

Outils Mathématiques 4: recueil d'exercices de TD

0. Calcul de primitives

Exercice 0.1. Calculer les primitives suivantes:

1. $\int \cos^2(x) \sin^2(x) dx, \int \cos^2(x) \sin^3(x) dx, \int \cos(x) \sin^4(x) dx.$

2. $\int \sin^3(x) dx, \int \cos^4(x) dx.$

Exercice 0.2. Calculer: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(x) \sin^2(x) dx$ et $J = \int_0^1 e^{2x} \sin(4x) dx$

1. Intégrales doubles

Exercice 1.1. Calculer les intégrales $\iint_D f(x, y) dx dy$ pour les choix suivants de f et D :

$f(x, y)$	D la surface délimitée par
$y - 2x$	le carré de sommets $(-1, 1), (2, 1), (2, 4), (-1, 4)$,
$x - y$	le triangle de sommets $(2, 9), (2, 1), (-2, 1)$,
xy^2	le triangle de sommets $(0, 0), (3, 1), (2, 1)$,
$y + 1$	$y = \sin x, y = \cos x, x = 0, x = \pi/4,$
$x^3 \cos(xy)$	$y = x^2, y = 0, x = 2,$
$(x + y) \exp(x - y)$	$ x \leq 1, y \leq 2.$

Exercice 1.2. Pour chacune des intégrales itérées suivantes, calculer la valeur de l'intégrale en intervertissant l'ordre d'intégration.

1. $\int_0^1 \left(\int_{2x}^2 \exp(y^2) dy \right) dx.$

2. $\int_0^9 \left(\int_{\sqrt{y}}^3 \sin(x^3) dx \right) dy.$

3. $\int_0^2 \left(\int_{y^2}^4 y \cos(x^2) dx \right) dy.$

4. $\int_1^e \left(\int_0^{\ln x} y dy \right) dx.$

Exercice 1.3. Dans la suite f désigne une fonction continue sur $D \subset \mathbb{R}^2$ où la région D est délimitée par les courbes dont les équations sont données ci-dessous, déterminer explicitement D et exprimer l'intégrale $\iint_D f(x, y) dx dy$ comme une intégrale itérée.

1. $x = 2\sqrt{y}, \sqrt{3}x = \sqrt{y}, y = 2x + 5,$

2. $x = \sqrt{3 - y}, y = 2x, x + y + 3 = 0,$

3. $y = \exp(x)$, $y = \ln(x)$, $x + y = 1$, $x + y = 1 + e$,

4. $8y = x^3$, $y - x = 4$, $4x + y = 9$,

Exercice 1.4. Déterminer l'aire de la partie D du plan délimitée par les courbes d'équation:

$y = x$, $y^2 = x$.

Exercice 1.5. a) Calculer $\iint_D (x - y) \, dx dy$ où D est une partie du plan délimitée par les droites d'équation: $x = 0$, $y = x + 2$, $y = -x$

Exercice 1.6. Calculer $\iint_D xy \, dx dy$ où D est la partie du plan délimitée par les courbes d'équation: $y = x^2$, $y = x^3$.

Exercice 1.7. Soit D le quart de disque unité défini par : $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x, 0 \leq y, x^2 + y^2 \leq 1\}$ Utiliser le passage en coordonnées polaires pour calculer l'intégrale : $I = \iint_D (4 - x^2 - y^2) \, dx dy$.

Exercice 1.8. Soit D le domaine délimité par les droites $x = 0$, $y = x + 2$ et $y = -x$.

1. Calculer l'intégrale $I = \iint_D (x - y) \, dx dy$

2. Calculer I en utilisant le changement de variables $u = x + y$ et $v = x - y$.

Exercice 1.9. Le but de cet exercice est de calculer l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \, dx$, définie comme

$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$, où $I_n = \int_0^n e^{-x^2} \, dx$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, considérons le quart de disque

$D_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq n^2, x \geq 0, y \geq 0\}$ et le carré $C_n = [0, n] \times [0, n]$.

