Densité des polynômes orthogonaux

Leçons concernées: 207, 213, 234, (239), 245, 250
Référence(s): BMP p.140

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et ρ une fonction poids. On suppose qu'il existe un réel $a > 0$ tel que

$$\int_I e^{a|x|}\rho(x)\,dx < +\infty$$

Les polynômes orthogonaux $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associés à ρ forment une base hilbertienne de $L^2(I,\rho)$.

Objectif. Il suffit de prouver que $\overline{\mathrm{Vect}(P_n)} = E$ puisque les polynômes forment déjà une famille orthonormale de $L^2(I,\rho)$ i.e par le critère de densité puisque $L^2(I,\rho)$ est un Hilbert,

$$\mathrm{Vect}(P_n)^\perp = \{0\} \quad \text{i.e.} \quad \mathrm{Vect}(x^n)^\perp = \{0\}$$

i.e.

$$\forall f \in L^2(I,\rho), \left(\forall n\in\mathbb{N}, \int_I x^n f(x)\rho(x)\,dx\right) = 0 \implies f = 0.$$

On introduit alors $B_a = \{z\in\mathbb{C} \mid |\mathrm{Im}(z)| < \frac{a}{2}\}$ et

$$F : z\in B_a \mapsto F(z) := \int_I e^{-izx} f(x)\rho(x)\,dx \in \mathbb{C}$$

Plan.
1. F est bien définie ;
2. Dérivation de F ;
3. F est nulle sur $\mathbb{R}$;
4. f est nulle et conclusion.

Étape 1 : F **est bien définie.**
Posons $g(z,x) := e^{-izx}f(x)\rho(x)$.
Pour $z\in B_a$ et $x\in I$, $|g(z,x)| \leqslant e^{a|x|/2}|f(x)|\rho(x) =: h(x) \in L^1(I)$.
En effet, par Cauchy-Schwarz,

$$\int_I h(x)\,dx \leqslant \left(\int_I e^{a|x|}\rho(x)\,dx\right)^{\frac12}\left(\int_I |f(x)|^2\rho(x)\,dx\right)^{\frac12} < +\infty \quad (*)$$

F est alors bien définie.

Étape 2 : F **est dérivable.**
On utilise le théorème d'holomorphie sous le signe intégrale :
$-\forall z\in B_a$, $x\mapsto g(z,x)$ est mesurable.
– Pour presque tout $x\in I$, $z\mapsto g(z,x)$ est holomorphe.
– $\forall z\in B_a, \forall x\in I, |g(z,x)| \leqslant h(x)$ et $h\in L^1(I)$ d'après $(*)$.
Ainsi, F est une fonction holomorphe sur B_a.

$$\forall z\in B_a,\ F^{(n)}(z) = (-i)^n\int_I x^n e^{-izx}f(x)\rho(x)\,dx.$$

Étape 3 : $F = 0$ **sur** $\mathbb{R}$**.**
On obtient donc

$$F^{(n)}(0) = (-i)^n\int_I x^n f(x)\rho(x)\,dx = 0 \quad \text{par hypothèse.}$$

L'unicité du développement en série entière d'une fonction holomorphe montre que $F = 0$ sur un voisinage de 0. Le théorème du prolongement analytique implique alors que $F = 0$ sur l'ouvert connexe B_a donc en particulier sur $\mathbb{R}$:

$$\forall \xi\in\mathbb{R}, \int_I e^{-i\xi x}f(x)\rho(x)\,dx = 0 \quad (**)$$

Étape 3 : $f = 0$.
On va utiliser l'injectivité de la transformée de Fourier sur L^1. Pour cela il suffit de montrer que la fonction ϕ définie par pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\phi(x) := \begin{cases} f(x)\rho(x) & \text{si } x \in I, \\ 0 & \text{sinon}, \end{cases}$$

est dans $L^1(\mathbb{R})$. or, $\forall x \in I, |f(x)|\rho(x) \leqslant \frac{1}{2}(1 + |f(x)|^2)\rho(x)$.
Puisque ρ et ρf^2 sont intégrables sur I on en déduit que $\phi \in L^1(\mathbb{R})$. Ainsi, $(**)$ donne $\hat{\phi} = 0$ donc par injectivité $\phi = 0$. Puisque $\rho > 0$, $f = 0$.

1. Bases hilbertiennes

Pour éviter de parler de familles sommables, on se restreindra aux espaces séparables.

1.1 Espaces séparables

Espace séparable. Un espace topologique E est dit séparable s'il existe une partie D de E qui est dénombrable et dense dans E.

