

Projection sur un convexe fermé non vide et Riesz-Fréchet

Leçons concernées: 205, 208, 213, (219), 253

Référence(s): Cours d'analyse fonctionnelle, Daniel Li p.33

Projection sur un convexe fermé non vide. Soient H un espace de Hilbert et C un convexe fermé et non vide de H . Alors

$$\forall x \in H, \exists! p \in C, \|x - p\| = d(x, C).$$

De plus, p est l'unique élément de C satisfaisant

$$\forall c \in C, \quad \operatorname{Re}(\langle c - p, x - p \rangle) \leq 0$$

Étape 1 : EXISTENCE.

Attention, la preuve est remaniée par mes soins. Garder en tête qu'on n'utilise pas l'inégalité triangulaire. On va considérer une suite minimisante de points de C . On montre que cette suite est de Cauchy au moyen de l'identité du parallélogramme. La convexité de C intervient à cette étape. Puisque C est complet, car fermé dans un complet, la suite converge dans C car C est fermé. La limite réalise le minimum.

Fixons $x \in H$ et notons $d := d(x, C) = \inf_{c \in C} \|x - c\|$.

Considérons alors une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x - x_n\| = d$. On va montrer que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy.

Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^2$. On note $d_p = \|(x - x_p)\|$ et $d_q = \|(x - x_q)\|$.

$$\begin{aligned} \|x_p - x_q\|^2 &= \|(x - x_q) - (x - x_p)\|^2 \\ &= 2d_q^2 + 2d_p^2 - 4\|x - \frac{x_p + x_q}{2}\|^2 \quad \text{id. du parallélogramme} \\ &\leq 2d_q^2 + 2d_p^2 - 4d^2 \quad C \text{ convexe} \\ &\xrightarrow[p, q \rightarrow +\infty]{} 0 \end{aligned}$$

Ainsi, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy donc converge, car H Hilbert, vers un élément p de C , car C est fermé.

Étape 2 : UNICITÉ.

On considère p_1 et p_2 vérifiant la condition. On applique alors le même raisonnement que pour l'existence puisque dans les égalités, on a uniquement utiliser le fait que x_p et x_q sont dans C . Or, p_1 et p_2 sont également dans C .

$$\|p_1 - p_2\|^2 \leq 2d^2 + 2d^2 - 4d^2 = 0$$

D'où $p_1 = p_2$ par propriété de séparation et positivité de la norme.

Étape 3 : Caractérisation angulaire.

On montre que

$$y = p_C(x) \Leftrightarrow y \in C \text{ et } \forall z \in C, \operatorname{Re}(\langle z - y, x - y \rangle) \leq 0$$

\Rightarrow $y \in C$ par définition du projeté. Soit $z \in C$. Soit $t \in]0, 1]$. Par convexité de C , $tz + (1 - t)y \in C$ d'où

$$\begin{aligned} d^2 &\leq \|x - tz - (1 - t)y\|^2 \\ &= \|x - y + t(y - z)\|^2 \\ &= d^2 - 2t \operatorname{Re}(\langle x - y, z - y \rangle) + t^2 \|y - z\|^2 \end{aligned}$$

D'où en divisant par $t \neq 0$,

$$0 \leq -2 \operatorname{Re}(\langle x - y, z - y \rangle) + t \|y - z\|^2$$

On obtient le résultat avec $[t \rightarrow 0^+]$.

\Leftarrow Puisque $y \in C$, il suffit de prouver que $\forall z \in C, \|x - z\| \geq \|x - y\|$.

$$\begin{aligned} \|x - z\|^2 &= \|x - y + y - z\|^2 \\ &= \|x - y\|^2 + \underbrace{\|y - z\|^2}_{\geq 0} + \underbrace{\operatorname{Re}(\langle x - y, y - z \rangle)}_{\geq 0} \end{aligned}$$

Si F est un sous-espace vectoriel fermé d'un Hilbert H le théorème s'applique puisque F est en particulier un convexe non vide. De plus, on prouve au moyen de la caractérisation angulaire que le projeté est l'unique point $y \in F$ tel que

$$y = p_F(x) \iff y \in F \quad \text{et} \quad x - y \in F^\perp$$

Étape 4 : Décomposition de l'espace H .

$$H = F \oplus F^\perp$$

$$x = \underbrace{x - p_F(x)}_{\in F^\perp} + \underbrace{p_F(x)}_{\in F}$$

$$x \in F \cap F^\perp \implies \langle x|x \rangle = 0 \implies x = 0$$

Étape 5 : Théorème de représentation de Fréchet-Riesz.

Théorème de Fréchet-Riesz. Soit H un espace de Hilbert. Pour toute $\phi \in H^*$, il existe un unique $y \in H$ tel que $\phi(x) = \langle x|y \rangle$.

EXISTENCE. Soit $\phi \in H^*$ non nulle. Si ϕ est nulle, le vecteur nul convient.

$$H = \ker(\phi) \oplus (\ker(\phi))^\perp$$

en utilisant le corollaire précédent puisque $\ker(\phi)$ est fermé car ϕ est continue.

Mais comme ϕ est une forme linéaire non nulle $\ker(\phi)$ est de codimension 1 donc $(\ker(\phi))^\perp$ est de dimension 1. On considère alors $u \in (\ker(\phi))^\perp$ tel que $\phi(u) = 1$.

