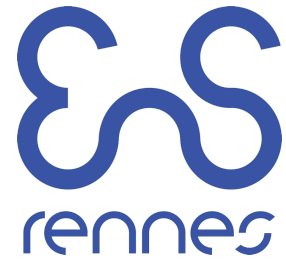




Université
de Rennes



ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE RENNES
UNIVERSITÉ DE RENNES

Mémoire de 2^{ème} année de Master préparation à l'agrégation
Année universitaire 2023-2024

**Approximation d'une fonction par des fonctions régulières.
Exemples d'applications.**

Présenté par : Clara GENES

Sous l'encadrement de : M. Bachir BEKKA

Table des matières

I	Plan de la leçon	2
1	Approximation par des fonctions polynomiales	2
1.1	Approximation locale : formules de Taylor	2
1.2	Approximation globale	4
1.2.1	Densité dans l'espace des fonctions continues	4
1.2.2	Densité dans L^p	6
1.3	Interpolation polynomiale	6
1.3.1	Interpolation de Lagrange	6
1.3.2	Erreur d'approximation	7
2	Convolution et applications	7
2.1	Définitions et approximation de l'unité	7
2.2	Application à la transformation de Fourier	10
3	Approximation de fonctions périodiques	13
3.1	Polynômes trigonométriques et séries de Fourier	13
3.2	Noyaux et théorèmes	14
4	Approximation par des fonctions régulières	17
4.1	Ordres moyens et normaux	17
4.2	Fonctions lisses	21
II	Développements	23
5	Équation de la chaleur	23
6	Ordres moyens de φ et σ	24
7	Approximation par des fonctions lisses	26
III	Questions	27
IV	Bibliographie	28

Première partie

Plan de la leçon

Le problème de l'approximation s'est posé tout d'abord en géométrie pour des fonctions trigonométriques, conduisant à la notion de développement en série entière. Ces approximations ont permis de constituer des tables de fonctions comme celle du logarithme ou de l'exponentielle. Le but était alors d'approcher une fonction par des fonctions définies uniquement à l'aide d'opérateurs de base d'un ordinateur pour créer une bibliothèque de fonctions mathématiques.

On peut donner deux cas où l'on voudrait approcher une fonction par des fonctions régulières. Premièrement, si la fonction f à approcher est connue, on cherche à la remplacer par des fonctions plus régulières ayant de meilleures propriétés pour pouvoir par exemple montrer des résultats en raisonnant sur ces fonctions plus simple et en déduire des résultats plus généraux par argument de densité. Deuxièmement, lorsque la fonction f n'est pas connue explicitement mais est donnée comme la solution d'équations, on cherche à construire une suite de problèmes plus simples que l'on sait résoudre tels que la suite des solutions converge vers la solution f du problème initial. Ainsi f pourra être calculée ou alors on pourra montrer son existence et en trouver quelques propriétés.

La théorie de l'approximation trouve son utilité dans beaucoup de notions différentes des mathématiques. On parlera notamment d'ordres moyens, de développements limités, d'interpolation, d'intégration numérique, de produits de convolution, de transformée de Fourier, de polynômes de Bernstein, etc. On énoncera également des théorèmes phares utilisant ou illustrant des techniques d'approximation comme le théorème de Weierstrass, de Stone-Weierstrass et de Féjer.

Dans toute la leçon, sauf mention contraire, a, b désignent des réels tels qu'on ait $a < b$. Et on supposera que les notations de Landau o, O et la notion d'équivalent seront connues du lecteur.

1 Approximation par des fonctions polynomiales

Les fonctions les plus faciles à évaluer numériquement sont les fonctions polynômes. Il est donc important de savoir approximer une fonction arbitraire par des polynômes.¹

1.1 Approximation locale : formules de Taylor

Lorsque qu'une fonction est plusieurs fois dérivable au voisinage d'un point, elle peut être approchée par une fonction polynomiale. Cette fonction est parfois appelée *polynôme de Taylor*.

Théorème 1. (*Formule de Taylor-Lagrange*) Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$ sur ce segment et $(n + 1)$ -fois dérivable sur $]a, b[$, il existe alors un réel $c \in]a, b[$ tel que :

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}.$$

Démonstration. C'est une conséquence du théorème de Rolle. □

1. Voir Rombaldi (2019) et Demailly (2016).

Remarque 2. Dans le cas $a = 0$, on appelle cette formule la formule de Mac-Laurin et pour $n = 0$ on retrouve le théorème des accroissements finis.

Exemple 3. Pour tout $x \geq 0$, on a

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

Corollaire 4. (Inégalité de Taylor-Lagrange) Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $f : [a, b] \rightarrow E$ de classe $\mathcal{C}^n$ sur ce segment et $(n+1)$ -fois dérivable sur $]a, b[$ avec $f^{(n+1)}$ majorée par une constante M , alors on a

$$\left\| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k \right\| \leq \frac{M}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}.$$

Démonstration. Si $E = \mathbb{R}$, c'est une conséquence du théorème précédent. Sinon, on utilise le théorème des accroissements finis. $\square$

Parfois, on peut obtenir des résultats plus fins que la formule de Taylor-Lagrange grâce à la formule suivante, nécessitant une hypothèse supplémentaire de continuité de la dernière dérivée et étant valable pour les fonctions à valeurs dans un espace de Banach.

Théorème 5. (Formule de Taylor avec reste intégral) Soient $n \in \mathbb{N}$, $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach et $f : [a, b] \rightarrow E$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur ce segment, alors on a

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (b-t)^n dt.$$

Démonstration. Le théorème se montre par récurrence sur n en utilisant pour l'hérédité une intégration par partie. $\square$

Remarque 6. Cette formule permet de retrouver l'inégalité de Taylor-Lagrange pour f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ et à valeurs dans un espace de Banach.

Remarque 7. On peut généraliser la formule de Taylor avec reste intégral pour des fonctions de plusieurs variables $(n+1)$ -fois différentiables.

Application 8. (lemme d'Hadamard) Soient $k \in \mathbb{N}$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que pour tout $0 \leq i \leq k$ on ait

$$f^{(i)}(0) = 0,$$

alors il existe $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = x^k g(x).$$

Une des applications les plus remarquables de la formule de Taylor-Lagrange pour les fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles est la notion de développement limité.

Théorème 9. (Formule de Taylor-Young) Soient f une fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle I et $a \in I$. Si f est dérivable en a à l'ordre $n \geq 1$, alors elle admet au voisinage de a , le développement limité d'ordre n :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^n).$$

Démonstration. On montre par récurrence sur n que $\lim_{x \rightarrow a} g(x)/(x-a)^n = 0$ où $g(x)$ est définie comme la différence de $f(x)$ et de la somme. $\square$

Exemple 10. On peut alors écrire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, au voisinage de 0 :

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n), \quad \cos(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}),$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=0}^n \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)x^k}{k!} + o(x^n).$$

Remarque 11. Les applications des formules de Taylor sont innombrables. Par exemple, on retrouve leurs utilités dans la recherche de la différentielle d'une fonction, dans la recherche d'extremum local ou encore dans les développements en séries entières. Voici un exemple de ces applications.

