

## Evolution d'une population

[★] = Simulations numériques.

Plan de la présentation:

### I - Modélisation

- 1 - Equations différentielles
- 2 - Equation aux dérivées partielles

### II - Equations différentielles

- 1 - Etude théorique
- 2 - Comportement des solutions [★]

### III - Equation aux dérivées partielles

- 1 - Etude de l'équation linéarisée
- 2 - Schéma numérique par P'EDP. [★]

## I - Modélisation

### 1- Equations différentielles

$$\frac{du}{dt} = \alpha u$$

$$\frac{du}{dt} = \alpha u \left(1 - \frac{u}{K}\right)$$

$$\frac{du}{dt} = \alpha u \left(1 - \frac{u^2}{K^2}\right)$$

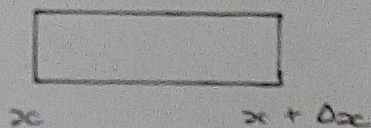
$\alpha$  = Taux d'accroissement de la population

$1 - \frac{u}{K} / 1 - \frac{u^2}{K^2}$  = Facteur ralentissant l'augmentation de la population (Mortalité)

### 2- Equation aux dérivées partielles

On étudie la population sur un segment  $[x, x + \Delta x]$

sur un intervalle de temps  $[t, t + \Delta t]$



• Variation temporelle:  $\Delta u = \frac{u(x, t + \Delta t) - u(x, t)}{\Delta t}$

• Variation spatiale:  $\Delta u = \frac{1}{\Delta x} \left[ \frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right]$

↖ Migrations

+  $g(u(x, t))$  ↖ Naissances / décès

Remarque:

$u$  est supposée aussi régulière que possible  $(\infty_{x,t})$

Donne :

$$\frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial u}{\partial t}(x, s) ds = \frac{v}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) dx + g(u(x, t))$$

On utilise la formule suivante :

Lemme :

Soit  $a \in \mathbb{R}$ ,  $f \in C^0(\mathbb{R})$  :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_a^{a+h} f(x) dx = f(a)$$

On passe à la limite  $\Delta x \rightarrow 0$  :

$$\frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial u}{\partial t}(x, s) ds = v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + g(u(x, t))$$

Puis à la limite  $\Delta t \rightarrow 0$  :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + g(u(x, t))$$

On a notre EDP.

## II - Équations différentielles

### 1 - Étude théorique

Théorème:

Les équations (1), (2) et (3) admettent une unique solution sur un intervalle  $[0, T[$ , où  $T > 0$ .

Démonstration:

Les applications  $u \mapsto au$ ,  $u \mapsto au \left(1 - \frac{u}{k}\right)$  et  $u \mapsto au \left(1 - \frac{u^2}{k^2}\right)$  sont localement Lipschitziennes donc par le théorème de Cauchy-Lipschitz, par  $u_0$  donné, il existe une unique solution locale définie sur un intervalle  $[0, T[$ ,  $T > 0$ .

Remarque:

La solution de (1) est définie sur  $\mathbb{R}$  car (1) est linéaire.

→ on étudie (2):

Théorème:

La solution de (2) est donnée par:

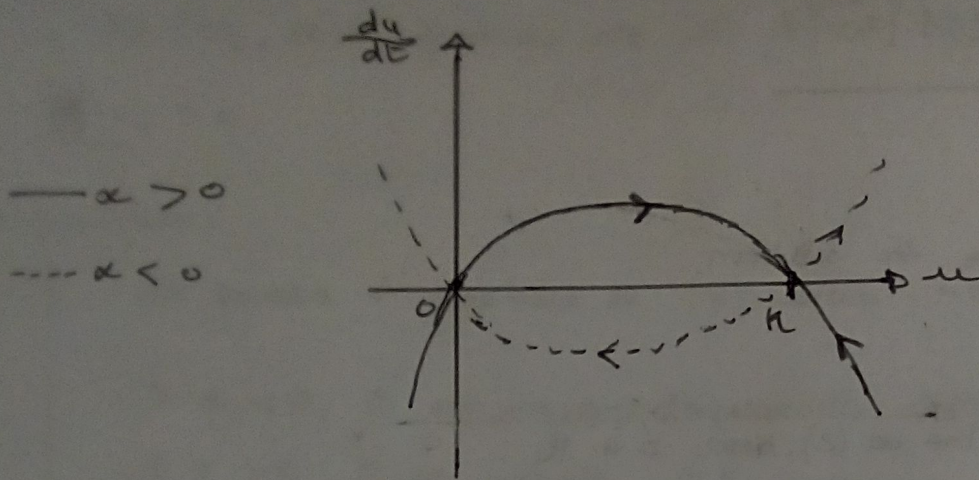
$$\forall t \geq 0, u(t) = \begin{cases} \frac{k}{1 + \left(\frac{k}{u_0} - 1\right)e^{-at}} & \text{si } u_0 \notin [0, k] \\ 0 & \text{si } u_0 = 0 \\ k & \text{si } u_0 = k \end{cases}$$

