

Exercice 1. On munit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$ et on considère l'application $L : f \in E \mapsto L(f) \in E$ définie pour tout $t \in [0, 1]$, par

$$L(f)(t) = \int_0^1 (t+s)f(s)ds$$

1. Montrer que L est bien définie et continue.
2. Sa norme subordonnée est-elle atteinte?

Résolution:

1. Pour tout $f \in E$,

$$|L(f)(t) - L(f)(t')| = \left| \int_0^1 ((t+s) - (t'+s))f(s) ds \right| \leq \|f\|_\infty |t - t'|$$

donc $L(f)$ est Lipschitzienne et en particulier est continue, donc L définit bien une application de E dans E . Montrons que L elle est continue. La linéarité de L est une conséquence de la linéarité de l'intégrale. On a pour $f \in E$

$$\begin{aligned} \|L(f)\|_\infty &= \max_{t \in [0, 1]} \left| \int_0^1 (t+s)f(s) ds \right| \leq \|f\|_\infty \max_{t \in [0, 1]} \int_0^1 (t+s) ds \\ &\leq \|f\|_\infty \max_{t \in [0, 1]} \left[ts + \frac{s^2}{2} \right]_0^1 = \|f\|_\infty \max_{t \in [0, 1]} \left(t + \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{2} \|f\|_\infty \end{aligned}$$

L'application linéaire est alors continue et $\|L\| \leq \frac{3}{2}$.

2. Pour $f \equiv 1$, $L(1) = \int_0^1 (t+s) ds = t + \frac{1}{2}$ et $\|L(1)\|_\infty = \frac{3}{2}$. Ainsi la norme de L (qui vaut $3/2$) est atteinte par exemple en $f \equiv 1$.

Exercice 2. Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y) = (\cos(x)e^y, \sin(x)e^y, xy)$

1. Justifier brièvement que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
2. Soit $z_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$. Rappeler les définitions de $\frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$ et $D_v f(z_0)$ puis rappeler les liens entre la différentielle de f et ses dérivées partielles d'une part puis entre la différentielle de f et ses dérivées directionnelles d'autre part.
3. Donner l'expression explicite des dérivées partielles de f et en déduire l'expression de sa Jacobienne $Jac_{z_0}(f)$ et de sa différentielle df_{z_0} .

Résolution:

1. Puisque chaque composante de f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, il en est de même pour f .
2. Pour la dérivée partielle: sa définition est

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t}$$

et on a la formule

$$df_z(h, k) = h \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(z) + k \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(z).$$

Pour la dérivée directionnelle: sa définition est

$$D_v f(z_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + tv_1, y_0 + tv_2) - f(x_0, y_0)}{t}$$

et on a la formule

$$df_z(v) = D_v f(z).$$

3. On a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = (-\sin(x)e^y, \cos(x)e^y, y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = (\cos(x)e^y, \sin(x)e^y, x).$$

Donc la jacobienne devient

$$Jac_{z_0}(f) = \begin{pmatrix} -\sin x_0 e^{y_0} & \cos x_0 e^{y_0} \\ \cos x_0 e^{y_0} & \sin x_0 e^{y_0} \\ y_0 & x_0 \end{pmatrix}$$

et puisque

$$Jac_{z_0}(f) \cdot v = \begin{pmatrix} -\sin x_0 e^{y_0} v_1 + \cos x_0 e^{y_0} v_2 \\ \cos x_0 e^{y_0} v_1 + \sin x_0 e^{y_0} v_2 \\ y_0 v_1 + x_0 v_2 \end{pmatrix},$$

la différentielle s'écrit

$$df_{z_0}(v) = (-\sin x_0 e^{y_0} v_1 + \cos x_0 e^{y_0} v_2, \cos x_0 e^{y_0} v_1 + \sin x_0 e^{y_0} v_2, y_0 v_1 + x_0 v_2).$$

Exercice 3. Étudier l'existence en $(0, 0)$ des dérivées partielles et de la différentielle de la fonction suivante :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Résolution : Pour la dérivée partielle par rapport à x :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^3}{h^2} - 0}{h} = 1.$$

Pour la dérivée partielle par rapport à y :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0.$$

Ainsi les dérivées partielles existent en $(0, 0)$ et le gradient est $(1, 0)$.

Si f était différentiable en $(0, 0)$, sa différentielle serait donnée par

$$df_{(0,0)}(h, k) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \cdot k = h.$$

Il faut vérifier si

$$\lim_{\|(h,k)\| \rightarrow 0} \frac{f(h, k) - f(0, 0) - df_{(0,0)}(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0.$$

Regardons le long de la trajectoire $h = k$:

$$|f(h, h) - f(0, 0) - df_{(0,0)}(h, h)| = \left| \frac{h^3}{2h^2} - h \right| = |h| \left(1 - \frac{1}{2} \right) = \frac{|h|}{2}.$$

Ainsi la limite ci-dessus n'est pas nulle (elle vaut par exemple $\frac{1}{2^{3/2}}$ le long de $h = k$). Par conséquent f n'est pas différentiable en $(0, 0)$.

Exercice 4. Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme $\|\cdot\|_\infty$. Soit F un espace de Banach et $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow F$ une application de classe $\mathcal{C}^2$. On définit $T : E \rightarrow F$ par

$$\forall f \in E, \quad T(f) := \int_0^1 \varphi(f(t)) dt.$$

1. Montrer que T est bien définie pour tout $f \in E$ et qu'elle est continue.

2. Montrer que T est différentiable et que sa différentielle en tout point $f \in E$ est donnée par

$$\forall h \in E, \quad dT_f(h) = \int_0^1 h(t) \varphi'(f(t)) dt.$$

(on pourra utiliser une formule de Taylor en justifiant sa validité). Est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?

