Méthode et fractale de Newton

Maxime BOUCHEREAU - Université de Rennes (IRMAR)

IRMAR

Les 5 min Lebesgue

Introduction

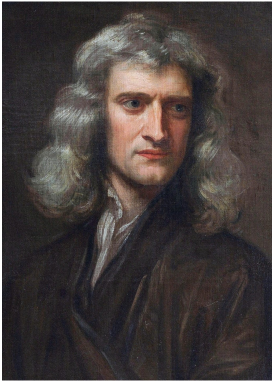
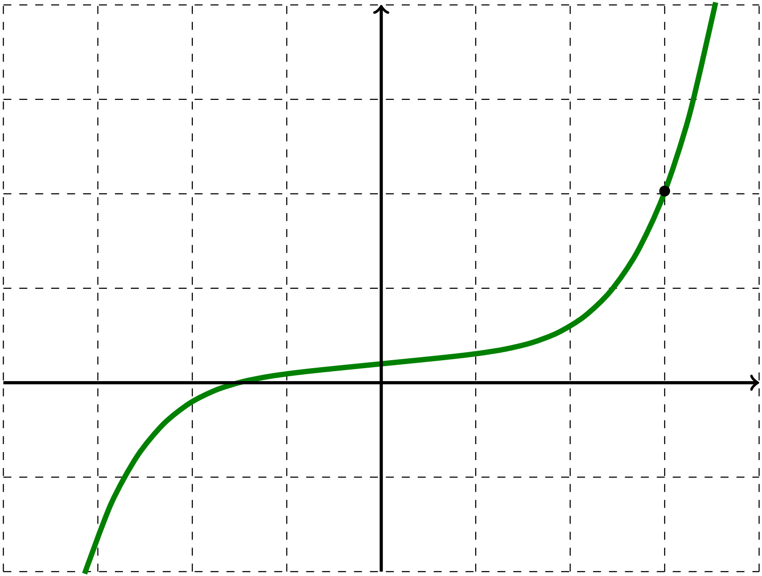
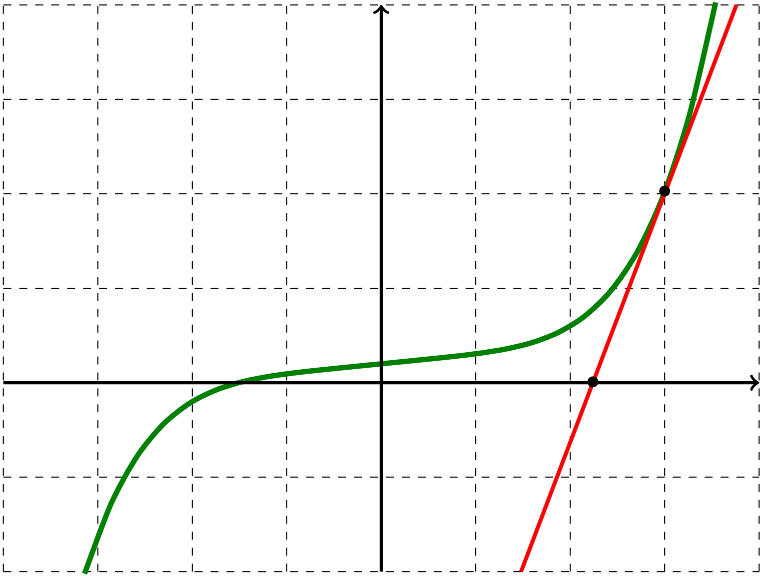


Figure: Isaac Newton (1642 - 1727) & Joseph Raphson (1648 - 1715)