1. Calculer les intégrales $J_n = \iint_{D_n} e^{-(x^2+y^2)} \, dx dy$ et $J_{2n} = \iint_{D_{2n}} e^{-(x^2+y^2)} \, dx dy$ en utilisant le changement de variables en coordonnées polaires.

2. Considérons l'intégrale $K_n = \iint_{C_n} e^{-(x^2+y^2)} \, dx dy$. Montrer que $K_n = I_n^2$.

3. En utilisant un dessin (représentant D_n , C_n et D_{2n}) expliquer pourquoi $J_n \leq K_n \leq J_{2n}$.

4. Quelle est la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de J_n et de J_{2n} ? et de K_n ? En déduire la valeur de I .

Exercices supplémentaires:

Exercice 1.10.

1. Calculer $\int_0^8 \left(\int_{\sqrt[3]{y}}^2 \frac{y}{\sqrt{16+x^7}} \, dx \right) dy$ en intervertissant l'ordre d'intégration.

2. Exprimer l'intégrale $\iint_D f(x, y) \, dx dy$ comme une intégrale itérée, où D est la région délimitée par les courbes $y = \sin(x)$, $\pi y = 2x$.

Exercice 1.11. Dans la suite f désigne une fonction continue sur le domaine d'intégration. Intervertir l'ordre d'intégration dans les intégrales doubles suivantes:

1. $\int_0^4 \left(\int_{3x^2}^{12x} f(x, y) \, dy \right) dx$

$$2. \int_0^1 \left(\int_{2x}^{3x} f(x, y) dy \right) dx$$

Exercice 1.12. Soit $I = \iint_{T_a} \sqrt{xy} e^{-x-y} dx dy$ où $T_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0; y \geq 0; x + y \leq a\}$ et $a > 0$.

Calculer I à l'aide du changement de variables $\begin{cases} x = tu \\ y = (1-t)u \end{cases}$

Exercice 1.13. La droite d'équation $y = x$ délimite dans le carré $[0, 1] \times [0, 1]$ deux triangles égaux T_1 et T_2 . En utilisant le changement de variable $u = y, v = x$, montrer que $\iint_{T_1} xy dx dy = \iint_{T_2} xy dx dy$.

Donner un exemple d'une fonction continue $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\iint_{T_1} f(x, y) dx dy \neq \iint_{T_2} f(x, y) dx dy$.

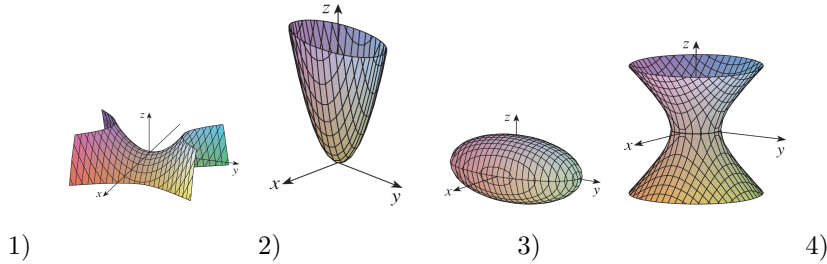
2. Intégrales triples

Exercice 2.1. Soit D le domaine $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + 2y + z \leq 1\}$. Représenter graphiquement D . Calculer ensuite de deux manières différentes l'intégrale triple $\iiint_D x dx dy dz$

(a) en intégrant "par piles", (b) en intégrant "par tranches".

Exercice 2.2. Associer à chaque équation son graphe:

a) $x^2 + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1$ b) $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ c) $z = -x^2 + y^2$ d) $z = x^2 + \frac{y^2}{4}$



Exercice 2.3. Transformer l'intégrale suivante en coordonnées cylindriques puis en coordonnées sphériques:

$$\int_0^3 \left(\int_{-\sqrt{9-x^2}}^0 \left(\int_0^{\sqrt{9-x^2-y^2}} yz^2 dz \right) dy \right) dx$$

Exercice 2.4. Représenter graphiquement et calculer le volume limité par les surfaces de \mathbb{R}^3 d'équation $z = 2x^2 + y^2$ et $z = 4 - y^2$.

