Matrice hessienne et points critiques pour une fonction de deux variables

On considère une fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$; $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ouvert
$$(x, y) \longmapsto f(x, y)$$

I - Dérivées partielles et théorème de Schwarz

- Dérivées partielles d'ordre 2 : $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x, y)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x, y)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x, y)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x, y)$$

- Matrice hessienne de f : $$H(f)(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{bmatrix}$$

- f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω si f admet des dérivées partielles d'ordre 2 et si ces dérivées partielles sont continues sur Ω.

Théorème :

Théorème de Schwarz

Soit $a \in \Omega$. Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage de a, alors $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a)$. $H(f)(a)$ est donc symétrique.

II - Formule de Taylor à l'ordre 2

Soit $(a,b) \in \Omega$. Soit $(h,k) \in \mathbb{R}^2$, assez petit ; f de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω

Proposition :

Formule de Taylor (ordre 2)

$$f(a+h, b+k) = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)k$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)h^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)hk + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)k^2$$
$$+ \mathcal{O}(\|(h,k)\|^3)$$

ou bien encore :

$$f(a+h, b+k) = f(a,b) + \nabla f(a,b) \cdot (h,k)$$
$$+ \frac{1}{2}\begin{bmatrix} h & k \end{bmatrix} H(f)(a,b) \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} + \mathcal{O}(\|(h,k)\|^3)$$

III - Points critiques

Point critique : Point $(a,b) \in \Omega$ où $\nabla f(a,b) = \vec{0}$

Par la formule de Taylor à l'ordre 2, on a :

$$f(a+h, b+k) - f(a,b) = \underbrace{\nabla f(a,b) \cdot (h,k)}_{= 0 \text{ (Point critique)}} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} h & k \end{bmatrix} H(f)(a,b)\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} + \mathcal{O}(\|(h,k)\|^3)$$

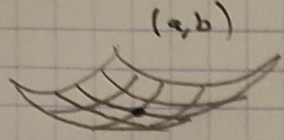
$$f(a+h, b+k) - f(a,b) = \underbrace{\frac{1}{2}\begin{bmatrix} h & k \end{bmatrix} H(f)(a,b)\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}}_{\substack{\text{Terme d'ordre 2 (quadratique)} \\ \text{à étudier en regardant } H(f)(a,b)}} + \mathcal{O}(\|(h,k)\|^3)$$

Proposition :

Nature d'un point critique

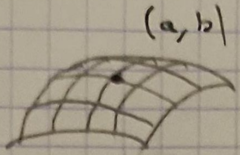
Soient λ_1 et λ_2 les deux valeurs propres de $H(f)(a,b)$

- Si $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, alors (a,b) est un minimum local
- Si $\lambda_1, \lambda_2 < 0$, alors (a,b) est un maximum local
- Si $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ ou $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$, alors (a,b) est un point selle
- Si $\lambda_1 = 0$ ou $\lambda_2 = 0$, alors on ne peut rien dire.



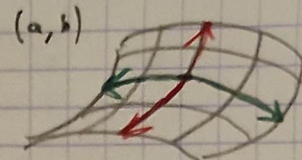
Minimum local

$f(a+h, b+k) - f(a,b) \geq 0$



Maximum local

$f(a+h, b+k) - f(a,b) \leq 0$



Point selle

Min. local selon $\leftrightarrow$

Max local selon $\leftrightarrow$

• Trace et déterminant :

Trace : $Tr\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a + d$

Déterminant : $det\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = ad - bc$

> Si λ_1, λ_2 sont les valeurs propres d'une matrice M de taille 2×2, alors :
>
> $Tr(M) = \lambda_1 + \lambda_2$ $\quad$ $det(M) = \lambda_1 \lambda_2$

Application :

Trace, determinant et nature d'un point critique avec la hessienne.

- Si $det(H(f)(a,b)) > 0$ et $Tr(H(f)(a,b)) > 0$ alors (a,b) est un minimum local
- si $det(H(f)(a,b)) > 0$ et $Tr(H(f)(a,b)) < 0$ alors (a,b) est un maximum local
- Si $det(H(f)(a,b)) < 0$ alors (a,b) est un point selle
- Si $det(H(f)(a,b)) = 0$ alors on ne peut rien dire.

Remarque :

$H(f)(a,b)$ est de la forme $\begin{bmatrix} r & t \\ s & r \end{bmatrix}$ $\quad$ $Tr(H(f)(a,b)) = 2r$

et $det(H(f)(a,b)) = r^2 - st$