Partie totale. Une partie Δ d'un sous-espace vectoriel E est dite totale si le s.e.v $\text{Vect}(\Delta)$ est dense dans E.

Si E est un espace vectoriel normé. E est séparable si, et seulement si, il existe une partie Δ de E qui est dénombrable et totale dans E

▷ **Preuve.** L'implication directe est immédiate. La réciproque s'appuie sur la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ (resp. celle de $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{C}$). Si $\overline{\text{Vect}(\Delta)}$ est dense dans E. Traitons le cas réel. Il existe $\Delta \subset E$ tel que $\overline{\text{Vect}_{\mathbb{R}}(\Delta)} = E$. Toutefois, $\text{Vect}_{\mathbb{R}}(\Delta)$ n'est pas nécessairement dénombrable. Or, $E = \overline{\text{Vect}_{\mathbb{R}}(\Delta)} = \overline{\text{Vect}_{\mathbb{Q}}(\Delta)}$ qui lui est dénombrable. En effet, $\text{Vect}_{\mathbb{Q}}(\Delta) \subset \text{Vect}_{\mathbb{R}}(\Delta)$ par inclusion de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ et l'autre inclusion résulte de la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ (utiliser la caractérisation séquentielle pour le faire proprement). □

Exemples.

1. Tout sous-espace vectoriel de dimension finie est séparable.
2. Les espaces c_0 et l^p pour $1 \leqslant p < \infty$ sont séparables.
3. l_∞ n'est pas séparable.

▷ **Preuve.**
1. Il existe une base finie (donc dénombrable) B de E de dimension finie. Par définition, $Vect(B) = E$ donc B est totale. On rappelle que tout $K-$s.e.v. de dimension finie de $\mathbb{K}$ est fermé dans $\mathbb{K}$ (noyau de la projection sur un supplémentaire à ce s.e.v).
2. Considérer $\Delta = \{e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots);\ n \geqslant 1\}$. Δ est dénombrable et totale.
3. Supposons que l^∞ est séparable. Il existe donc $\Delta = \{v^1, \dots, v^n, \dots) \subset l^\infty$ telle que D soit dense dans l^∞. On montre alors qu'il existe une injection de $\{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$ dans Δ. Pour tout $x \in l^\infty$, posons $w_x := B(x, \frac{1}{2})$. Si $x \neq x' \in \{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$, alors $w_x \cap w_{x'} = \varnothing$. Or, par densité, pour tout $x \in \{0,1\}^{\mathbb{N}^*} \subset l^\infty$, il existe $n(x) \in \mathbb{N}$ tel que $v^{n(x)}$ soit dans w_x. Donc si $x \neq x' \in \{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$, on a $n(x) \neq n(x')$ car $w_x \cap w_{x'} = \varnothing$. Ainsi, d'après l'axiome du choix (on choisit le $n(x)$, on peut aussi s'en passer en prenant le plus petit indice qui convient), on a une application $x \in \{0,1\}^{\mathbb{N}^*} \mapsto v^{n(x)} \in \Delta$ qui de surcroît est injective. C'est absurde puisque Δ est dénombrable mais pas $\{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$.

Bref rappel sur l'axiome du choix. Il permet de "piocher" un élément dans un ensemble infini. Il est équivalent au lemme de Zorn qui affirme grosso modo que s'il existe un élément maximal sur chaque sous-ensemble totalement ordonné, alors il existe un élément maximal.

Lemme de Zorn. Soit X un ensemble muni d'une relation d'ordre $\leqslant$. On suppose que SI pour tout sous-ensemble $E \subset X$ tel que $(E, \leqslant)$ soit totalement ordonné, il existe $x_E \in X$ tel que pour tout $e \in E$, $e \leqslant x_E$, ALORS il existe $x \in X$ tel que pour tout $x \in X$, $x \leqslant x_0$.

Il est utile pour démontrer le théorème de Cauchy-Lipschitz. On utilise la relation d'ordre sur l'ensemble des solutions de l'équation différentielle : $(J, y) \leqslant (J', y')$ si $J \subset J'$ et $y'_{|J} = y$.

Tout sous-espace d'un espace métrique séparable est séparable.