Exercice 2.5. Calculer l'intégrale triple: $\iiint_B \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$ où B est la boule de centre $(0, 0, 0)$ et de rayon 1.

Exercice 2.6. Calculer l'intégrale triple: $\iiint_V z dx dy dz$ où V est le domaine limité par le demi-ellipsoïde supérieur $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ et par le plan d'équation $z = 0$.

Exercice 2.7. Calculer l'intégrale triple: $\iiint_V z dx dy dz$ où V est le domaine limité par le cône d'équation $z^2 = \frac{h^2}{R^2}(x^2 + y^2)$ et le plan $z = h$.

Exercices supplémentaires:

Exercice 2.8. Calculer l'intégrale triple: $\iiint_V dx dy dz$ où V est le domaine limité par la surface d'équations $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$ et $x^2 + y^2 = z^2$ et contenant le point $(0, 0, R)$.

Exercice 2.9. Calculer l'intégrale triple: $\iiint_V (x + y + z)^2 dx dy dz$ où V est la partie commune au parabolôide $\{2az \geq x^2 + y^2\}$ et à la boule $\{3a^2 \geq x^2 + y^2 + z^2\}$.

Barycentre et moment d'inertie

Exercice 2.10. Calculer le volume de l'ellipsoïde d'équation: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Quelles sont les coordonnées de son barycentre, sous l'hypothèse que le matériau de construction est homogène ?

Exercice 2.11. Une plaque d'un matériau a la forme d'une surface délimitée par la parabole $x = y^2$ et la droite $x = 4$. La densité de masse par unité de surface, ρ , est proportionnelle à la distance du point de l'axe Oy . Déterminer les coordonnées du barycentre de la plaque.

Exercice 2.12. Un solide a la forme d'un cylindre de base de rayon R et de hauteur h . La densité volumique ρ du matériau varie avec la hauteur; elle est proportionnelle à la distance du point à la base du cylindre. Calculer le moment d'inertie du solide autour de son axe de révolution.

Exercice 2.13. On considère trois figures planes dans le plan Oxz :

–Un rectangle R dont les sommets ont comme coordonnées $(0, 0)$, $(a, 0)$, (a, h) et $(0, h)$.

–Un triangle T dont les sommets ont comme coordonnées $(0, 0)$, $(a, 0)$ et $(0, h)$.

–Un demi-cercle C de centre $(0, 0)$, de rayon a et situé dans le demi-plan $x \geq 0$.

Pour chacune de ces 3 figures, calculer: (a) l'aire S , (b) l'abscisse c de son centre de gravité, (c) le volume V du solide obtenu par révolution de la figure autour de l'axe Oz .

Comparer $2\pi cS$ et V pour ces figures ? Pouvez-vous formuler rigoureusement votre conclusion et la démontrer en toute généralité ?

Exercice 2.14. Déterminer le centre de gravité de la surface située à l'extérieur du cercle de rayon 1 et délimitée par la cardioïde $\rho = 1 + \cos \theta$.

3. Intégrales curvilignes

Exercice 3.1. Calculer l'intégrale curviligne $\int_{C^+} (x + y) dx + (x - y) dy$

où C^+ est le cercle unité orienté dans le sens direct (sens inverse des aiguilles d'une montre).

Exercice 3.2. Calculer l'intégrale curviligne $\int_{C^+} xy dx + (x + y) dy$

Exercice 3.3.

1. Calculer le travail du champ de vecteurs $\vec{V}(x, y) = (y^2, x^2)$ sur la demi ellipse $x^2 + 4y^2 - 4 = 0; y \geq 0$ parcourue une fois dans le sens direct.
2. Calculer le travail du champ de vecteurs $\vec{V}(x, y) = (\cos(x), \sin(y))$ sur le cercle unité parcouru deux fois dans le sens des aiguilles d'une montre.
3. Calculer le travail du champ de vecteurs $\vec{V}(x, y) = (x^2 + y^2, x^2 - y^2)$ sur le triangle OAB avec $A = (1, 0)$, $B = (0, 1)$ parcouru une fois dans le sens direct.

