

Connexité de l'ensemble des valeurs d'adhérence dans un compact

Leçons concernées: 203, 204, (223), (226)

Référence(s): Gourdon Analyse p.46, FGN Analyse 1, Isenmann p.116

Soit (E, d) un espace métrique compact et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de E telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(u_n, u_{n+1}) = 0$. L'ensemble des valeurs d'adhérence Γ de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est connexe et compact.

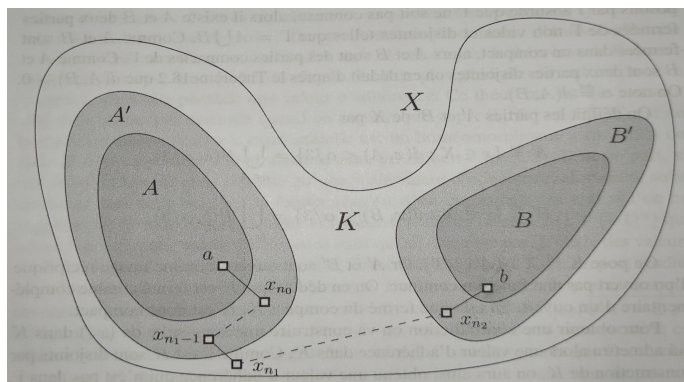
Étape 1 : Compacité

$\Gamma = \bigcap_{p \in \mathbb{N}} \overline{\{u_n, n \geq p\}}$ est un fermé dans un compact donc compact.

Étape 2 : Connexité

Raisonnons par l'absurde en supposant que $\Gamma = A \cup B$ avec A et B des compacts non vides disjoints de Γ . (A et B fermés dans Γ compact). Donc $\alpha := d(A, B) > 0$

Étape 2.A : Idées.



expliquer toute la preuve à l'oral sur un dessin comme ci-dessus. L'idée est de montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence en dehors de Γ plus précisément dans le compact K . Pour cela on montre que la suite rencontre K infiniment souvent. On pourra donc en extraire une sous-suite convergente.

On note alors

$$A' = \left\{ x \in E \mid d(x, A) < \frac{\alpha}{3} \right\} = \bigcup_{x \in A} B(x, \frac{\alpha}{3}) \text{ et } B' = \left\{ x \in E \mid d(x, B) < \frac{\alpha}{3} \right\}$$

A' et B' sont des ouverts (union d'ouverts) donc $K := E \setminus (A' \cup B')$ est fermé dans le compact E , donc compact.

Étape 2.B : $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence dans K .

Cela donnera une absurdité car $\Gamma \cap K = \emptyset$ (car $A \cup B \subset A' \cup B'$)

Par hypothèse, $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(u_n, u_{n+1}) = 0$ donc

$$\exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}_0, d(u_n, u_{n+1}) < \frac{\alpha}{3} \quad (*)$$

Soit $N \geq N_0$.

A et B sont non vides $\exists (x_0, y_0) \in A \times B$.

Par définition de Γ $\neg \exists n_1 > N, d(x_0, u_{n_1}) < \frac{\alpha}{3}$ donc $u_{n_1} \in A'$.

$\neg \exists n_2 > n_1$ tel que $d(y_0, u_{n_2}) < \frac{\alpha}{3}$ donc $u_{n_2} \in B'$

et donc $u_{n_2} \notin A'$.

On peut donc introduire n_0 le premier entier supérieur à n_1 tel que $u_{n_0} \notin A'$. On a $u_{n_0-1} \in A'$ donc $d(u_{n_0}, B) \geq d(u_{n_0-1}, B) - d(u_{n_0-1}, u_{n_0}) \geq d(A, B) - d(u_{n_0-1}, A) - d(u_{n_0-1}, u_{n_0}) > \frac{\alpha}{3}$ Donc $u_{n_0} \notin B'$, donc $u_{n_0} \in K$.

Ainsi, $\forall N \geq N_0, \exists n_0 \geq N, u_{n_0} \in K$. On peut donc construire une sous-suite $(u_{\phi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui prend ses valeurs dans K . Comme K est compact $(u_{\phi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ admet au moins une valeur d'adhérence dans K , donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet au moins une valeur d'adhérence dans K . Ceci est impossible.

L'ensemble Γ est connexe.

Application. Soient $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ continue et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $x_0 \in [0, 1]$ et $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = f(x_n)$ vérifiant $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_{n+1} - x_n) = 0$. Alors $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Notons Γ l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. L'idée est de montrer que Γ contient un seul élément. Cela finira la preuve car la suite est en plus bornée.