Proposition 12. Soit f une fonction à valeurs réelles de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -a, a[$. Si, pour tout $x \in] -a, a[$ et $n \in \mathbb{N}$, on a $f^{(2n)}(x) \geq 0$, alors f est développable en série entière sur son domaine de définition, i.e. y est analytique.

Exemple 13. On peut alors écrire la fonction exponentielle comme la limite de la somme partielle de l'exemple 10.

1.2 Approximation globale

1.2.1 Densité dans l'espace des fonctions continues

On a vu des théorèmes d'approximation locale. Maintenant, on va voir des résultats permettant d'approcher des fonctions continues en les considérant comme limites uniformes de fonctions polynomiales.

Définition 14. Soient $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}$. Le n -ième polynôme de Bernstein en k est le polynôme

$$B_k^n(x) := \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \in \mathbb{R}[X].$$

Soit en plus $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue. Le n -ième polynôme de Bernstein associé à f est le polynôme

$$P_n(f)(X) := \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) B_k^n(X) \in \mathbb{C}[X].$$

Théorème 15. (Weierstrass) Toute fonction continue $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ est limite uniforme sur $[a, b]$ d'une suite de fonctions polynômes.

Remarque 16. Deux démonstrations existent. L'originale se fait via la convolution (88) mais ne donne pas la suite de polynômes : assure seulement son existence. Une deuxième démonstration constructive et donc quantitative existe et c'est celle dont on donne les grandes lignes.

Démonstration. On peut tout d'abord remarquer que le théorème pour a, b quelconque équivaut à celui pour c, d fixés puisqu'il existe un homéomorphisme polynomial $\Phi : [a, b] \rightarrow [c, d]$ par exemple $\Phi : x \mapsto c + (x - a)(d - c)/(b - a)$. Et ainsi en approchant $g = f \circ \Phi^{-1}$ par une suite de polynômes g_n on pourra approcher f par la suite $f_n := g_n \circ \Phi$.

On peut alors montrer le théorème de Weierstrass sur $[0, 1]$ en prouvant que l'on peut prendre $P_n(f)(X)$ (ceci en utilisant la théorie des probabilités et le théorème de Heine : toute fonction continue sur un compact y est uniformément continue). On peut également montrer que la vitesse de convergence est en $O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. $\square$

Remarque 17. Ce théorème peut aussi se réformuler de la façon suivante : $\mathbb{C}[X]$ est dense dans $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{C}, \|\cdot\|_\infty)$.

Remarque 18. Il permet entre autre de prouver des résultats sur les fonctions continues en les montrant pour des fonctions polynômes et en concluant par un argument de densité.

Contre-exemple 19. Il est nécessaire que l'intervalle de définition soit fermé. En effet, sur $\mathbb{R}$, toute limite uniforme de fonctions polynômes est encore une fonction polynôme.

Application 20. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ continue telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 f(t)t^n dt = 0$. Alors f est nulle.

Il existe un résultat généralisant le théorème d'approximation de Weierstrass. Avant de l'énoncer, donnons deux définitions d'algèbre.

Définition 21. Soit (X, d) un espace métrique compact non vide et A une sous-algèbre de l'algèbre de Banach $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$.

On dit que A *sépare les points* de X si pour tout $(x, y) \in X^2$ tels que $x \neq y$ il existe $f \in A$, $f(x) \neq f(y)$.

On dit que A est *auto-conjuguée* si pour tout $f \in A$, on a $\bar{f} \in A$.

On peut maintenant énoncer le théorème de Stone-Weierstrass qui sera admis.

Théorème 22. (Stone-Weierstrass) Soient (X, d) un espace compact et $\mathcal{C}(X, \mathbb{K})$ l'algèbre de Banach des fonctions continues de X dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Une sous-algèbre de $\mathcal{C}(X, \mathbb{K})$ séparente, auto-conjuguée et unitaire est dense dans $\mathcal{C}(X, \mathbb{K})$.

Exemple 23. On retrouve alors le théorème de Weierstrass, la densité des fonction lipschitziennes de X dans $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$ et la densité des fonctions polynomiales sur X à coefficients complexes en les variables $z, \bar{z}$ dans $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$.

1.2.2 Densité dans L^p

Nous avons le premier résultat suivant. D'autres résultats seront vus section 2 utilisant la théorie de Fourier.

Théorème 24. *L'espace vectoriel $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions continues à support compact sur $\mathbb{R}$ est dense dans $L^p(\mathbb{R})$ pour $1 \leq p < +\infty$.*

Démonstration. On remarque tout d'abord que l'ensemble des fonctions étagées à support compact est dense dans L^p_c (ensemble des fonctions de L^p à support compact). En effet, en prenant tout d'abord une fonction f mesurable positive et en utilisant la définition de l'intégrale de Lebesgue, on a un supremum pris sur les fonctions à support compact. Ainsi, on peut approcher f en norme L^1 par une suite de fonctions étagées à support compact et par compacité du support, on peut approcher f en norme L^p . On en déduit le résultat pour $f = f^+ - f^-$. Ensuite, on voit que l'on peut approcher n'importe quelle indicatrice d'intervalle par une fonction continue à support compact (affine par morceaux par exemple). On peut donc approcher n'importe quelle indicatrice d'ouvert de $\mathbb{R}$ (car tout ouvert de $\mathbb{R}$ est une union dénombrable d'intervalles ouverts). Par régularité de la mesure de Lebesgue, on approche donc n'importe quelle indicatrice, et donc n'importe quelle fonction étagée, en norme L^p . D'où $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est dense dans $L^p(\mathbb{R})$. $\square$

Contre-exemple 25. Pour $p = +\infty$, la fonction constante égale à 1 est un contre-exemple.

Application 26. Pour $1 \leq p < +\infty$, $L^p(\mathbb{R})$ est séparable.

1.3 Interpolation polynomiale

1.3.1 Interpolation de Lagrange

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On se donne $n \in \mathbb{N}$ et $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ des points deux à deux distincts de $[a, b]$.

Théorème 27. *Il existe un unique polynôme $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P_n(x_i) = f(x_i)$ pour tout $0 \leq i \leq n$. Le polynôme P_n est appelé polynôme d'interpolation de Lagrange associé à f et à $(x_i)_i$. On a plus concrètement*

$$P_n = \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i \quad \text{où} \quad L_i(X) = \prod_{j \neq i} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}.$$

Démonstration. L'existence est claire. Pour l'unicité, on raisonne par l'absurde en supposant qu'il en existe un autre, notons-le Q_n . Alors les $(x_i)_i$ sont racines du polynôme $P_n - Q_n$: un polynôme de degré n à $n+1$ racines est nul. $\square$

Application 28. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, alors $P(\mathbb{Q}) \in \mathbb{Q}$ si et seulement si $P \in \mathbb{Q}[X]$.

Remarque 29. En notant

$$\pi_{n+1}(x) := \prod_{j=0}^n (x - x_j),$$

on obtient en particulier $\pi'_{n+1}(x_i) = \prod_{j \neq i} (x_i - x_j)$ et donc

$$L_i = \frac{\pi_{n+1}}{(x - x_i) \pi'_{n+1}(x_i)}.$$

Remarque 30. Pour démontrer le théorème, on peut également poser $P_n = \sum_{j=0}^n a_j x_j$ et résoudre un système linéaire de $n+1$ équations en les inconnues a_j dont le déterminant est un déterminant de Van der Monde en les x_j .