Exercice 3.4. Calculer l'intégrale curviligne $\int_{\gamma} \frac{y+z}{x^2+y^2} dx + \frac{z+x}{x^2+y^2} dy + \frac{x+y}{x^2+y^2} dz$ lorsque:

- 1) γ est le segment de droite d'origine $A = (1, 1, 1)$ et d'extrémité $B = (2, 2, 2)$.
- 2) γ est l'hélice définie par $x = \cos t$, $y = \sin t$ et $z = t$, t variant de 0 à 2π .

Exercice 3.5. Calculer l'intégrale curviligne $\int_{\Gamma} y^2 dx - x^2 dy$ lorsque:

- 1) Γ est le segment de droite d'origine $A = (1, 0)$ et d'extrémité $B = (0, 1)$.
- 2) Γ est l'arc de cercle de centre $(0, 0)$, de rayon 1 d'origine $A = (1, 0)$ et d'extrémité $B = (0, 1)$.

Exercice 3.6. Montrer que l'intégrale curviligne $\int_{\Gamma} xy^2 dx + x^2y dy$ est nulle lorsque Γ est un arc simple fermé (sans calcul de primitive). Calculer cette intégrale lorsque $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ où $\Gamma_1 = AB$ est l'arc de parabole d'équation $y^2 = 4 - 3x$ limité en A par la droite d'équation $y = x$ et en B par l'axe des $x \geq 0$, Γ_2 est le segment de droite allant de B à O et Γ_3 est le segment de droite allant de O à A .

Calculer une primitive de $xy^2 dx + x^2y dy$. Retrouver $\int_{\Gamma_i} xy^2 dx + x^2y dy$ pour $i \in \{1, 2, 3\}$.

Exercice 3.7. Déterminer une fonction u , dont on précisera le domaine de définition, telle que:

$$du = \frac{x+2y}{(x+y)^2} dx + \frac{y}{(x+y)^2} dy$$

Exercice 3.8. Calculer le travail effectué par la force $\vec{F} = (y+z)\vec{i} + (x+z)\vec{j} + (x+y)\vec{k}$ pour déplacer une particule de l'origine O au point $C = (1, 1, 1)$:

1. le long de la droite (OC) .
2. le long de la courbe $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$.

Même question pour la force $\vec{G} = (x+yz)\vec{i} + (y+xz)\vec{j} + (z+xy)\vec{k}$.

Exercice 3.9. Soit \mathcal{D} le domaine limité par le cercle d'équation $x^2 + y^2 - 2y = 0$ parcouru dans le sens direct. Calculer à l'aide de la formule de Green-Riemann $\iint_{\mathcal{D}} (x^2 - y^2) dx dy$.

Exercice 3.10. Calculer l'intégrale curviligne I le long de la courbe fermée γ constituée par les deux arcs de parabole $y = x^2$ et $x = y^2$, orientée dans le sens direct où $I = \int_{\gamma} (2xy - x^2) dx + (x + y^2) dy$.

Vérifier le résultat en utilisant la formule de Green-Riemann.

Exercices supplémentaires: **Exercice 3.11.** Soit $\omega = P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ avec:

$$P(x, y) = \frac{(3x^2 - y^2)(x^2 + y^2)}{x^2y} \quad \text{et} \quad Q(x, y) = \frac{(3y^2 - x^2)(x^2 + y^2)}{xy^2}.$$

- 1) Montrer que, dans le domaine $D = \{(x, y); x > 0, y > 0\}$, ω est une forme différentielle totale.
- 2) Déterminer u dans D , telle que $du = \omega$.
- 3) Calculer l'intégrale curviligne $\int_{\Gamma} \omega$ lorsque Γ est l'arc défini par: $x = t + \cos^2 t$, $y = 1 + \sin^2 t$ avec $0 \leq t \leq 2\pi$.