3. Expliciter les formules obtenues pour $T(f)$ et $dT_f(h)$ lorsque

$$\varphi(x) = 2x^2 - x \quad \text{et} \quad F = \mathbb{R}.$$

Résolution:

1. Soit $f \in E$. Comme $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow F$ est continue, $\varphi(f) : [0, 1] \rightarrow F$ est une application continue à valeur dans un espace de Banach. Son intégrale sur $[0, 1]$, est donc bien définie et $T(f)$ est bien définie.

Soient $f, h \in E$. Comme ce sont des fonctions continues sur le compact $[0, 1]$, on peut supposer qu'il existe une constante $M > 0$ telle que $\|f\|_\infty \leq M/2$ et $\|h\|_\infty \leq M/2$, ce qui entraîne $\|f + h\|_\infty \leq M$. Comme φ' est continue, il existe $K > 0$ tel que pour tout $x \in [-M, M]$, $\|\varphi'(x)\|_F \leq K$.

Alors,

$$\|T(f+h) - T(f)\|_F = \left\| \int_0^1 (\varphi(f(t)+h(t)) - \varphi(f(t))) dt \right\|_F \leq \int_0^1 \|\varphi(f(t)+h(t)) - \varphi(f(t))\|_F dt.$$

Par l'inégalité des accroissements finis,

$$\|\varphi(f(t)+h(t)) - \varphi(f(t))\|_F \leq \max_{x \in [-M, M]} \|\varphi'(x)\|_F |h(t)|.$$

Ainsi,

$$\|T(f+h) - T(f)\|_F \leq \max_{x \in [-M, M]} \|\varphi'(x)\|_F \|h\|_\infty \leq K \|h\|_\infty.$$

Ce qui prouve que T est localement lipschitzienne, donc continue.

2. Pour tout $h \in E$, la fonction $(\varphi'(f) \times h) : [0, 1] \rightarrow F$ est continue sur $[0, 1]$, donc intégrable sur $[0, 1]$. Ceci légitime l'introduction de l'application linéaire

$$L : (E, \|\cdot\|_\infty) \rightarrow F \quad \text{définie par} \quad L(h) = \int_0^1 \varphi'(f(t))h(t)dt.$$

D'abord, la continuité du candidat: L est continue car, pour tout $h \in E$,

$$\|L(h)\|_F \leq \int_0^1 \|\varphi'(f(t))h(t)\|_F dt = \int_0^1 |h(t)| \|\varphi'(f(t))\|_F dt \leq K \|h\|_\infty.$$

où K est la constante introduite question 1. *Ensuite, la preuve de l'estimation:*

$$\|T(f+h) - T(f) - L(h)\|_F = o_{\|h\|_\infty \rightarrow 0}(\|h\|_\infty).$$

On reprend la constante M de la question 1. La fonction φ'' est continue sur le compact $[-M, M]$ donc il existe une constante C telle que $\sup_{x \in [-M, M]} \|\varphi''(x)\|_F \leq C$. Pour tout $t \in [0, 1]$, l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à φ à l'ordre 2 entre $f(t) + h(t)$ et $f(t)$ (φ est de classe $\mathcal{C}^2$) donne

$$\begin{aligned} \|\varphi(f(t)+h(t)) - \varphi(f(t)) - \varphi'(f(t))h(t)\|_F &\leq \frac{1}{2}|h(t)|^2 \sup_{x \in [f(t), f(t)+h(t)]} \|\varphi''(x)\| \\ &\leq \frac{1}{2}|h(t)|^2 \sup_{x \in [-M, M]} \|\varphi''(x)\| \\ &\leq \frac{C}{2}\|h\|_\infty^2. \end{aligned}$$

Donc

$$\|T(f+h) - T(f) - L(h)\|_F \leq \int_0^1 \|\varphi(f(t)+h(t)) - \varphi(f(t)) - \varphi'(f(t))h(t)\|_F dt \leq \frac{C}{2}\|h\|_\infty^2.$$

Regardons maintenant si elle est de classe $\mathcal{C}^1$. Il s'agit de voir que dT est continue en tout point $f \in E$. Soit donc $f \in E$. On définit C comme ci-dessus. Soit $g \in E$. Pour tout $t \in [0, 1]$, l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à φ' à l'ordre 1 entre $f(t)$ et $g(t)$ donne

$$\|\varphi'(f(t)) - \varphi'(g(t))\|_F \leq |f(t) - g(t)| \sup \|\varphi''(x)\|_F \leq C \|f - g\|_\infty.$$

Donc, pour tout $h \in E$,

$$\|dT(f) \cdot h - dT(g) \cdot h\|_F \leq \int_0^1 \|\varphi'(f(t)) - \varphi'(g(t))\|_F |h(t)| dt \leq K \|f - g\|_\infty \|h\|_\infty.$$

Ceci démontre que

$$\|dT(f) - dT(g)\|_{\mathcal{L}(E, \mathbb{R})} \leq C \|f - g\|_\infty,$$

(on rappelle ici que la constante C dépend de f). Ainsi, $dT : E \rightarrow \mathcal{L}_c(E, \mathbb{R})$ est continue au point f . Ceci est vrai pour tout $f \in E$, donc T est de classe C^1 .

3. On a

$$T(f) = \int_0^1 (2f^2(t) - f(t)) dt \quad \text{et} \quad dT(f).h = \int_0^1 4f(t)h(t) - h(t) dt.$$

(Attention aux objets que l'on manipule: le terme $f^2(t)$ signifie $f(t).f(t)$ ou bien $f \circ f(t)$?)