Étape 1 : $\Gamma \neq \emptyset$

C'est le théorème de Bolzano-Weierstrass.

Étape 2 : Γ est constitué de points fixes de f .

Soit $a \in \Gamma$. Notons $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ l'application strictement croissante telle que $x_{\phi(n)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a$. Alors

$$a = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{\phi(n)} \stackrel{\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_{n+1} - x_n) = 0}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{\phi(n)+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_{\phi(n)}) = f(a)$$

par continuité de f .

Étape 3 : Unique valeur d'adhérence.

Par le résultat précédent, Γ est connexe donc si Γ contient deux valeurs d'adhérence distinctes $l < l'$ alors $[l, l'] \in \Gamma$. Puisque $\frac{l+l'}{2} \in \Gamma$, $\exists N \in \mathbb{N}, x_N \in [l, l']$. Mais alors x_N est un point fixe de f donc la suite est stationnaire en x_N donc n'a qu'une seule valeur d'adhérence. contradiction.

1. Autour de la notion de valeur d'adhérence

Contexte. On introduit la notion de valeur d'adhérence pour étudier les suites qui ne convergent pas. Certaines suites qui n'admettent pas de valeurs d'adhérence comme $(n)_{n \in \mathbb{N}}$, certaines en admettent un nombre fini comme $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$, d'autres une infinité comme $(\sin(n))_{n \in \mathbb{N}}$. Des propriétés sur le domaine d'étude assurent l'existence d'une valeur d'adhérence.

Montrer que si l'ensemble des valeurs d'adhérence est réduit à un point et que la suite est bornée alors elle converge.

Notons a l'unique valeur d'adhérence de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Supposons que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas.

$$\exists \epsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n > N, |x_n - a| > \epsilon (*)$$

On peut donc construire une sous-suite $(x_{\phi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d(x_{\phi(n)}, a) > \epsilon$.

Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, $(x_{\phi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ étant bornée, admet une valeur d'adhérence nécessairement distincte de a par (*), ce qui est absurde.

2. Remarques sur l'application

La réciproque de la propriété est immédiate.

Donner une suite qui diverge bien que $d(u_n, u_{n+1}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

La suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \ln(n)$ convient.

Donner un exemple de suite qui est toujours à valeurs dans un compact et telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(u_n, u_{n+1}) = 0$ qui a plus d'une valeur d'adhérence. Autrement dit. **l'hypothèse $u_{n+1} = f(u_n)$ est nécessaire.**

La suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \cos(\ln(n))$ convient. En effet,

$$|\cos(\ln(n+1)) - \cos(\ln(n))| \leq |\ln(n+1) - \ln(n)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

et ses valeurs d'adhérence sont $[-1, 1]$.

Donner un exemple de suite récurrente dont les termes se rapprochent mais qui diverge. Autrement dit. **à valeurs dans un compact est nécessaire.**

Posons $\forall x \in [1, +\infty[, f(x) = x + \frac{1}{x}$ et la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $x_0 = 1$ et $x_{n+1} = f(x_n)$. La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante et non majorée donc tend vers $+\infty$ et alors $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{x_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$

Donner un exemple de suite récurrente à valeurs dans un compact définie par une relation de récurrence mais qui ne converge pas. Autrement dit. **$x_{n+1} - x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ est nécessaire.**

Considérer $f(x) = 1 - x$ et $x_0 = 0$.

3. Autour de la notion de compacité

La distance entre deux compacts disjoints est strictement positive.

▷ **Preuve.** $f : \begin{cases} A \times B & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & d(x, y) \end{cases}$ est continue. En effet, par la première inégalité triangulaire puis la seconde inégalité triangulaire,

$$|d(x, y) - d(x', y')| \leq |d(x, y) - d(x, y')| + |d(x, y') - d(x', y')| \leq d(y, y') + d(x, x')$$

On utilise alors le théorème de la borne atteinte et le fait que A et B sont disjoints. □

Ce dernier théorème est faux si K n'est que fermé comme le montre le cas où

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 0\} \text{ et } B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : e^x \leq y\}$$

4. Applications

L'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(\sin(n))_{n \in \mathbb{N}}$ est $[-1, 1]$.

▷ **Preuve.** On montre dans un premier temps que -1 et 1 sont des valeurs d'adhérence et en utilisant dans un second temps que les parties connexes de \mathbb{R} sont les intervalles de \mathbb{R} .

Méthode de Jacobi.

cf. une des sources.