1.3.2 Erreur d'approximation

L'erreur d'interpolation est donnée par la formule théorique suivante.

Théorème 31. *On suppose que f est $n+1$ fois dérivable sur $[a, b]$. Alors pour tout $x \in [a, b]$, il existe un point $\zeta_x \in]\min_{0 \leq i \leq n} (x, x_i), \max_{0 \leq i \leq n} (x, x_i)[$ tel que*

$$f(x) - P_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} \pi_{n+1}(x) f^{(n+1)}(\zeta_x).$$

Démonstration. Si $x = x_i$ tout point ζ_x convient car $\pi_{n+1}(x_i) = 0$. Sinon, on conclut grâce au théorème de Rolle et en interpolant en les $n+1$ points $x, x_0, \dots, x_n$. $\square$

Corollaire 32.

$$\|f - P_n\|_\infty \leq \frac{1}{(n+1)!} \|\pi_{n+1}\|_\infty \|f^{(n+1)}\|_\infty.$$

Remarque 33. Ces formules montrent que la taille de l'erreur d'interpolation dépend à la fois de la quantité $\|f^{(n+1)}\|_\infty$, qui peut être grande si f oscille trop vite, et de la quantité $\|\pi_{n+1}\|_\infty$, qui est liée à la répartition des points x_i dans l'intervalle $[a, b]$.

Application 34. Le phénomène de Runge nous permet de voir que les polynômes d'interpolation ne convergent pas uniformément vers la fonction. Prendre par exemple $f : x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$ sur $[-1, 1]$ avec des points x_j équidistants (i.e. $x_i = x_0 + ih$ où $h = (b-a)/n$).

2 Convolution et applications

Dans cette sous partie, on se placera sur $\mathbb{R}$ mais tout se transcrit (voir Li (2013)) sur $\mathbb{R}^d$ en remplaçant le produit xy par le produit scalaire $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_d y_d$.

2.1 Définitions et approximation de l'unité

La convolution permet de régulariser les fonctions : la convolée de deux fonctions hérite des "bonnes propriétés" de chacune des deux fonctions dont on est partis, elle peut même en avoir de meilleures. Introduisons tout d'abord quelques notations.

Définition 35.

On note $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues bornées sur $\mathbb{R}$, pour $0 \leq k \leq +\infty$.

On note $\mathcal{D}^k(\mathbb{R})$ les fonctions k -fois continûment dérivables sur $\mathbb{R}$ à support compact.

On note $\mathcal{D}^\infty(\mathbb{R})$ les fonctions infiniment continûment dérivables sur $\mathbb{R}$ à support compact.

On note $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ qui tendent vers 0 à l'infini.

Il vient la définition la plus importante de la partie.

Définition 36. Soient $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions. On dit que le *produit de convolution* de f et g en $x \in \mathbb{R}$ existe si la fonction $t \in \mathbb{R} \mapsto f(x-t)g(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ pour la mesure de Lebesgue. On pose alors

$$(f \star g)(x) := \int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t)dt.$$

Remarque 37. On notera que dans l'intégrale x et t sont liés par la relation $x-t+t=x$ et on obtient donc par changement de variable $(f \star g)(x) = (g \star f)(x)$.

Exemple 38. Soient la fonction $f(x) = e^{ax}$ définie sur $\mathbb{R}$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b > 0$. On peut considérer son produit de convolution avec la fonction indicatrice sur le segment $[-b, b]$ car $t \mapsto f(x-t)\mathbb{1}_{[-b, b]}(t)$ est une fonction intégrable pour tout $x \in \mathbb{R}$. On a donc le produit de convolution

$$f \star \mathbb{1}_{[-b, b]}(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{a(x-t)}\mathbb{1}_{[-b, b]}(t)dt = \int_{-b}^b e^{a(x-t)}dt = \frac{e^{ax}}{a} \int_{-ab}^{ab} e^u du = \frac{2 \sinh(ab)}{a} e^{ax}$$

Le résultat suivant est essentiel pour ce qui suivra.

Théorème 39. Soit $1 \leq p < +\infty$ et $f \in L^p(\mathbb{R})$. On pose $f_x(t) := f(t-x)$. Alors l'application

$$\tau_f : x \in \mathbb{R} \mapsto f_x \in L^p(\mathbb{R})$$

est uniformément continue.

Démonstration. On montre d'abord le résultat pour f continue à support compact en utilisant le théorème de Heine. Maintenant, soit $\epsilon > 0$. Pour $f \in L^p(\mathbb{R})$, on choisit g continue à support compact telle que $\|f - g\|_p \leq \epsilon$ (qui existe par le théorème 24) et on conclut par inégalité triangulaire. $\square$

On a le théorème de régularisation suivant.

Théorème 40. Soient $1 < p < \infty$ et q tel que $1/p + 1/q = 1$, $1 \leq r < +\infty$ et $1 \leq k \leq +\infty$.

- $f \in L^p(\mathbb{R}), g \in L^q(\mathbb{R}) \implies f \star g \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ (la convolution existe partout),
- $f \in L^1(\mathbb{R}), g \in L^\infty(\mathbb{R}) \implies f \star g \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ (la convolution existe partout),
- $f \in L^1(\mathbb{R}), g \in L^1(\mathbb{R}) \implies f \star g \in L^1(\mathbb{R})$ (la convolution existe presque partout),
- $f \in L^r(\mathbb{R}), \varphi \in \mathcal{D}^k(\mathbb{R}) \implies f \star \varphi \in \mathcal{D}^k$ et $(f \star \varphi)^{(h)} = f \star \varphi^{(h)}, 0 \leq h \leq k$.

Démonstration. On a les différents points suivants.

- La continuité vient du théorème 39.
- La continuité vient du théorème 39 et le caractère borné du fait que $|(f \star g)| \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$.
- Résulte du théorème de Fubini.
- Résulte des théorèmes de continuité et dérivabilité sous l'intégrale sur $]x_0 - 1, x_0 + 1[$ pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$.

□

Contre-exemple 41. $f \in L^\infty(\mathbb{R}), g \in L^1(\mathbb{R}) \not\Rightarrow f \star g \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ puisque en prenant $f = \mathbb{1}_{\mathbb{R}}$ et $g \in L^1(\mathbb{R})$ on a $f \star g$ constante.

Exemple 42. Calculons par exemple la convolution de deux fonctions indicatrices pour observer sa convolution. Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\mathbb{1}_{[0,1]} \star \mathbb{1}_{[0,1]}(x) &= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[0,1]}(t) \mathbb{1}_{[0,1]}(x-t) dt = \int_0^1 \mathbb{1}_{[0,1]}(x-t) dt \\ &= \int_{x-1}^x \mathbb{1}_{[0,1]}(u) du = \lambda([x-1, x] \cap [0, 1]).\end{aligned}$$

Puisque $[x-1, x] \cap [0, 1]$ est vide pour $x < 0$ et $x > 2$ et est égal à $[0, x]$ si $0 \leq x \leq 1$ ou à $[x-1, 1]$ pour $1 \leq x \leq 2$, on a finalement l'égalité suivante.

$$\mathbb{1}_{[0,1]} \star \mathbb{1}_{[0,1]}(x) = x \mathbb{1}_{[0,1]}(x) + (2-x) \mathbb{1}_{[1,2]}(x).$$

On voit bien que cette fonction est continue (affine en deux morceaux recollés continûment en 1).