Ainsi, la solution de (2) est définie pour tout temps  $t \in \mathbb{R}_+$

Démonstration:

- Si  $u_0 \in [0, k]$ , la solution va rester constante (comme on peut le voir sur ce portrait de phase)

## Portrait de phase de (2)



- Si  $u_0 \notin \{0, k\}$ , alors, en séparant les variables:

$$\frac{du}{u(1 - \frac{u}{k})} = \alpha$$

En remarquant que  $\frac{1}{X(1 - \frac{X}{k})} = \frac{1}{X} + \frac{1}{k - X}$ ,

on a:

$$\frac{du}{u} + \frac{du}{k - u} = \alpha$$

Soit  $\int_{u_0}^u \frac{dv}{v} + \int_{u_0}^u \frac{dv}{k - v} = \int_0^t \alpha ds$  (intégration de  $t = 0$  à  $t$ )

$$\ln \left| \frac{u}{u_0} \right| + \ln \left| \frac{k - u_0}{k - u} \right| = \alpha t$$

$$\ln \left| \frac{u}{k - u} \right| + \ln \left| \frac{k - u_0}{u_0} \right| = \alpha t$$

$$-\ln \left| 1 - \frac{k}{u} \right| = -\ln \left| \frac{k}{u_0} - 1 \right| + \alpha t$$

$$\left( 1 - \frac{k}{u} \right)^{-1} = \frac{e^{\alpha t}}{\frac{k}{u_0} - 1}$$

$$1 - \frac{k}{u} = \left( \frac{k}{u_0} - 1 \right) e^{-\alpha t}$$

Donc 
$$u(t) = \frac{k}{1 - \left(\frac{k}{u_0} - 1\right) e^{-\alpha t}}$$

Remarque:

On a positivité de la solution

Proposition:

- Les points d'équilibre de (2) sont 0 et  $k$
- Si  $\alpha < 0$ , 0 est asymptotiquement stable,  $k$  est instable.
  - Si  $\alpha > 0$ , 0 est instable,  $k$  est asymptotiquement stable.

Démonstration:

(2):  $\frac{du}{dt} = g(u)$  où  $g(u) = \alpha u \left(1 - \frac{u}{k}\right)$

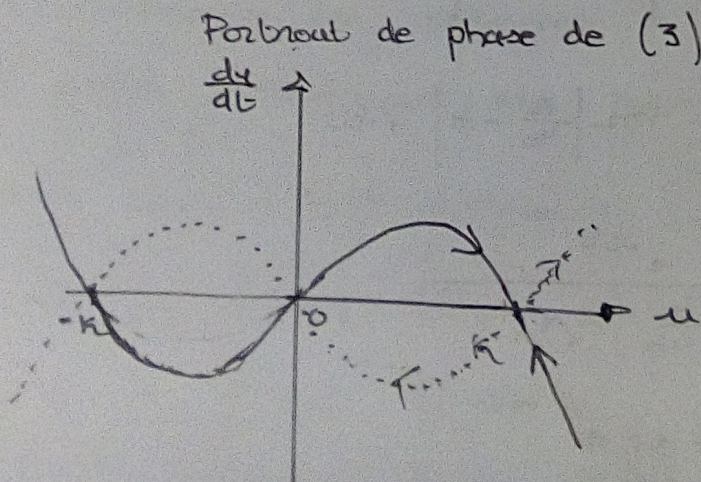
$g'(u) = \alpha - \frac{2\alpha}{k} u$

$\rightarrow g'(0) = \alpha$

$\rightarrow g'(k) = -\alpha$

- Si  $\alpha < 0$ ,  $g'(0) < 0$ ,  $g'(k) > 0$
  - Si  $\alpha > 0$ ,  $g'(k) < 0$ ,  $g'(0) > 0$
- On conclut avec le théorème de stabilité en première approximation.

$\rightarrow$  On étudie (3):



$\text{---} \alpha > 0$

$\text{- - -} \alpha < 0$

Remarque:

Le portrait de phase nous donne la positivité de la solution de (3), et le fait qu'elle soit définie sur tout temps, pour  $u_0 > 0$ .

Proposition:

Les points d'équilibre de (3) sont  $-k$ ,  $0$  et  $k$

- Si  $\alpha < 0$ ,  $0$  est asymptotiquement stable,  $\pm k$  sont instables

- Si  $\alpha > 0$ ,  $0$  est instable,  $\pm k$  sont asymptotiquement stables.

