

Entraînement et révisions

Exercice 1 (~ 4 points, 15min). On munit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$ et on considère l'application $L : f \in E \mapsto L(f) \in E$ définie pour tout $t \in [0, 1]$, par

$$L(f)(t) = \int_0^1 (t+s)f(s)ds$$

1. Montrer que L est bien définie et continue.
2. Sa norme subordonnée est-elle atteinte?

Exercice 2 (~ 5 points, 15min). Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y) = (\cos(x)e^y, \sin(x)e^y, xy)$

1. Justifier brièvement que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
2. Soit $z_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$. Rappeler les définitions de $\frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$ et $D_v f(z_0)$ puis rappeler les liens entre la différentielle de f et ses dérivées partielles d'une part puis entre la différentielle de f et ses dérivées directionnelles d'autre part.
3. Donner l'expression explicite des dérivées partielles de f et en déduire l'expression de sa différentielle df_{z_0} et de sa Jacobienne $Jac_{z_0}(f)$.

Exercice 3 (~ 4 points, 15min). Étudier l'existence en $(0, 0)$ des dérivées partielles et de la différentielle de la fonction suivante:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 4 (~ 7 points, 40min). Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme $\|\cdot\|_\infty$. Soit F un espace de Banach et $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow F$ une application de classe $\mathcal{C}^2$. On définit $T : E \rightarrow F$ par

$$\forall f \in E, \quad T(f) := \int_0^1 \varphi(f(t)) dt.$$

1. Montrer que T est bien définie et continue.
2. Montrer que T est différentiable et que sa différentielle en tout point $f \in E$ est donnée par

$$\forall h \in E, \quad dT_f(h) = \int_0^1 h(t) \varphi'(f(t)) dt.$$

(on pourra utiliser une formule de Taylor en justifiant sa validité). Est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?

3. Expliciter les formules obtenues pour $T(f)$ et $dT_f(h)$ lorsque

$$\varphi(x) = 2x^2 - x \quad \text{et} \quad F = \mathbb{R}.$$