Ex 34 : Si $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, alors $\widehat{\mathbb{P}_X}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$

Prop 35 : Si X et Y sont deux VAR indépendantes, alors $X+Y$ admet pour fonction caractéristique : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\widehat{\mathbb{P}_{X+Y}}(t) = \widehat{\mathbb{P}_X}(t)\,\widehat{\mathbb{P}_Y}(t)$

Def 36 : Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de VAR. On dit que (X_n) converge en loi vers X si et seulement si $\forall \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue bornée, $\mathbb{E}[\varphi(X_n)] \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{E}[\varphi(X)]$
On note $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} X$

Th 37 : (Théorème d'injectivité de Lévy)
Soit (X_n) une suite de VAR. On a l'équivalence suivante :
(i) - $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} X$
(ii) - $\forall t \in \mathbb{R}$, $\widehat{\mathbb{P}_{X_n}}(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \widehat{\mathbb{P}_X}(t)$

Appli 38 : (Théorème central limite)
Soit (X_n) une suite de VAR iid telles que $\mathbb{E}[X_1] = \mu$, $Var(X_1) = \sigma^2$
Posons : $S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Alors $\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{\sigma^2 n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} N$ où
$N \sim \mathcal{N}(0,1)$

2 - Équation de la chaleur

Th 39 : (Équation de la chaleur 1D)
On considère l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$[H] \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = \delta_0 \end{cases}$$

où $u \in C_t^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*) \cap C_x^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*)$, $u : (x,t) \mapsto u(x,t)$

Alors u est unique et est donnée par :

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times]0,+\infty[, \quad u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} := H_t(x)$$

C'est le noyau de la chaleur

Rq 40 : Si on suppose $\forall x \in \mathbb{R}$, $u(x,0) = u_0(x)$, où $u_0 \in L^1(\mathbb{R})$, alors la solution de [H] est toujours unique, et est donnée par :

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty[, \quad u(x,t) = (u_0 * H_t)(x)$$

3 - Densité des polynômes orthogonaux

Def 41 : Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle. Soit $\rho : I \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction appelée fonction poids. On définit l'espace $L^2(I, \rho)$ par :

$$L^2(I, \rho) = \left\{ f : I \to \mathbb{C} : \int_I |f(x)|^2 \rho(x)\,dx < +\infty \right\}$$

On suppose également que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_I |x|^n \rho(x)\,dx < +\infty$

Prop 42 : $L^2(I, \rho)$ est un espace de Hilbert, muni du produit scalaire

$$\langle f | g \rangle_\rho := \int_I f(x)\overline{g(x)}\rho(x)\,dx$$

Th 43 (Densité des polynômes orthogonaux)

Soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille de polynômes de $\mathbb{C}[X]$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\deg(P_n) = n$.

Alors $\overline{\mathrm{Vect}\{P_n, n \in \mathbb{N}\}} = L^2(I, \rho)$, i.e. $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ forme une base hilbertienne de $L^2(I, \rho)$

DVPT 2