Démonstration:

$$(3): \frac{du}{dt} = g(u), \text{ où } g(u) = \alpha u \left(1 - \frac{u^2}{k^2}\right)$$

$$g'(u) = \alpha - \frac{3\alpha}{k^2} u^2$$

$$\rightarrow g'(0) = \alpha$$

$$\rightarrow g'(\pm k) = -2\alpha$$

• Si  $\alpha < 0$ ,  $g'(0) < 0$ ,  $g'(\pm k) > 0$   
• Si  $\alpha > 0$ ,  $g'(\pm k) < 0$ ,  $g'(0) > 0$

On conclut avec le théorème de stabilité en première approximation



2- Comportements des solutions.

On fait quatre simulations; avec  $k = 1$ .

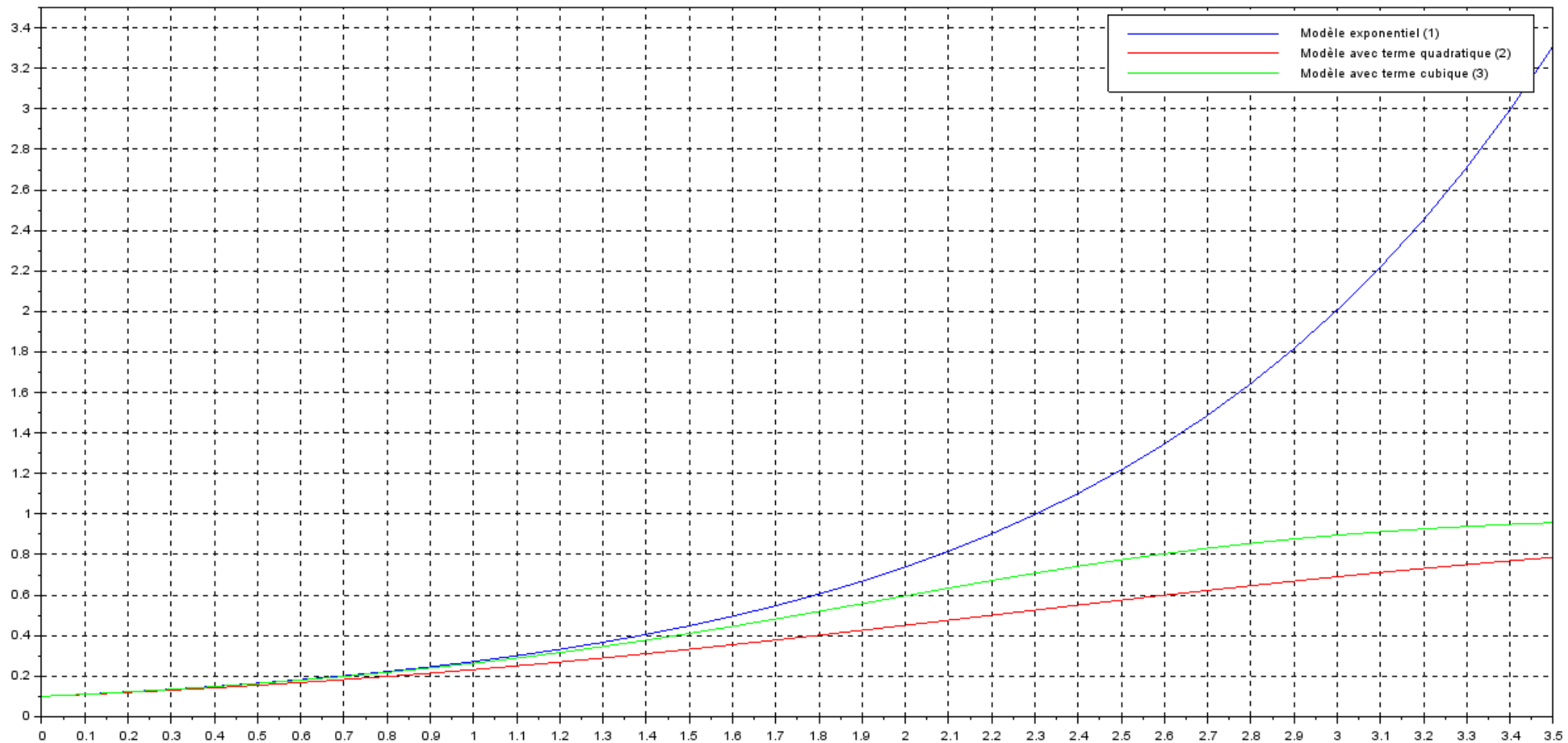
•  $\alpha = 1$ ,  $u_0 = 0,1$  (Figure 1)

•  $\alpha = -1$ ,  $u_0 = 0,1$  (Figure 2)

•  $\alpha = 1$ ,  $u_0 = 1,5$  (Figure 3)

•  $\alpha = -1$ ,  $u_0 = 1,5$  (Figure 4)