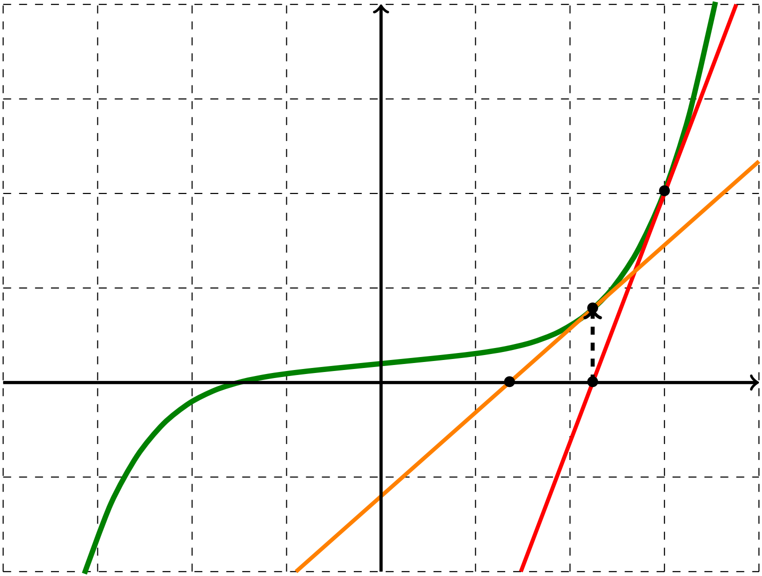
Algorithme



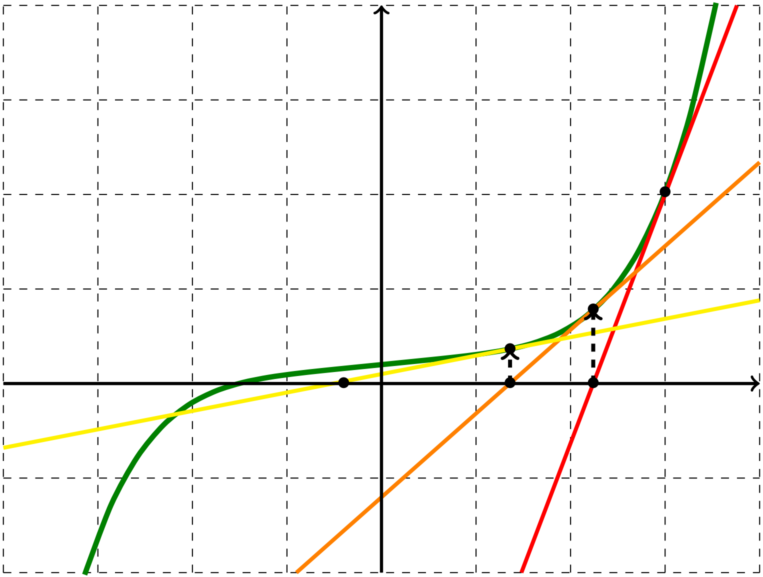
Algorithme



Algorithme



Algorithme



Convergence

Soient $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2, $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = 0$, $(y_n)_{n\in N}$ la suite définie par:

$$\begin{cases} y_0 & \in & \mathbb{R} \\ y_{n+1} & = & y_n - \frac{f(y_n)}{f'(y_n)} \end{cases}$$

Théorème

Si y_0 est assez proche de x_0 et si $f'(x_0) \neq 0$, alors la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x_0 de manière quadratique:

$$|y_{n+1} - x_0| \leqslant C\,|y_n - x_0|^2$$

Remarque: Possibilité d'étendre l'algorithme aux fonctions holomorphes $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$.