Pour $x = \lambda u$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $\phi(x) = \lambda = \langle x, \frac{u}{\|u\|^2} \rangle$.

Et pour $x \in \ker(\phi)$, $\langle x, \frac{u}{\|u\|^2} \rangle = 0$. Ainsi

$$\phi = \left\langle \cdot, \frac{u}{\|u\|^2} \right\rangle$$

UNICITÉ. Si v et v' conviennent, alors $\forall x \in H$, $0 = \langle x, v - v' \rangle$, d'où $v - v' \in H^\perp = \{0\}$.

On utilise également le livre *Objectif Agrégation, 2^e édition de Beck, Malick et Peyré (p.95)*.

1. Définitions

Partie convexe. Une partie C d'un espace vectoriel est dite convexe si le segment $[x, y]$ est contenu dans C dès lors que x et y appartiennent à C .

Tout s.e.v. est convexe ; toute boule est convexe.

2. Remarques sur le théorème de projection

La complétude de H n'est pas absolument indispensable : on peut s'en passer, mais en supposant de plus que c'est C qui est complet.

Dimension finie. Dans un espace euclidien (ou hermitien), on peut projeter sur tous les fermés et non simplement les fermés convexes. cf. *Objectif Agrégation, 2^e édition de Beck, Malick et Peyré (p.30)*.

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Si C est un fermé de E et si f est coercive alors f est minorée et atteint son minimum.

▷ **Preuve.** Soit $a \in C$. Par coercivité de f ,

$$\exists R > 0, \forall x \in E, \|x\| \geq R \implies f(x) > f(a).$$

Donc

$$\inf_{x \in C} f(x) = \inf_{x \in C \cap B(0, R)} f(x).$$

Or, puisque E est de dimension finie, $B(0, R)$ est compact donc $B(0, R) \cap C$ est compact en tant qu'intersection de fermés qui est bornée. Or f est continue. Le théorème de la borne atteinte permet de conclure. ◻

Soit $(F, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé (éventuellement de dimension infinie), E un sous-espace vectoriel de F de dimension finie. Pour tout $x \in F$, il existe $x^* \in E$ tel que

$$\|x - x^*\| = d(x, E)$$

▷ **Preuve.** Soit $x \in F$. Prendre $C = E$ dans la proposition précédente et définir $f : y \in E \mapsto \|x - y\| \in \mathbb{R}$ qui est continue car 1-lipschitzienne et coercive car $f(y) \geq \|y\| - \|x\|$. ◻

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit C un fermé de E . Alors, il existe $x^* \in C$ tel que

$$\|x - x^*\| = d(x, C)$$

▷ **Preuve.** La fonction $f : y \in E \mapsto \|x - y\| \in \mathbb{R}^+$ est continue car 1-lipschitzienne et coercive d'après l'inégalité triangulaire ($f(y) \geq \|y\| - \|x\|$). Puisque C est fermé, f y est minorée et atteint son minimum. ◻

Remarques.

1. Si la norme sur E est strictement convexe, le point réalisant le minimum est unique.
2. Attention $d(x, A) = 0$ n'implique pas nécessairement $x \in A$ mais $x \in \bar{A}$. Par exemple, penser à la distance de 0 à $]0, 1[$ ou à celle d'un réel dans \mathbb{Q} .

Rappelons le théorème de la borne atteinte.

Théorème de la borne atteinte. L'image d'un compact par une application continue est compacte.

▷ **Preuve.** $K \subset X$ compact. Si $f(K) \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ alors $K \subset \bigcup_{i \in I} f^{-1}(U_i)$. Or, les $f^{-1}(U_i)$ sont des ouverts car f est continue; et K est compact. Donc par propriété de Borel-Lebesgue $K \subset \bigcup_{i=1}^N f^{-1}(U_i)$ et on conclut facilement. \square

Enfin rappelons quelques propriétés à connaître sur les applications projections associées.

$p_C : x \mapsto p_C(x)$ est 1-lipschitzienne, pas nécessairement linéaire. p_F est linéaire, $\ker(P_F) = F^\perp$, $p_F \circ p_F = p_F$ et $\|p_F\| = 1$.

3. Remarques sur le théorème de représentation

cf. *Objectif Agrégation, 2^e édition de Beck, Malick et Peyré (p.95)*.

4. Applications du théorème de Riesz-Fréchet

Voici une liste non exhaustive d'applications.

- existence de l'adjoint,
- théorème de Lax-Milgram et théorème de Stampacchia (employés pour résoudre des EDPs et plus précisément des formulations variationnelles d'EDPs)
- critère de densité et ses multiples utilisations : densité des fonctions continues à support compact (cf. [Cours d'analyse fonctionnelle, Daniel Li](#)), densité des polynômes orthogonaux,
- théorème de Hahn-Banach géométrique version Hilbert.

5. Formes linéaires

Si ϕ est une forme linéaire non nulle, $\ker(\phi)$ est un hyperplan, i.e. est de codimension 1.

▷ **Preuve.** en effet, les supplémentaires du noyau de ϕ sont isomorphes à $E/\ker(\phi)$. Or par théorème de factorisation $E/\ker(\phi) \simeq \mathbb{K}$.

\square

Si H est un hyperplan, il existe au moins une forme linéaire ϕ de noyau H .