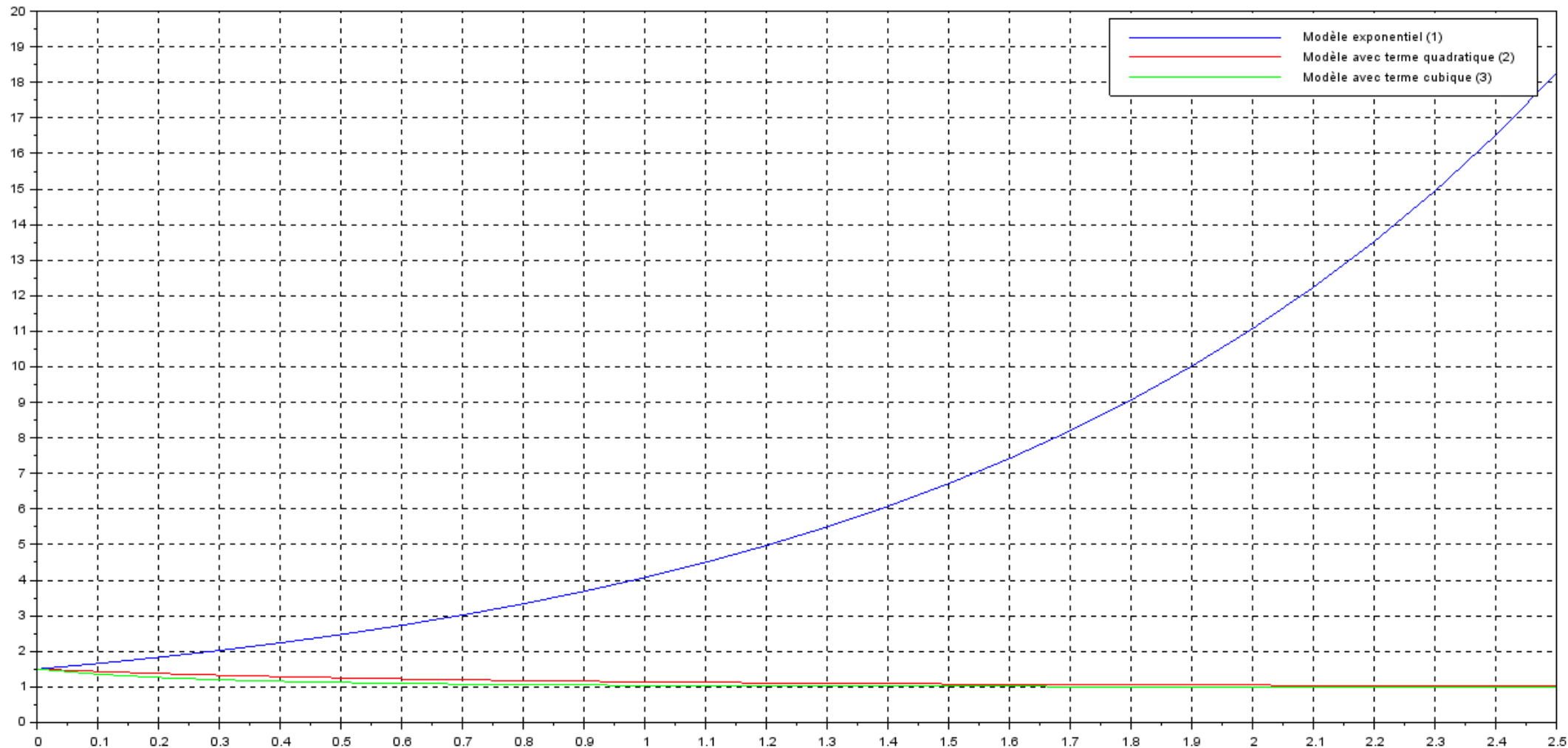
Différents modèles de dynamique des populations avec  $\alpha=1$  et  $u_0=0.1$