On verra en remarque 53 que l'algèbre $L^1(\mathbb{R})$ n'a pas d'élément unité pour la convolution. Il existe toutefois la notion d'approximation de l'unité, supplant à ce manque.

Définition 43. Soit $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (L^1(\mathbb{R}))^{\mathbb{N}}$ telle que

- $\forall n \in \mathbb{N}, \rho_n \geq 0$ et $\int_{\mathbb{R}} \rho_n = 1$,
 - $\forall n \in \mathbb{N}, \forall \alpha > 1, \int_{|x| > \alpha} \rho_n(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
- Alors ρ_n est appelée approximation de l'unité

Exemple 44. Les fonctions $p_n(x) = \sqrt{\frac{n}{2\pi}} e^{-nx^2/2}$ définissent une approximation de l'unité.

On en vient au théorème phare de cette sous-partie.

Théorème 45. Soit $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une approximation de l'unité et $1 \leq r < +\infty$

- Si $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$, alors $\rho_n \star f$ converge point par point vers f .
- Si $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ est uniformément continue, alors $\rho_n \star f$ converge uniformément vers f .
- Si $f \in L^r(\mathbb{R})$, alors $\rho_n \star f \in L^r(\mathbb{R})$ et converge pour la norme de $L^r(\mathbb{R})$ vers f .

Démonstration. • On considère $(f \star \rho_n)(x) - f(x)$ et on montre que cette fonction tend (uniformément en x) vers 0 en utilisant l'inégalité triangulaire, la fonction de translation et les propriétés d'une approximation de l'unité.

- Grâce à l'inégalité de Minkowski pour la mesure $|\rho_n(y)| dy$, on se ramène à une démonstration identique au premier point

□

Théorème 46. Pour $1 \leq r < +\infty$, $\mathcal{D}^\infty(\mathbb{R})$ est dense dans $L^r(\mathbb{R})$.

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$ et $f \in L^r(\mathbb{R})$. Il existe φ continue à support compact (24) telle que $\|f - \varphi\|_r \leq \epsilon/2$. Comme $\varphi \in L^r(\mathbb{R})$, on utilise une approximation de l'unité et le dernier point du théorème 40 pour voir que $\varphi \star \rho_n$ est indéfiniment dérivable à support compact. On conclut par inégalité triangulaire et par le théorème précédent. $\square$

Remarque 47. Le résultat est faux pour $r = +\infty$.

2.2 Application à la transformation de Fourier

Définition 48.

On appelle *transformée de Fourier* de $f \in L^1(\mathbb{R})$ la fonction $\mathcal{F}f = \hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$\hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x y} dx, \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

La *transformation de Fourier* sur $L^1(\mathbb{R})$ est l'application linéaire $\mathcal{F} : f \in L^1(\mathbb{R}) \mapsto \hat{f}$.

Exemple 49. Soient $f : x \mapsto e^{-ax} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}$ avec $a > 0$ et $g : x \mapsto \mathbb{1}_{[-b,b]}$ avec $b > 0$. Ces deux fonctions sont intégrables et on peut considérer leur transformée de Fourier. Pour tout $y \in \mathbb{R}$ on a les égalités suivantes.

$$\begin{aligned} \hat{f}(y) &= \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x y} dx = \int_0^{+\infty} e^{-ax} e^{-2\pi i x y} dx = \int_0^{+\infty} e^{-x(a+2i\pi y)} dx = \frac{1}{a+2i\pi y} \\ \hat{g}(y) &= \int_{\mathbb{R}} g(x) e^{-2\pi i x y} dx = \int_{-b}^b e^{-2\pi i x y} dx = \frac{\sin(2\pi b y)}{\pi y} = 2b \operatorname{sinc}(2\pi b y). \end{aligned}$$

On rappelle que tous les résultats sont encore vrais et se montrent de manière similaire en dimension supérieure.

Théorème 50. On a :

$$f \in L^1(\mathbb{R}) \implies \hat{f} \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}).$$

Remarque 51. Il s'agit de l'analogue du lemme de Riemann-Lebesgue 76 pour les séries de Fourier.

Proposition 52. Pour toutes fonctions $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, on a :

$$\widehat{f \star g} = \hat{f} \hat{g}.$$

Autrement dit, $\mathcal{F}$ est un homomorphisme d'algèbres. C'est l'un des grands intérêts de la transformation de Fourier. En effet, la convolution régularise les fonctions mais n'est pas facile à calculer. Un passage "du côté Fourier" simplifie souvent.

Remarque 53. La transformation de Fourier montre en particulier que l'algèbre $L^1(\mathbb{R})$ n'a pas d'unité pour la convolution. Il en existe en fait bien une mais elle n'est pas dans $L^1(\mathbb{R})$: le dirac δ_0 en 0.

Corollaire 54. L'application linéaire $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ est continue et de norme 1.

Théorème 55. (Théorème d'inversion)

Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et si $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, alors f est (p.p.) égale à la fonction continue g définie par

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(y) e^{+2\pi i x y} dy.$$

Une conséquence très importante est le théorème suivant.

Théorème 56. La transformée de Fourier $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ est injective.

Démonstration. C'est une conséquence directe du théorème d'inversion car $0 \in L^1(\mathbb{R})$. $\square$

Remarque 57. Le théorème d'isomorphisme de Banach nous assure que cette fonction n'est pas surjective.

Exemple 58. On peut retrouver ainsi les densités de Gauss, de Cauchy et de Poisson de la théorie des probabilités.

Application 59. Le théorème de Stone-Weierstrass 22 nous permet de dire que $\mathcal{F}L^1(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$.

On vient de voir des résultats sur la transformée de Fourier sur $L^1(\mathbb{R})$. Intéressons-nous désormais au cas $L^2(\mathbb{R})$. Tout d'abord, faisons un bref retour sur les fonctions polynômes.

Définition 60. Soit $\rho : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable, strictement positive et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_I |x|^n \rho(x) dx < +\infty$. On dit alors que ρ est une fonction poids. On définit $L^2(I, \rho) = \left\{ f : I \rightarrow \mathbb{C} \text{ mesurable, } \int_I |f(x)|^2 \rho(x) dx < +\infty \right\}$.

Proposition 61. L'espace $L^2(I, \rho)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire $\langle f, g \rangle := \int_I f(x) \overline{g(x)} \rho(x) dx$.

Proposition 62. Il existe une unique famille $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes unitaires deux à deux orthogonaux pour $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et tels que $\deg(P_n) = n$ pour tout n .

Théorème 63. (Polynômes orthogonaux)

Soit ρ une fonction poids telle qu'il existe $\alpha > 0$ un réel vérifiant $\int_I e^{\alpha|x|} \rho(x) dx < +\infty$. Alors la famille des polynômes orthogonaux $(P_n)_n$ est une base hilbertienne de $L^2(I, \rho)$.