▻ **Preuve.** Soit $D \subset E$ dénombrable et dense dans E, i.e. $\overline{D} = \overline{(d_1, \ldots, d_n, \ldots)} = E$. Pour tout $n, k \geqslant 1$ tels que $F \cap B(d_n, \frac{1}{k})$ ne soit pas vide, on choisit un élément $d_{n,k}$ de $F \cap B(d_1, \frac{1}{k})$, sinon on pose $d_{n,k} = y_0$ un point fixé de F qu'on ne suppose pas vide. Alors $D_F = \{d_{n,k} \; : \; n, k \geqslant 1\}$ est une partie dénombrable de F, et elle est dense dans F. En effet, soit $y \in F$. Alors pour tout $k \geqslant 1$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $d_n \in B\left(y, \frac{1}{k}\right)$. Ainsi, $F \cap B(d_n, \frac{1}{k}) \neq \varnothing$ donc $d_{n,k}$ $F \cap B(d_n, \frac{1}{k})$; et $d(y, d_{n,k}) \leqslant d(y, d_n) + d(d_n, d_{n,k}) \leqslant \frac{2}{k}$. □

Cela n'est plus vrai dans les espaces topologiques généraux. Notion de compactifié de Stone-Cech : pour tout ensemble I, il existe un "gros" espace compact βI appelé compactifié de Stone-Cech de I dans lequel I est dense. Le compactifié $\beta\mathbb{N}$ de $\mathbb{N}$ est séparable mais pas $\beta\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}$.

1.2 Systèmes orthonormés

Dans la suite H désigne un espace préhilbertien de dimension infinie.

Famille orthonormée. Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de H, indexée par un ensemble arbitraire I non vide. On dit que c'est une famille orthonormée si $\forall (i,j) \in I^2$, $\langle (u_i, u_j) = \delta_{i,j}$.

1. Dans l_2, la suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $e_n = (0, \ldots, 0, \underset{\text{nième position}}{1}, 0 \ldots)$ est orthonormée.
2. Dans $L^2(0,1)$, le système trigonométrique $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ où $e_n(t) = e^{2\pi int}$ est orthonormée.

Si le système fini $(u_1, \ldots, u_n)$ est orthonormé, alors pour tous $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$,
$$\left\| \sum_{k=1}^n a_k u_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^n |a_k|^2.$$

▻ **Preuve.** Il suffit de développer le carré. □

On en déduit facilement le résultat essentiel suivant :

Toute famille orthonormée est libre.

Inégalité de Bessel. Pour toute famille orthonormée $(u_i)_{i\in I}$ dans H, on a pour tout $x \in H$
$$\sum_{i\in I} |(x, u_i)|^2 \leqslant \|x\|^2$$

Rappel. Dans l'inégalité ci-dessus, la somme au premier membre est définie de la façon suivante : si $(a_i)_{i\in I}$ est une famille de nombres réels positifs, alors :
$$\sum_{i\in I} a_i := \sup_{J\subset I,\, J \text{ finie}} \sum_{j\in J} a_j.$$

▻ **Preuve.** Soit $x \in H$. Soit $J \subset I$ avec J finie.
$$\begin{aligned} 0 \leqslant \left\| x - 2\sum_{i\in J} (x, u_i) u_i \right\|^2 &= \|x\|^2 - \sum_{i\in J} (x, (x, u_i) u_i) + \left\| \sum_{i\in J} (x, u_i) u_i \right\|^2 \\ &= \|x\|^2 - 2\sum_{i\in J} \underbrace{\overline{(x, u_i)}(x, u_i)}_{=|(x,u_i)|^2} + \sum_{i\in J} |(x, u_i)|^2 \end{aligned}$$
en utilisant la première proposition de la sous-section 1.2 puisque J est finie. Cela achève la preuve. □

Si $l_2(I) := \{(a_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I \; ; \; \sum_{i\in I} |a_i|^2 < +\infty\}$, l'inégalité de Bessel entraîne que :

Continuité de S. L'application linéaire $S : \begin{cases} H \to & l_2(I) \\ x \mapsto & ((x, u_i))_{i\in I} \end{cases}$ est continue et de norme inférieure à 1.

Soit H un espace préhilbertien et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite orthonormée dans H. Si un vecteur $x \in H$ peut s'écrire $x = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n u_n$, alors on a $\xi_n = (x, u_n)$ pour tout $n \geqslant 1$.