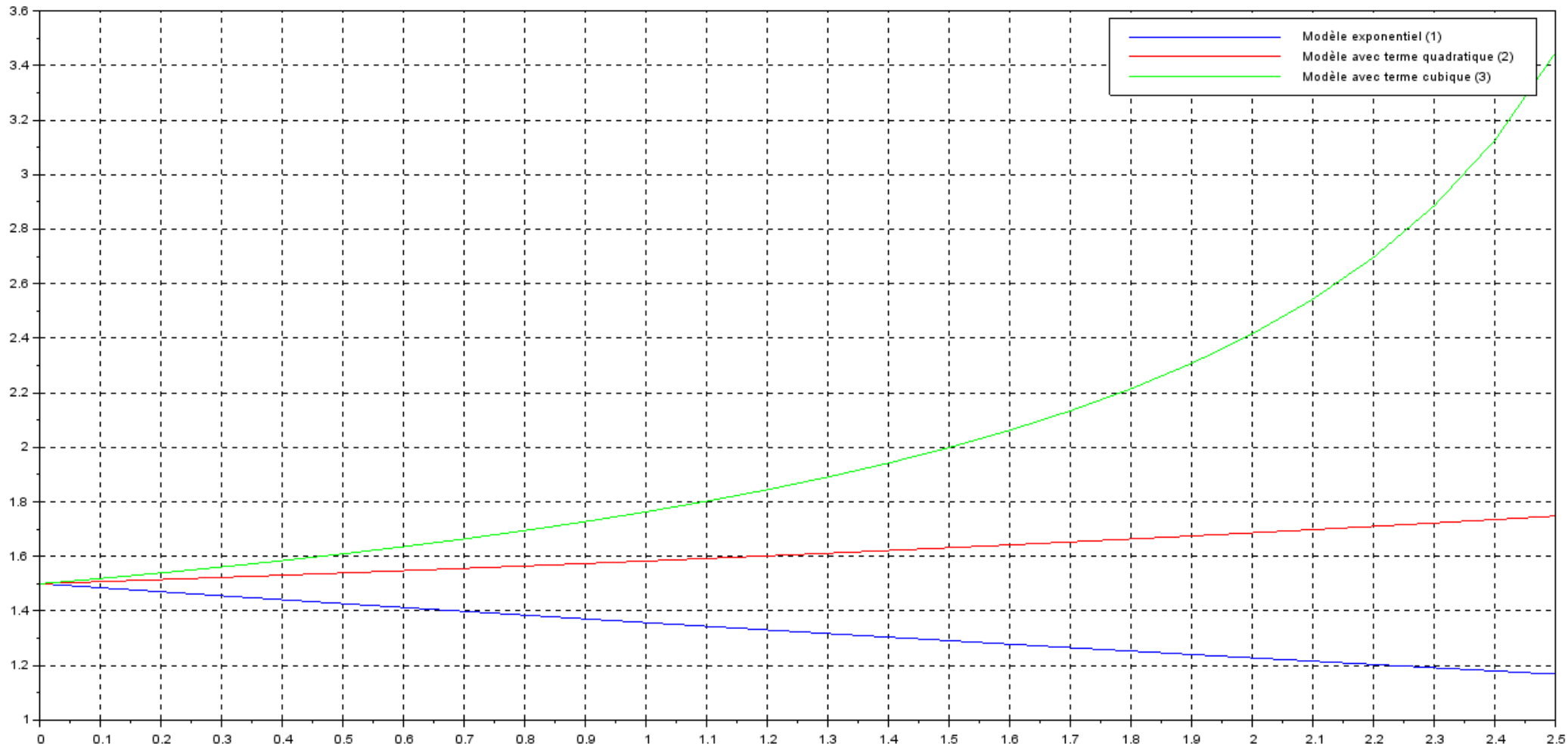
Différents modèles de dynamique des populations avec  $\alpha = -1$  et  $u_0 = 0.1$



Différents modèles de dynamique des populations avec  $\alpha=1$  et  $u_0=1.5$



Différents modèles de dynamique des populations avec  $\alpha = -0.1$  et  $u_0 = 1.5$



III - Équation aux dérivées partielles

$$\text{L'EDP est } \boxed{\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + g(u(x,t))} \quad (4)$$

$$g(u) = u(1-u) \text{ où } g(u) = u(1-u^2)$$

1 - Étude de l'équation linéarisée.

l'équation linéarisée s'écrit :

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + u(x,t)} \quad (4L)$$

$$\text{où } u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ (x,t) \mapsto u(x,t)$$

Théorème :

Pour  $u_0 : x \mapsto u_0(x)$  (Donnée initiale),  $u_0 \in S(\mathbb{R})$ ,  
(4L) admet une unique solution  $(x,t) \mapsto u(x,t)$ , où  $\forall t \geq 0, u(\cdot, t) \in S(\mathbb{R})$ ,  
sous réserve que  $u \in C_{x,t}^{2,1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ ,  $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, u \in L^\infty(\mathbb{R})$ .

Démonstration :

On utilise la transformation de Fourier :

$$\widehat{u}(t, \cdot) : \eta \mapsto \int_{\mathbb{R}} e^{-i\eta x} u(t, x) dx$$

On s'applique à (4L) :

$$\frac{\partial \widehat{u}}{\partial t}(\eta, t) = -\nu \eta^2 \widehat{u}(\eta, t) + \widehat{u}(\eta, t)$$

$$\text{Donc } \widehat{u}(\eta, t) = e^{t(1-\nu\eta^2)} \widehat{u}(\eta, 0)$$

$$\widehat{u}(\eta, t) = e^{t(1-\nu\eta^2)} \widehat{u}_0(\eta)$$

$$u_0 \in S(\mathbb{R}) \text{ donc } \hat{u}_0 \in S(\mathbb{R})$$

$$u, v \geq 0, \hat{u}(\cdot, 0) \in S(\mathbb{R})$$

$$\text{Donc } \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{t(-v|\eta|^2 + ix\eta)} \hat{u}_0(\eta) d\eta$$

L'unicité est immédiate ( $u_0 \equiv 0$ )

□

2- Schéma numérique par P'EDP.