Exercice 3.12. Le *folium de Descartes* est une courbe définie, en coordonnées cartésiennes, par l'équation $x^3 + y^3 - 3axy = 0$.

1. Montrer que l'équation de la courbe en coordonnées polaires est $r = 3a \frac{\sin(\theta) \cos(\theta)}{\cos^3(\theta) + \sin^3(\theta)}$.
2. En posant $y = tx$, montrer que la courbe peut aussi être paramétrée, en coordonnées cartésiennes, par $x = 3a \frac{t}{1+t^3}$, $y = 3a \frac{t^2}{1+t^3}$.
3. Utiliser cette dernière paramétrisation pour calculer, à l'aide de la formule de Green-Riemann, l'aire de la surface délimitée par la boucle du folium.

Exercice 3.13. Aire en coordonnées polaires. Soit D le domaine limité par $r = p(\theta)$ avec $0 \leq \theta \leq 2\pi$;

et le segment $\begin{cases} \theta = 0 \\ p(0) \leq r \leq p(2\pi) \end{cases}$. Montrer que l'aire de D est égale à $\mathcal{A}(D) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} p^2(\theta) d\theta$.

Trouver l'aire: **a)** de la cardioïde : $r = a(1 + \cos(\theta))$, **b)** de l'escargot : $r = a\theta$, ($a > 0$).

Dessiner les lignes de coordonnées $r = C^{te}$ et $\phi = C^{te}$ dans le plan des x, y .

Dessiner les lignes de coordonnées $x = C^{te}$ et $y = C^{te}$ dans le plan des r, ϕ .

4. Intégrales de Surface

Exercice 4.1. Calculer le flux du champ de vecteurs $\vec{V}(x, y, z) = (x, y, -z)$ à travers la demi-sphère $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ z \geq 0 \end{cases}$

Exercice 4.2. Calculer la circulation du champ de vecteurs $\vec{V}(x, y, z) = (y - z, z - x, x - y)$ le long de l'ellipse \mathcal{E} (après avoir précisé le sens du parcours) d'équations $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + z = 1 \end{cases}$

1. Directement.
2. En utilisant la formule de Stokes

Exercice 4.3. On considère l'intégrale $\int_C (y+z) dx + (z+x) dy + (x+y) dz$, où C est le cercle d'équations

$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ Calculer cette intégrale en appliquant la formule de Stokes.

Retrouver le résultat à l'aide d'un calcul direct.

Exercice 4.4. Calculer le flux du champ de vecteurs $\vec{V}(x, y, z) = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$ à travers la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$: 1) Directement 2) A l'aide de la formule d'Ostrogradski.

Exercice 4.5. On considère la boîte cylindrique S composée du cylindre d'équation $x^2 + y^2 = a^2$, $0 \leq z \leq b$ ($a > 0$ et $b > 0$) et des deux disques de rayon a aux niveaux $z = 0$ et $z = b$.

On définit le champ de vecteurs \vec{v} dans \mathbb{R}^3 par $\vec{v}(x, y, z) = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$.

1. Calculer directement le flux de \vec{v} à travers S .
2. Calculer le flux de \vec{v} à travers S en utilisant la formule d'Ostrogradski.

Exercices supplémentaires:

Exercice 4.6. Soit Σ la partie $z \geq 0$ de la surface décrite par le paraboloidé $z = 9 - x^2 - y^2$.

1. Calculer le flux du champ vectoriel $\vec{F} = 3x\vec{e}_x + 3y\vec{e}_y + ze_z$ à travers Σ .
2. On note L la trace de Σ sur le plan Oxy (il s'agit d'un cercle dont on calculera l'équation). Vérifier le théorème de Stokes pour le champ vectoriel $\vec{F} = 3z\vec{e}_x + 4x\vec{e}_y + 2y\vec{e}_z$, i.e. l'égalité

$$\iint_{\Sigma} (\vec{\nabla} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{n} d\sigma = \oint_L \vec{F} \cdot d\vec{l}.$$