Démonstration. La famille $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et est une base orthogonale de $\mathbb{R}[X]$ par le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt sur la famille $f_n : x \mapsto x^n$. Pour voir la densité de $\text{vect}((P_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \text{vect}((f_n)_{n \in \mathbb{N}})$ on utilise la caractérisation de l'orthogonal réduit à l'élément nul. Pour ce faire, on choisit $f \in L^2(I, \rho)$ et on étudie la transformée de Fourier de $\varphi : x \mapsto |f(x)|\rho(x)$. On remarque que $\varphi^{(n)}(0) = (-i)^n \langle f_n, f \rangle = 0$. En utilisant le théorème de prolongement analytique et l'injectivité de la transformée de Fourier sur L^1 , on conclut. $\square$

Application 64. Si I est borné, on a donc nécessairement une base hilbertienne puisque l'intégrale sera finie, les fonctions étant mesurables.

Contre-exemple 65. La condition du théorème est nécessaire. Par exemple, considérer $I = \mathbb{R}^+$, $\rho : x \mapsto x^{-\ln(x)}$ et $f : x \mapsto \sin(2\pi \ln(x))$.

Le théorème suivant permet d'étendre la transformée de Fourier aux fonctions de carré sommable.

Théorème 66. (de Plancherel)

La transformation de Fourier définie sur $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ se prolonge de façon unique en un isomorphisme d'espaces de Hilbert de $L^2(\mathbb{R})$ sur lui même.

Proposition 67. L'ensemble $\{f \in L^1(\mathbb{R}); \hat{f} \in L^1(\mathbb{R})\}$ est dense dans $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ pour la norme $\|\cdot\|_1$ et pour la norme $\|\cdot\|_2$.

Démonstration. L'unicité vient de la densité de $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$. Pour montrer l'existence, on veut montrer que sur $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, on a

$$\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$$

et par densité on aura le prolongement de $\mathcal{F}$ en une isométrie de $L^2(\mathbb{R})$. Or l'ensemble $\{f \in L^1(\mathbb{R}); \hat{f} \in L^1(\mathbb{R})\}$ (tel que la formule d'inversion s'applique) rend la transformée de Fourier isométrique et est complet. D'où le prolongement. $\square$

Remarque 68. Notons que le prolongement de Plancherel, encore noté $\mathcal{F}$, coïncide avec la transformée de Fourier sur $L^1(\mathbb{R})$. C'est un opérateur unitaire sur $L^2(\mathbb{R})$, d'adjoint la co-transformée de Fourier définie par $\overline{\mathcal{F}}u(y) = \mathcal{F}u(-y)$ donnée par la formule d'inversion.

Maintenant il serait légitime de se demander comment exprimer la transformée de Fourier d'une fonction de $L^2(\mathbb{R})$. Comme $\mathcal{F}$ a été défini sur $L^2(\mathbb{R})$ par densité, le calcul de $\mathcal{F}f$ pour $f \in L^2(\mathbb{R})$ doit faire intervenir un passage à la limite. On peut, par exemple, utiliser le résultat suivant.

Proposition 69. Pour $f \in L^2(\mathbb{R})$, en posant

$$\varphi_A(y) := \int_{-A}^A f(x) e^{-2\pi i x y} dx,$$

on a alors :

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \|\varphi_A - \mathcal{F}f\|_2 = 0.$$

Et en posant

$$\psi_A(y) := \int_{-A}^A \mathcal{F}f(x) e^{-2\pi i x y} dx,$$

on a :

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \|\psi_A - f\|_2 = 0.$$

Une conséquence intéressante est le corollaire suivant.

Corollaire 70. Si $f \in L^2(\mathbb{R})$ et $\mathcal{F}f \in L^1(\mathbb{R})$, alors

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}f(y) e^{2\pi ixy} dy$$

pour presque tout $x \in \mathbb{R}$.

3 Approximation de fonctions périodiques

Les fonctions périodiques interviennent fréquemment en physique : pendule simple, etc. Notons que l'étude d'une fonction T -périodique f se ramène à l'étude de la fonction 2π -périodique $g(x) = f\left(\frac{T}{2\pi}x\right)$. On se limite alors aux fonctions 2π -périodiques. On connaît, grâce aux propriétés du nombre π et de l'exponentielle imaginaire de nombreuses fonctions 2π -périodiques : $\cos nx, \sin nx, e^{inx}$ pour $n \in \mathbb{Z}$ et les combinaisons linéaires de celles-ci. Un problème fondamental, motivé par l'étude de l'équation de la chaleur, est de savoir si toute fonction 2π -périodique peut-être reconstituée à l'aide des "briques" $\cos nx, \sin nx, e^{inx}$ et si oui, comment ².

3.1 Polynômes trigonométriques et séries de Fourier

On note $L^p_{2\pi}(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2π -périodique avec $f \in L^p(0, 2\pi)$. On le muni de la norme

$$\|f\|_p := \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

pour $1 \leq p < +\infty$ et de la norme

$$\|f\|_{\infty} := \inf \{M, |f(x)| \leq M, \text{ presque partout} \}$$

pour $p = +\infty$.

Pour $n \in \mathbb{Z}$, on note e_n la fonction de $L^p_{2\pi}$ définie par $e_n(x) := e^{inx}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Définition 71. On appelle polynôme trigonométrique une combinaison linéaire finie des $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$. On appelle série trigonométrique une combinaison linéaire des $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$.

Définition 72. Soient $n \in \mathbb{Z}$ et $f \in L^1_{2\pi}(\mathbb{R})$. On appelle n -ième coefficient de Fourier le complexe

$$c_n(f) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt.$$

On définit la série de Fourier associée à f comme la série $S := \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e_n$.

2. Voir Beck et al. (2005), Demailly (2016), Gourdon (2016).

Théorème 73. *L'espace $L_{2\pi}^p(\mathbb{R})$ est un espace de Banach et $L_{2\pi}^2(\mathbb{R})$ est un espace de Hilbert relativement au produit scalaire $\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} fg$.*

Démonstration. La complétude se montre en prenant une suite de Cauchy, en extrayant une sous-suite telle que la différence de deux termes de la sous-suite soit plus petite qu'une suite sommable. On conclut avec le théorème de convergence monotone et de convergence dominée. $\square$

Définition 74. Le produit de convolution de $f, g \in L_{2\pi}^1(\mathbb{R})$ est

$$f \star g : x \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(x-t)dt.$$

Proposition 75. Soient $f \in L_{2\pi}^1(\mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}$ et $(k, n) \in \mathbb{Z}^2$ alors on a les propositions suivantes.

- $c_n(\bar{f}) = \overline{c_{-n}(f)}$,
- $c_n(\tau_a(f)) = e^{ina}c_n(f)$,
- $c_n(e_k f) = c_{n-k}(f)$,
- $f \star e_n = c_n(f)e_n$,
- Si de plus $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ et est $\mathcal{C}^1$ par morceaux, alors $c_n(f') = inc_n(f)$,

où on a noté τ_a la translation de rapport a .