Proposition:

Le schéma numérique (13) est consistant d'ordre 1 en temps et 2 en espace.

Démonstration:

Soit  $u$  une solution régulière de (4)

L'erreur de consistance est donnée par:

$$\varepsilon_j^m = \frac{u(x_j, t_{m+1}) - u(x_j, t_m)}{\tau} - v \frac{u(x_{j+1}, t_{m+1}) - 2u(x_j, t_{m+1}) + u(x_{j-1}, t_{m+1}))}{h^2} - g(u(x_j, t_m))$$

On fait des développements limités:

$$\varepsilon_j^m = \frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t_{m+1}) + O(\tau) - v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t_{m+1}) + O(h^2) - g(u(x_j, t_{m+1})) + \frac{\partial}{\partial t} [g(u(x_j, t_m))] \cdot \tau + O(\tau^2)$$

$$\varepsilon_j^m = \frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t_{m+1}) - v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t_{m+1}) - g(u(x_j, t_{m+1})) + O(\tau + h^2) = 0 \text{ (solution de (4))}$$

$$\varepsilon_j^m = O(\tau + h^2) \text{ d'où le résultat}$$

□

Remarques:

- La condition (14) signifie que  $\frac{\partial u}{\partial x}(-L, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0$   
(Approximation de  $\frac{\partial u}{\partial x}$  par différences finies)
- La condition (15) donne  $U^0$  qui prend les valeurs de  $u_0$  en les points  $x_j$ .

Remarque:

Sous condition de stabilité, on a donc une convergence de l'ordre de  $O(\tau + h^2)$

En observant (13), on constate que la matrice IM est donnée par:

$$IM = I_{\bar{U}} - \frac{\tau \nu}{h^2} A, \text{ où } A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & & & (0) \\ 1 & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ (0) & & & & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$IM \in \mathcal{M}_{\bar{U}}(\mathbb{R})$$

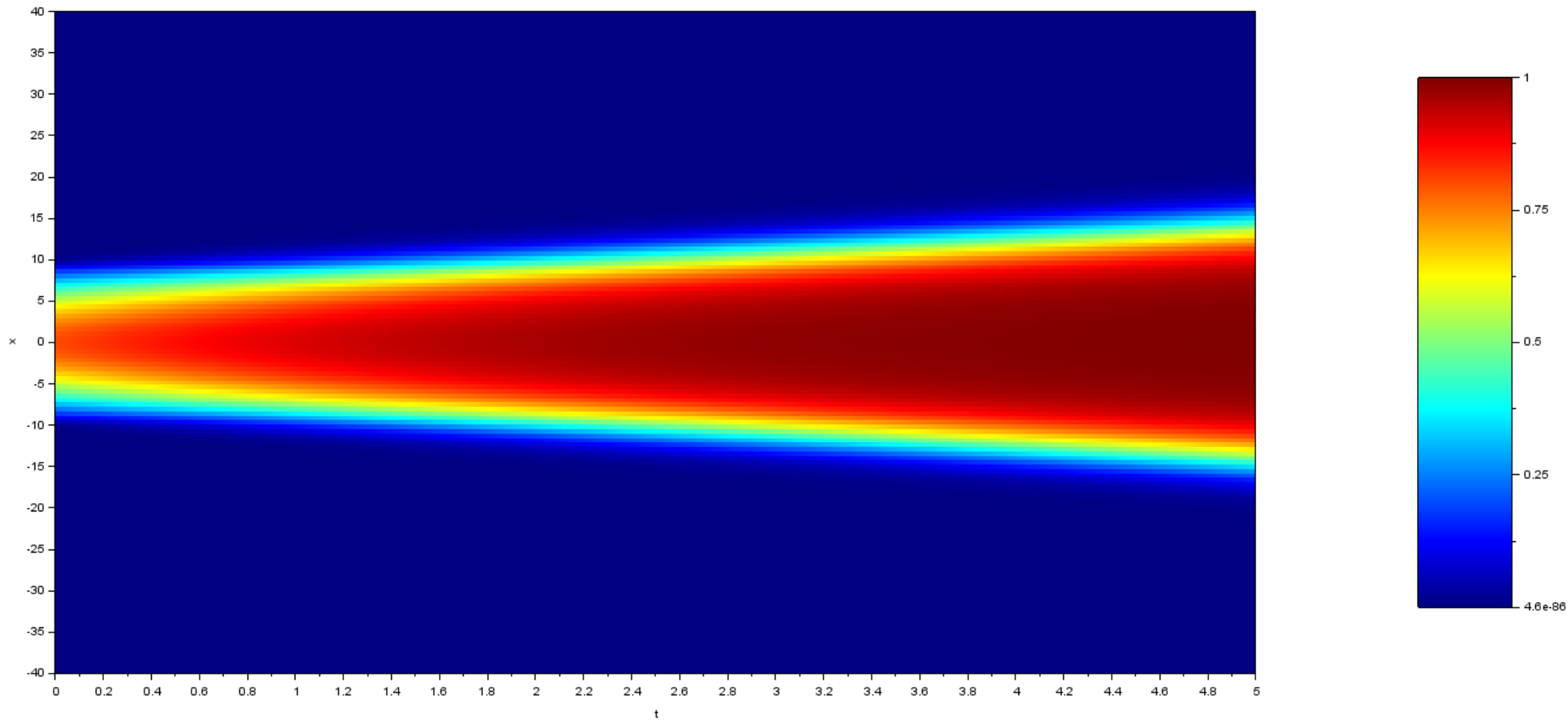
Simulations numériques réalisées avec la condition initiale