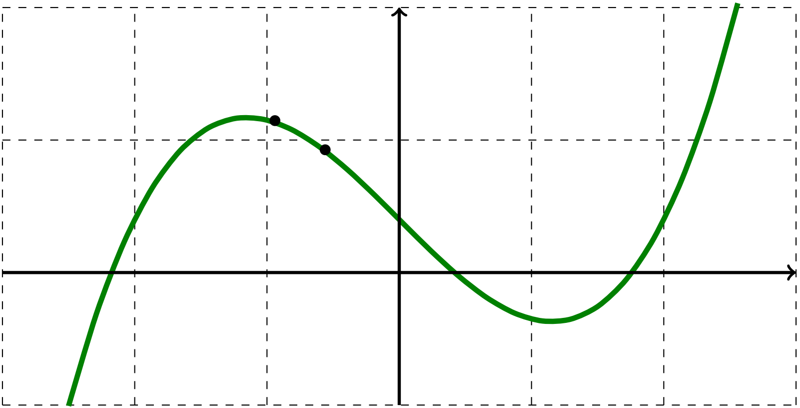
Bassin d'attraction

Définition

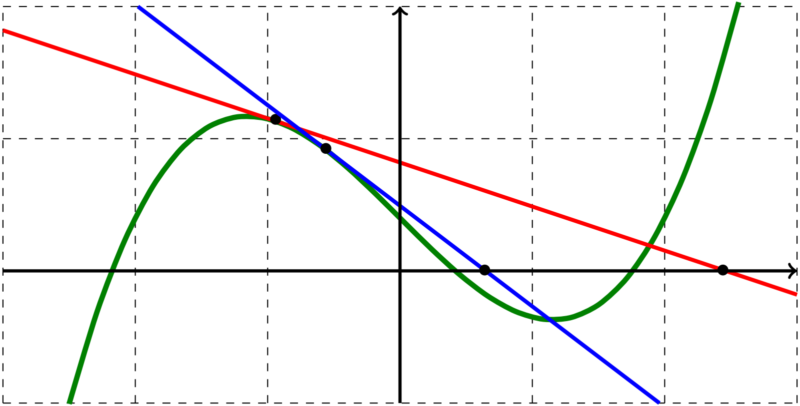
Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *tel que* $f(x_0) = 0$. *On dit que* y_0 *appartient au* ***bassin d'attraction de*** x_0 *si la suite* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* x_0.

Remarque: Deux points proches ne sont pas forcément dans le même bassin d'attraction si f a plusieurs zéros.

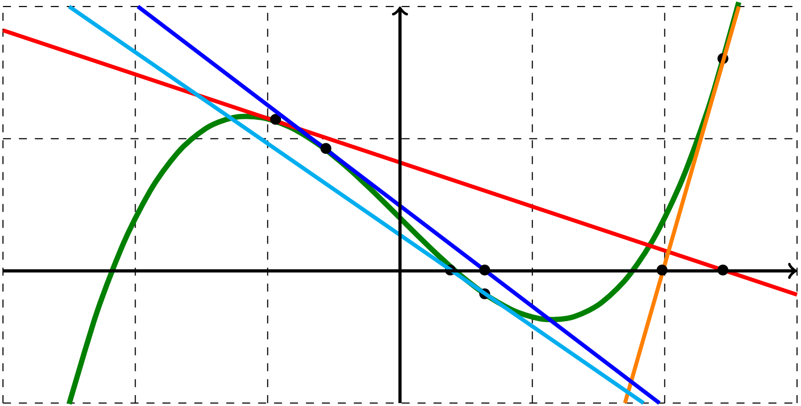
Bassin d'attraction - Variable réelle



Bassin d'attraction - Variable réelle



Bassin d'attraction - Variable réelle



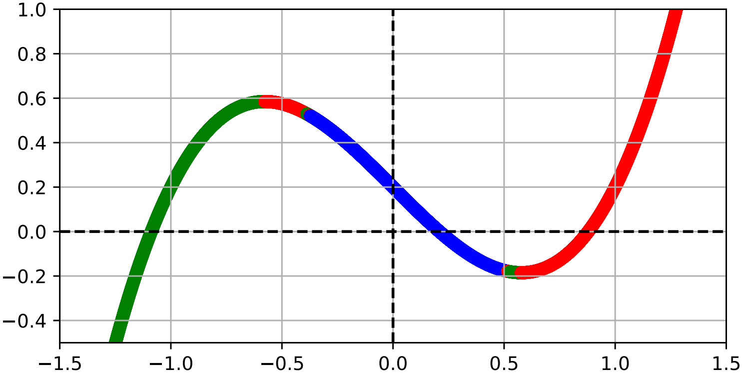
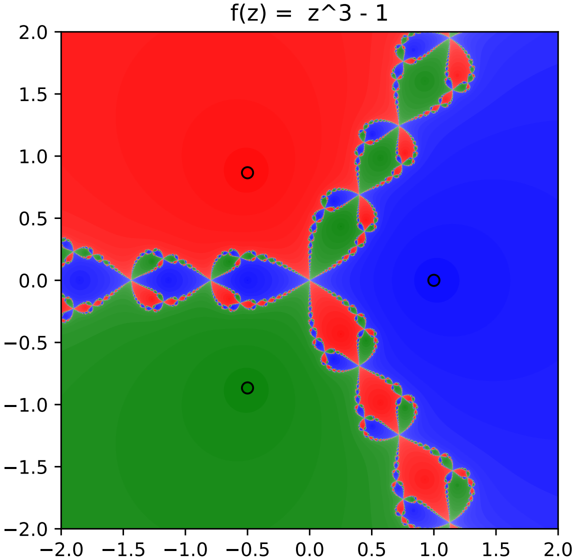


Figure: Coloration du point de départ en fonction du zéro atteint (bassin d’attraction)

Bassin d’attraction - Variable complexe



Bassin d'attraction - Variable complexe