▷ **Preuve.** Pour tout $p \geqslant 1$,

$$(x, u_p) = (\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n u_n, u_p) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n (u_n, u_p) = \xi_p$$

□

Expression du projeté. Soit H un espace préhilbertien, soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite orthonormée et $x = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n u_n$. Soit F_n le sous-espace vectoriel engendré par $u_1, \ldots, u_n$. Alors :

$$P_{F_n}(x) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k u_k.$$

▷ **Preuve.** On peut utiliser la caractérisation car F_n est complet en tant que $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Posons $y_n := \sum_{k=1}^{n} \xi_k u_k$. Alors $y_n \in F_n$ et $x - y_n \in F_n^{\perp}$. En effet, pour tout $j \leqslant n$,

$$(x - y_n, u_j) = (\sum_{k=n+1}^{+\infty} \xi_k u_k, u_j) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \xi_k (u_k, u_j) = 0$$

on a utilisé la continuité du produit scalaire. □

S est surjective. Soit H un espace de Hilbert. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite orthonormée dans H, alors pour toute suite $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l_2$, la série $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n u_n$ converge dans H.
En d'autres termes, l'application linéaire continue

$$S : \begin{cases} H \to & l_2(I) \\ x \mapsto & ((x, u_n))_{n\geqslant 1} \end{cases}$$

est surjective.

▷ **Preuve.** On vérifie le critère de Cauchy facilement.

$$\left\| \sum_{k=n}^{n+p} \xi_k u_k \right\|^2 = \sum_{k=n}^{n+p} |\xi_n|^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

uniformément en p. □

1.3 Bases orthonormées

Base orthonormée ou base hilbertienne. On dit qu'une suite orthonormée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans un espace préhilbertien est une base orthonormée de H si l'ensemble $\{u_n \,;\, n \geqslant 1\}$ est total dans H. On dit aussi que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne.

Notons que comme on se restreint à prendre des familles dénombrables, H est nécessairement séparable.

Tout espace préhilbertien séparable possède des bases orthonormées.

▷ **Preuve.** On utilise le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. □

Base algébrique ≠ base orthonormée. Une famille de vecteurs d'un espace vectoriel est une base si tout vecteur peut s'écrire, de façon unique, comme combinaison linéaire d'un nombre fini de termes de la famille. Or, le théorème qui suit dit que pour une base orthonormée, tout élément s'écrit comme la somme d'une série qui fait intervenir tous les termes de la base orthonormée.

Soit H un espace préhilbertien et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une base orthonormée de H. Alors tout élément $x \in H$ s'écrit

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n u_n, \quad \text{avec } \xi_n = (x \mid u_n).$$

De plus, pour tous $x, y \in H$, on a les **formules de Parseval** :

1. $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} |(x|u_n)|^2$;
2. $(x|y) = \sum_{n=1}^{+\infty} (x|u_n)\overline{(y|u_n)}$, la série convergeant absolument.

▷ **Preuve.** Notons F_n le sous-espace vectoriel engendré par $(u_1, \ldots, u_n)$. Il est complet car de dimension finie et $\mathbb{K}$ complet. Notons $x_n = p_{F_n}(x)$.

L'ensemble $\{u_n\,;\, n \geqslant 1\}$ étant total, $\bigcup_{n\geqslant 1} F_n$ est dense dans H. Puisque de plus la suite $(F_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante, on a

$$\|x - x_n\| = d(x, F_n) = d\left(x, \bigcup_{k=1}^{n} F_k\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'autre part, $\{u_1, \ldots, u_n\}$ est une famille libre car orthonormée, c'est donc une base algébrique de F_n. On a alors en utilisant une proposition ci-dessus

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} (x_n, u_k) u_k$$

Enfin, pour $k \leqslant n$, $(x_n, u_k) = (x, u_k) =: \xi_k$ car $x - x_n \in F_n^{\perp}$ (par caractérisation du projeté). On a donc bien

$$x = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \xi_k u_k = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k u_k.$$

De même $y = \sum_{k=1}^{\infty} (y, u_k) u_k$.. Alors par continuité du "produit scalaire",

$$(x, y) = (\sum_{k=1}^{\infty} (x, u_k) u_k\ ,\ \sum_{k=1}^{\infty} (y, u_k) u_k) = \sum_{k=1}^{\infty} (x, u_k)\overline{(y, u_k)}.$$

On obtient l'autre égalité lorsque $y = x$. □

Il résulte de ce théorème que S est une isométrie. On a avant cela vu que dans le cadre hilbertien S était une surjection. On peut alors affirmer le théorème suivant.