$$u_0(x) = 0,8 \cos\left(\frac{\pi x}{20}\right) \text{ si } |x| \leq 10.$$

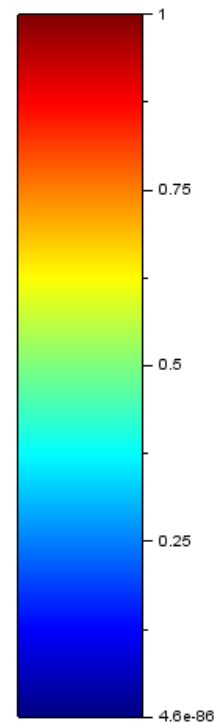
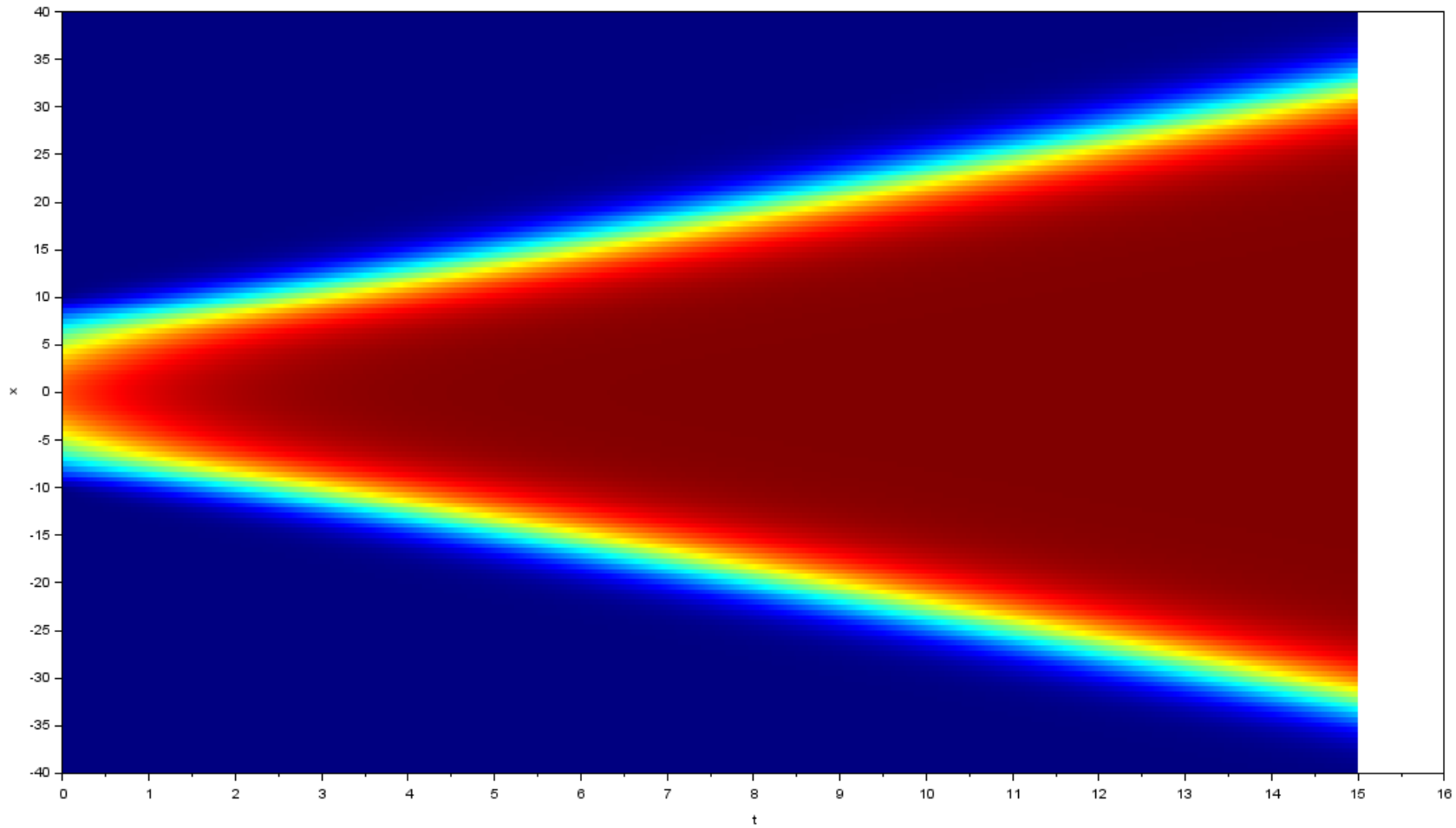
$$\bar{U} = 150, \tau = 0,04$$