Lemme 76. (Riemann-Lebesgue) Soit $f \in L_{2\pi}^1(\mathbb{R})$, alors $c_n(f) \xrightarrow{|n| \rightarrow +\infty} 0$.

3.2 Noyaux et théorèmes

Définition 77. Soient $N \in \mathbb{N}$ et $f \in L_{2\pi}^1(\mathbb{R})$. On définit le noyaux de Dirichlet par

$$D_N := \sum_{n=-N}^N e_n,$$

le noyau de Fejér par

$$K_N := \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} D_n,$$

la somme partielle de la série de Fourier par

$$S_N f := \sum_{n=-N}^N c_n(f)e_n,$$

et enfin la somme partielle de Césaro par

$$\sigma_N f := \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} S_N f.$$

Remarque 78. On peut voir la somme partielle de Fourier comme une projection sur $P_N = \text{vect}(e_n; -N \leq n \leq N)$.

Proposition 79. Le noyau de Dirichlet vérifie :

- D_N est pair et $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(t) dt = 1$,
- $D_N(x) = \sin \left[\left(N + \frac{1}{2} \right) x \right] / \sin \left(\frac{x}{2} \right)$,
- $S_N f = D_N \star f$.

Proposition 80. Le noyau de Fejér vérifie :

- $\|K_N\|_1 = 1$ et $\forall \delta > 0, \frac{1}{2\pi} \int_{\delta < |x| < \pi} K_N \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$,
- $K_N(x) = \frac{1}{N} \left(\frac{\sin Nx/2}{\sin x/2} \right)^2 \geq 0$,
- $\sigma_N f = K_N \star f$.

Remarque 81. Le noyau de Fejér est une approximation de l'unité dans $L^1_{2\pi}(\mathbb{R})$.

Remarque 82. Il existe des fonctions continues 2π -périodiques telles que $S_N f$ diverge en 0. Ceci est révélateur des difficultés que l'on peut rencontrer en théorie des séries de Fourier.

On présente maintenant les théorèmes de Fejér et Dirichlet. Le théorème de Fejér sera admis.

Théorème 83. (de Fejér) On a les points suivants.

Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R})$, alors $\forall N \geq 1, \|\sigma_N(f)\|_{\infty} \leq \|f\|_{\infty}$ et $\lim_{N \rightarrow +\infty} \|\sigma_N(f) - f\|_{\infty} = 0$.

- Soit $f \in L^p(\mathbb{R})$, alors $\forall N \geq 1, \|\sigma_N(f)\|_p \leq \|f\|_p$ et $\lim_{N \rightarrow +\infty} \|\sigma_N(f) - f\|_p = 0$ avec $(1 \leq p < +\infty)$.
- Si $f \in L^1_{2\pi}(\mathbb{R})$ admet en un point $x_0 \in \mathbb{R}$ une limite à droite et à gauche, alors

$$\sigma_N(f)(x_0) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \left(f(x_0)^+ + f(x_0)^- \right).$$

Contre-exemple 84. Si $f \in L^{\infty}_{2\pi}$ et $\lim_{N \rightarrow +\infty} \|\sigma_N(f) - f\|_{\infty} = 0$ alors $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ et donc le théorème de Fejér n'est plus vrai sur $L^{\infty}_{2\pi} \setminus \mathcal{C}_{2\pi}$

Application 85. Puisque la somme partielle de Césaro est un polynôme trigonométrique, le théorème précédent implique la densité des polyômes trigonométriques dans l'espace des fonctions continues muni de la norme uniforme et dans l'espace L^p muni de la norme associée. En particulier, on en déduit que la famille $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$

Corollaire 86. Pour $f \in L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$, $f = \sum c_n(f)e_n$ et $\|f\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$.

Application 87. (du corollaire)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Application 88. On peut démontrer le théorème de Weierstrass 15 grâce au théorème de Fejér.

Application 89. La densité des polynômes trigonométriques permet de démontrer l'injectivité de la fonction $\mathcal{F} : f \in L^1_{2\pi}(\mathbb{R}) \mapsto (c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$.

Corollaire 90. Si la série $\sum c_n(f)e_n$ converge normalement, alors sa somme $S : x \mapsto S(x) := \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e_n(x)$ est une fonction de $\mathcal{C}_{2\pi}$ égale presque partout à f .

Démonstration. La continuité de la somme vient de la convergence normale de la série et f et g ont les mêmes coefficients de Fourier donc par continuité de f et par la remarque précédente, elles sont égales point par point. $\square$

Remarque 91. La convergence d'une suite au sens de Césaro est plus faible que la convergence classique : si S_N converge, alors σ_N converge vers la même limite, mais la réciproque est fausse. On a donc besoin d'hypothèses en plus au théorème de Fejér pour avoir la convergence de S_N . Par exemple, on obtient un théorème tout à fait similaire au théorème de Fejér pour S_N si on suppose en plus $f \in L^1_{2\pi}(\mathbb{R})$ telle qu'il existe $M > 0$ telle que $\forall n \in \mathbb{Z}$, $|c_n(f)| \leq M/|n|$.

Théorème 92. (de Dirichlet) Si $f \in L^1_{2\pi}(\mathbb{R})$ admet en un point x_0 une limite à droite et à gauche et si

$$g : h \mapsto \frac{1}{h} [f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - (f(x_0)^+ - f(x_0)^-)]$$

est bornée au voisinage de 0, alors

$$S_N(f)(x_0) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} (f(x_0)^+ + f(x_0)^-).$$

Démonstration. Par translation on peut montrer le théorème en $x_0 = 0$. On a alors

$$\begin{aligned} S_N(f)(0) - \frac{1}{2} (f^+(0) + f^-(0)) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(-t) D_N(t) dt - \frac{1}{2} (f^+(0) + f^-(0)) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} g(t) \frac{t \sin((N + 1/2)t)}{\sin(t/2)} dt. \end{aligned}$$

Il résulte des hypothèses et d'inégalités classiques du sinus que $t \mapsto g(t) \frac{t}{\sin(t/2)}$ est dans $L^1([0, \pi])$ et par le lemme de Riemann-Lebesgue 76 on a le résultat. $\square$

Proposition 93. Si f est continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux, alors $\sum c_n(f)e_n$ converge normalement vers f . En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$S_N(f)(x) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} f(x).$$

On peut à présent étudier le problème à l'origine de la théorie des séries de Fourier.

Application 94. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction $\mathcal{C}_{2\pi}^0 \cap \mathcal{C}_{pm}^1$. L'équation de la chaleur, qui est le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_x u(x, t) = \partial_{xx} u(x, t), & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = f(x) & x \in \mathbb{R}, \\ u \in \mathcal{C}_{2\pi, x}^0(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \mathbb{C}) \cap \mathcal{C}_{2\pi, x}^2(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \mathbb{C}), \end{cases}$$

admet une unique solution. Cette solution est en fait dans $\mathcal{C}_{2\pi, x}^\infty(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Démonstration. Ce résultat est fait en développement 5. □

4 Approximation par des fonctions régulières

4.1 Ordres moyens et normaux

On va ici présenter différentes notions classiques de théorie des nombres³.