***S* est un isomorphisme.** Soit H un espace de Hilbert séparable, et soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une base orthonormée de H. Alors l'application linéaire :

$$S : \begin{cases} H \to & l_2(I) \\ x \mapsto & ((x, u_n))_{n\geqslant 1} \end{cases}$$

est un isomorphisme d'espaces de Hilbert, c'est à dire conservant le produit scalaire : $(S(\xi), S(\xi')) = (\xi, \xi')$ pour tous $\xi, \xi' \in l_2$.

C'est en particulier une isométrie $\|S(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in H$. Lorsque H n'est pas complet, on a toujours une isométrie conservant le produit scalaire, mais elle n'est pas surjective. L'isomorphisme réciproque est :

$$S^{-1} : \begin{cases} l_2 \to & H \\ (\xi_n)_{n\geqslant 1} \mapsto & \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n u_n \end{cases}$$

Tous les espaces de Hilbert séparables, de dimension infinie, sont isomorphes entre-eux, et en particulier à l_2.

2. Polynômes orthogonaux

Référence :
- *Analyse numérique et équations différentielles, J.Demailly, p.52*
- *Objectif Agrégation, 2e édition, Beck, Malick, Peyré, p.110*

Fonction poids. Soit I un intervalle borné ou non dans $\mathbb{R}$. On appelle (fonction) poids sur I une fonction $\rho : I \to \mathbb{R}$ mesurable, strictement positive et telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_I |x|^n \rho(x)\, dx < +\infty.$$

Espace de fonctions de carré intégrable. On note $L^2(I,\rho)$ l'espace des fonctions de carré intégrable pour la mesure de densité ρ par rapport à la mesure de Lebesgue, c'est à dire muni du produit scalaire

$$\langle f, g\rangle_\rho = \int_I f(x)\overline{g(x)}\rho(x)\, dx.$$

L'espace $L^2(I,\rho)$ est un espace de Hilbert. Tout polynôme appartient à $L^2(I,\rho)$.

On utilise le théorème de Riesz-Fisher.

Théorème. Il existe une suite de polynômes unitaires $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\deg(p_n) = n$, orthogonaux deux à deux pour le produit scalaire $(\cdot,\cdot)$. Cette suite est unique. La famille des polynômes p_n est appelée la famille des polynômes orthogonaux associée à la fonction poids ρ.

▷ **Preuve.** Elle s'obtient immédiatement en appliquant le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt à la famille $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$. On construit donc $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence. On a nécessairement $P_0 = 1$ car P_0 est unitaire.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons les polynômes p_k construits pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$. La famille $(p_k)_{1\leqslant k\leqslant n-1}$ est une famille de $n-1$ polynômes de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ échelonnée en degré, c'est donc une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Puisque p_n est de degré n et unitaire, on peut le chercher sous la forme

$$p_n(X) = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{k,n} p_k.$$

Pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$,

$$0 = \langle p_n, p_k\rangle = \langle X^n, p_k\rangle + \alpha_k \|p_k\|_2^2$$

Ainsi, on a un seul choix possible à savoir,

$$\alpha_{k,n} = \frac{\langle X^n, p_k\rangle}{\|p_k\|_2^2}$$

□

3. Fonctions analytiques

3.1 Dérivabilité complexe

Référence : *Analyse complexe pour la licence 3, P.Tauvel, p.50.*

Dérivée d'une fonction en un point. Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, $z_0 \in U$, et f une fonction sur U. On dit que f est dérivable en z_0 si la fonction

$$z \in U \setminus \{z_0\} \mapsto \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \in \mathbb{C}$$

a une limite finie quand z tend vers z_0. S'il en est ainsi, cette limite est notée $f'(z_0)$, et est appelée la dérivée de f en z_0.

Les résultats usuels concernant la dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient, se prolongent immédiatement du cas d'une variable réelle au cas d'une variable complexe. De même, si f est dérivable en $z_0 \in \mathbb{C}$, elle est continue en z_0.

Fonction holomorphe. On dit que f est dérivable sur U, ou holomorphe sur U, si elle est dérivable en tout point de U. On peut définir dans ce cas la fonction dérivée f' de f. On note $\mathcal{H}(U)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur U.

En tout point z_0 du disque de convergence, la fonction somme S de la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ est dérivable, et $S'(z_0)$ est égal à la somme de la série de terme général $(n+1)a_{n+1}z_0^n$.

3.2 Définition des fonctions analytiques

Fonction développable en série entière. Soit f une fonction définie dans un voisinage de $z_0 \in \mathbb{C}$. On dit que f est développable en série entière au point z_0 s'il existe une série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$, de rayon de convergence non nul, et un voisinage V de z_0 dans $\mathbb{C}$ tels que, pour tout $z \in V$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Fonction analytique. On dit qu'une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{C}$ est analytique dans U si elle est développable en série entière en tout point de U. On note $\mathcal{A}(U)$ l'ensemble des fonctions analytiques sur U.