- $T = 5, g(u) = u(1-u)$  (Figure 5)
- $T = 15, g(u) = u(1-u)$  (Figure 6)
- $T = 5, g(u) = u(1-u^2)$  (Figure 7)
- $T = 15, g(u) = u(1-u^2)$  (Figure 8)

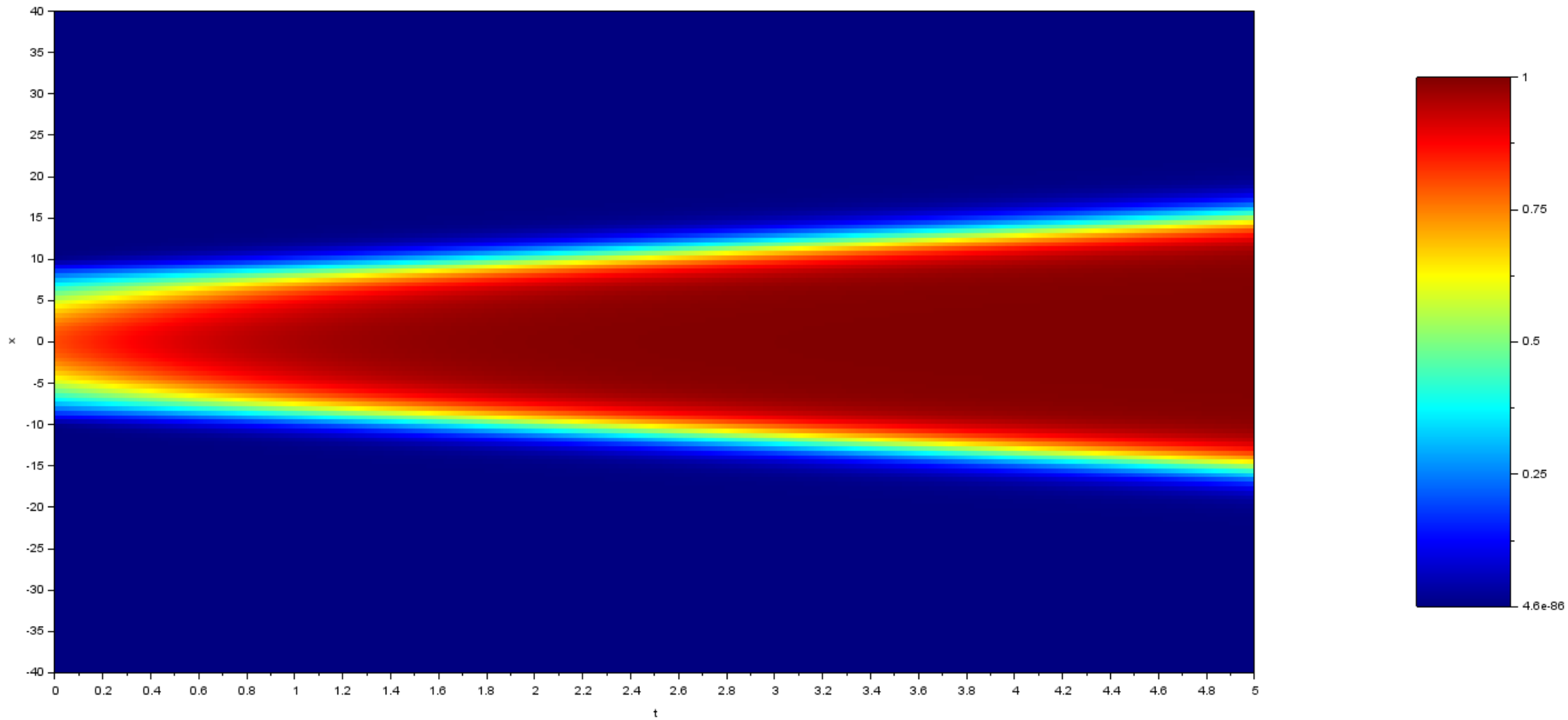
Evolution de la population



Evolution de la population



Evolution de la population



Evolution de la population