Définition 95. Une fonction *arithmétique* est une fonction f de $\mathbb{N}^*$ à valeurs complexes.

Définition 96. Une fonction *multiplicative* est une fonction arithmétique vérifiant :

- $f(1) = 1$,
- pour tous entiers $a, b \geq 1$ premiers entre eux, on a : $f(ab) = f(a)f(b)$.

Remarque 97. Si f est une fonction multiplicative alors $f(n) = \prod_{p^\nu \parallel n} f(p^\nu)$.

Définition 98. Une fonction *additive* est une fonction arithmétique vérifiant :

- $f(1) = 0$,
- pour tous entiers $a, b \geq 1$ premiers entre eux, on a : $f(ab) = f(a) + f(b)$.

Remarque 99. Si f est une fonction additive alors $f(n) = \sum_{p^\nu \parallel n} f(p^\nu)$.

3. Voir Martelli (2023) et Tenenbaum (2022).

Définition 100. Soient f, g deux fonctions arithmétiques. On pose

$$(f + g)(n) = f(n) + g(n),$$

On définit le produit de convolution de deux fonctions arithmétiques comme suit.

$$(f * g)(n) = \sum_{dd'=n} f(d)g(d').$$

Remarque 101. Ces opérations équipent l'ensemble des fonctions arithmétiques d'une structure d'anneau.

Proposition 102. Un élément unité de l'opération de convolution est la fonction arithmétique δ , définie par

$$\delta(n) := \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. Soit f une fonction multiplicative.

On a

$$f * \delta(n) = \sum_{dd'=n} f(d)\delta(d') = f(n)\delta(1) = f(n).$$

Le produit étant commutatif, on a le résultat. □

Définition 103. La fonction de Möbius μ est définie de $\mathbb{N}^*$ sur $\{-1, 0, 1\}$ par :

- $\mu(n) = 0$ si n est divisible par un carré différent de 1,
- $\mu(n) = 1$ si n est le produit d'un nombre pair de nombres premiers distincts,
- $\mu(n) = -1$ si n est le produit d'un nombre impair de nombres premiers distincts.

Proposition 104. La fonction de Möbius est multiplicative.

Proposition 105. L'inverse de la fonction de Möbius pour la convolution est la fonction constante égale à 1.

Démonstration. Calculons $\mu * 1$ à partir de la définition. On a

$$\mu * 1 = \sum_{dd'=n} \mu(d) = \sum_{d|n} \mu(d).$$

Si $n = 1$ alors $\mu * 1(n) = \mu(1) = 1$ et on a le résultat.

Sinon, soit P l'ensemble des facteurs premiers de n et $c = |P| \geq 1$. Les seuls diviseurs de n dont l'image par μ est non nulle sont les produits d'éléments distincts de P .

Or, le nombre de parties de P de cardinal k est $\binom{c}{k}$.
Donc, on obtient, pour $n > 1$,

$$\begin{aligned}\sum_{d|n} \mu(d) &= \sum_{I \subset P} \mu\left(\prod_{p \in I} p\right) \\ &= \sum_{I \subset P} (-1)^{|I|} \\ &= \sum_{k=0}^c (-1)^k |\{I \subset P : |I| = k\}| \\ &= \sum_{k=0}^c \binom{c}{k} (-1)^k = (-1 + 1)^c = 0.\end{aligned}$$

Donc $\mu * 1 = \delta$ et d'où le résultat. $\square$

Nous avons alors la formule d'inversion de Möbius suivante.

Proposition 106. Soient f et g des fonctions arithmétiques. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $g(n) = \sum_{d|n} f(d)$, ($n \geq 1$),
2. $f(n) = \sum_{d|n} g(d) \mu(n/d)$, ($n \geq 1$).

Démonstration. La première condition équivaut à $g = f \star \delta$ et la deuxième équivaut à $f = g \star \mu$. La proposition découle donc de la propriété précédente. $\square$

On va présenter deux façons d'approcher une fonction arithmétique. Tout d'abord introduisons l'ordre normal.

Définition 107. En théorie des nombres, un ensemble A d'entiers naturels est dit de densité naturelle α , $0 \leq \alpha \leq 1$, si on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_n(A)}{n} = \alpha.$$

où $N_n(A) = |A \cap \{1, \dots, n\}|$ et sous réserve d'existence de la limite. Heuristiquement, c'est une façon de mesurer la taille de certains sous-ensembles d'entiers naturels : la densité de A peut-être vue comme une approximation de la probabilité qu'un entier tiré au hasard dans un intervalle arbitrairement grand appartienne à A .

Définition 108. En arithmétique, une propriété $P(n)$ est dite vraie presque partout si l'ensemble A des entiers naturels n tels que $P(n)$ soit vérifiée est de densité naturelle égale à 1, c'est-à-dire

$$\frac{|A \cap \{1, \dots, n\}|}{n} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Définition 109. Soient f, g deux fonctions arithmétiques. On dit que f est *d'ordre normal* g si, pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$(4.1) \quad |f(n) - g(n)| \leq \varepsilon |g(n)|$$

pour tout n d'un ensemble d'entiers de densité unité, c'est-à-dire pour presque tout n .

Puisqu'une fonction f peut avoir plusieurs ordres normaux, il est commode de choisir cet ordre élémentaire et monotone, lorsque cela est possible. En terme de fonctions de répartition, l'existence d'un ordre normal s'interprète comme la convergence vers une loi impropre après une renormalisation adaptée.

Définition 110. La fonction ω de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$ est la fonction qui associe à chaque entier n le nombre de ses facteurs premiers distincts.

Exemple 111. Hardy et Ramanujan ont montré en 1917 que l'ordre normal de $\omega(n)$ est $\ln_2 n$. Autrement dit, "la plupart des entiers" n ont $\ln_2 n$ facteurs premiers distincts.

En théorie des nombres, la quantité qui est la plupart du temps la plus intéressante est la somme des fonctions arithmétiques. On peut alors introduire l'ordre moyen.

Définition 112. On appelle *ordre moyen* d'une fonction arithmétique f toute fonction élémentaire de variable réelle g telle que

$$\sum_{n \leq x} f(n) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \sum_{n \leq x} g(n).$$

Remarque 113. Une fonction donnée peut posséder plusieurs ordres moyens. En général, on cherche une fonction g s'exprimant simplement à l'aide de fonctions élémentaires et ayant un comportement asymptotique facile à déterminer. Bien entendu, lorsque l'on dispose de plusieurs ordres moyens, on retient celui qui minimise le terme d'erreur de l'équivalence.

Définition 114. On appelle *fonction somme des diviseurs* la fonction

$$\sigma(n) = \sum_{d|n} d,$$

et *indicatrice d'Euler* la fonction

$$\varphi(n) = \sum_{\substack{h \leq n \\ \text{pgcd}(h,n)=1}} 1.$$

Proposition 115.

Un ordre moyen de la fonction σ est $x \in \mathbb{N} \mapsto \frac{\pi^2}{6} x$ et $\sum_{n \leq x} \sigma(n) = \frac{\pi^2}{12} x^2 + O(x \ln x)$.