La fonction $z \mapsto \frac{1}{z}$ est analytique sur $\mathbb{C}^*$ car si $a \in \mathbb{C}^*$ et $|z - a| < |a|$, on a

$$\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^{n=1}} (z-a)^n.$$

$\mathcal{A}(U)$ est une $\mathbb{C}$-algèbre contenant la $\mathbb{C}$-algèbre des fonctions polynômes sur $\mathbb{C}$. Une fonction analytique sur U est indéfiniment dérivable sur U et ses dérivées sont analytiques.

Si une série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ a pour rayon de convergence $R > 0$, sa somme f est analytique sur le disque ouvert $D(0, R)$.

▷ **Preuve.** Soient $z_0 \in D(0,R)$ et $r_0 = |z_0|$. On prouve que :

$$|z - z_0| < R - r_0 \implies f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(z_0)(z - z_0)^k.$$

Pour cela on pose pour $p \in \mathbb{N}$, S_p la série partielle et on utilise que $f^{(k)}(z_0) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n z_0^{n-k}$. On obtient alors

$$S_p = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} \left(\sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n z_0^{n-k} \right) (z - z_0)^k.$$

Écrivons $S_p = S'_p + S''_p$ avec

$$S'_p = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} \left(\sum_{n=k}^{p} \frac{n!}{(n-k)!} a_n z_0^{n-k} \right) (z - z_0)^k,$$

$$S''_p = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} \left(\sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n z_0^{n-k} \right) (z - z_0)^k.$$

On montre en ré-indiçant la double somme que $S_p = \sum_{n=0}^{p} a_n z^n$, et puisque $|z| < R$, $\lim_{p\to\infty} S'_p = f(z)$.
Par ailleurs en majorant grossièrement S''_p au moyen de $|z - z_0| < r - r_0$, on montre que $|S''_p| \leqslant \sum_{n=p+1}^{\infty} |a_n| r^n$. Comme $r < R$ on a $\lim_{p\to\infty} S''_p = 0$.

On a obtenu le résultat. □

3.3 Principe du prolongement analytique

Principe du prolongement analytique. Soient U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, $a \in U$, et $f \in \mathcal{A}(U)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. f est identiquement nulle dans U.
2. f est identiquement nulle dans un voisinage de a.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f^{(n)}(a) = 0$.

▻ **Preuve.** Les implications 1. $\Longrightarrow$ 2. $\Longrightarrow$ 3. sont claires.
3. $\Longrightarrow$ 2. Immédiat, en effet puisque f est analytique sur U et que $a \in U$, il existe un voisinage V de a dans U telle que pour tout $z \in V$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z - a)^n.$$

2. $\Longrightarrow$ 1. Notons

$$V := \{z \in U \,;\, f \text{ est identiquement nulle dans un voisinage de } z\}.$$

Par construction V est un ouvert de U et par hypothèse V est non vide. Montrons qu'il est fermé. Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de V convergeant vers $b \in U$. Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n \in V$, pour tout $k, n \in \mathbb{N}$, $f^{(k)}(z_n) = 0$. Par continuité des $f^{(k)}$, il vient $f^{(k)}(b) = 0$, on en déduit que f est nulle dans un voisinage de b i.e. $b \in V$. On a prouvé que V est non vide, ouvert et fermé dans U. Comme U est connexe, il vient $U = V$. D'où 1. □

Corollaire. Soient U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f, g \in \mathcal{A}(U)$. Si f et g coïncident au voisinage d'un point de U, on a $f = g$.

4. Remarques sur le théorème

Lorsque l'intervalle I est borné, d'autres arguments assurent que les polynômes forment toujours un sous-espace vectoriel dense de $L^2(I, \rho)$: le théorème de Stone-Weierstrass et la continuité de l'inclusion de $\mathcal{C}(I)$ dans $L^2(I, \rho)$.

Une condition supplémentaire à savoir la décroissance exponentielle est effectivement nécessaire pour obtenir une base hilbertienne.

Référence : *Objéctif Agrégation, BMP, p.141 q.d).*

On considère sur $I =]0, +\infty[$, la fonction de poids

$$w(x) = x^{-\ln(x)}.$$

Les polynômes orthogonaux pour le poids w ne forment pas une base hilbertienne de $L^2(I, w)$.