Un ordre moyen de la fonction φ est $x \in \mathbb{N} \mapsto \frac{6x}{\pi^2}$ et $\sum_{n \leq x} \varphi(n) = \frac{3x^2}{\pi^2} + O(x \ln x)$.

Démonstration. Cette proposition est proposée en développement 6. □

4.2 Fonctions lisses

Dans cette sous-partie on se place dans un cadre un peu plus général en étudiant les fonctions d'une variété dans $\mathbb{R}^n$ pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$. On rappelle d'abord les définitions de base.

Définition 116. Une *variété* topologique de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ est un espace topologique M séparé à base dénombrable tel que pour tout point $x \in M$, il existe un voisinage ouvert U_x homéomorphe à la boule unité ouverte B^n .

Exemple 117. Par exemple, des variétés classiques sont $M_n(\mathbb{R})$, $GL_n(\mathbb{R})$, S^n , ...

Remarque 118. Cela revient à demander un recouvrement d'ouverts U_i tel que chaque U_i soit homéomorphe à B^n la boule unité de dimension n .

Définition 119. Un *atlas* sur M est un ensemble d'homéomorphismes, appelés *cartes*, $\{\varphi_i : U_i \rightarrow V_i\}$ où $(U_i)_i$ est un recouvrement ouvert de M et V_i est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. L'atlas sera dit *lisse* si les fonctions de transitions $\varphi_{ij} := \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$. Dans ce cas, on dira que la variété M muni d'un atlas lisse est une *variété lisse*.

Dans le reste de la sous-section, on considère M et N deux variétés lisses de dimension n et m respectivement et $\mathcal{A} = \{\varphi_i\}$ un atlas lisse associé à M .

Nous avons défini les variétés lisses. Nous voulons maintenant définir les bons "morphismes" entre-elles.

Définition 120. Une application $f : U \rightarrow N$ avec U ouvert de M est dite *lisse*, si elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ lorsqu'elle est lue dans les cartes.

Une application $f : S \rightarrow N$ avec $S \subset M$ un ensemble quelconque est dite *lisse*, si elle est localement la restriction de fonctions lisses. C'est à dire, si pour tout $p \in S$ il existe U un voisinage ouvert de x **dans la variété** M et $g : U \rightarrow N$ lisse telle que sur $S \cap U$ on ait $g = f$.

Exemple 121. Une *courbe* est une application lisse $\gamma : I \rightarrow M$ définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$. Ces applications lisses ont un rôle important en géométrie différentielle, notamment lors de la définition de l'espace tangent.

De façon semblable au théorème de Weierstrass 15, on souhaiterait approcher des fonctions continues par des fonctions lisses, qui sont, elles, beaucoup plus maniables et régulières. Pour cela on aura besoin de la notion suivante, similaire à la notion d'approximation de l'unité.

Définition 122. Soit $(U_i)_i$ un recouvrement ouvert de M . Une *partition de l'unité subordonnée* à $\{U_i\}_{i \in I}$ est une famille $\rho_i : M \rightarrow [0, 1]$ de fonctions lisses telle que :

- $\text{Supp}(\rho_i) \subset U_i$ pour tout i ,
- pour tout $x \in M$, il existe V un voisinage ouvert de x tel que tous sauf un nombre fini de ρ_i s'annulent et $\sum_{i \in I} \rho_i(x) = 1$.

On a la propriété agréable suivante.

Proposition 123. Pour tout recouvrement d'ouverts il existe une partition de l'unité.

Et maintenant on peut approcher des fonctions continues grâce aux partitions de l'unité.

Théorème 124. Soit $n \geq 1$ et $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$.

- Si $S \subset M$ est fermé, toute fonction lisse $f : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ est la restriction d'une fonction lisse $F : M \rightarrow \mathbb{R}^n$, i.e. $F = f$ sur S .
- Soit $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue telle qu'il existe un fermé $S \subset M$ où f se restreint à une fonction lisse. Alors $\forall \varepsilon : M \rightarrow \mathbb{R}^+$ continue positive, $\exists g : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ lisse telle que $f|_S = g|_S$ et $\|f(x) - g(x)\| \leq \varepsilon(x), \forall x \in M$.

Démonstration. Ce théorème est proposé en développement 7. □

Remarque 125. On remarque une similarité avec le théorème de Weierstrass 15 : la fonction f est définie sur un ensemble fermé.

Application 126. Soit $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue avec M de dimension m et $n \geq 2m$. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une immersion (application lisse de différentielle injective) $F : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que $\|F(p) - f(p)\| < \varepsilon$ pour tout $p \in M$.

Application 127. Soit $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ une immersion avec M de dimension m et $n \geq 2m + 1$. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une immersion injective $F : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que $\|F(p) - f(p)\| < \varepsilon$ pour tout $p \in M$.

Théorème 128. (*Plongement de Whitney*)

Pour toute variété M de dimension m , il existe un plongement (i.e. une immersion qui soit un homéomorphisme sur son image) propre de M dans $\mathbb{R}^{2m+1}$.

Démonstration. En définissant une fonction propre bien choisie, on sait qu'on peut la perturber en une immersion injective qui restera propre et donc en un plongement. □

Application 129. Ceci implique que lors de l'étude de certaines variétés lisses, on peut sans perte de généralité n'étudier que les sous-variétés de $\mathbb{R}^n$ pour un entier n large.

Deuxième partie

Développements

5 Équation de la chaleur

Application 130. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction telle que $f \in \mathcal{C}_{2\pi}^0 \cap \mathcal{C}_{pm}^1$. L'équation de la chaleur, qui est le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_x u(x, t) = \partial_{xx} u(x, t), & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = f(x) & x \in \mathbb{R}, \\ u \in \mathcal{C}_{2\pi, x}^0(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \mathbb{C}) \cap \mathcal{C}_{2\pi, x}^2(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \mathbb{C}), \end{cases}$$

admet une unique solution. Cette solution est en fait dans $\mathcal{C}_{2\pi, x}^\infty(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Démonstration. ⁴ On procède par analyse-synthèse.

Étape 1 : Analyse et unicité. Supposons l'existence de u . Pour tout $t > 0$, $u(t, \cdot) \in \mathcal{C}^1$ donc, par la proposition 93, $u(t, \cdot)$ est somme de sa série de Fourier. On note pour $t > 0$ et $n \in \mathbb{Z}$,

$$c_n(t) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(t, x) e^{-inx} dx.$$

On a alors, pour tout $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}$, $u(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(t) e^{inx}$. Or, le théorème de dérivation sous le signe intégral nous permet de dire que les fonctions c_n sont de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*)$ et par double intégration par partie et puisque u est solution de l'équation de la chaleur, on a en particulier $c'_n(t) = -n^2 c_n(t)$. D'où $c_n(t) = C_n e^{-n^2 t}$, $C_n \in \mathbb{C}$.

Le théorème de continuité sous le signe intégral couplé au fait qu'en 0, $u(0, \cdot) = f$ donnent $C_n = c_n(f)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Ainsi,

$$(5.1) \quad u(t, x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } t = 0 \\ \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx - n^2 t} & \text{sinon.} \end{cases}$$

D'où l'analyse et l'unicité.

Étape 2 : existence sans continuité en 0. On définit u par 5.1. Les théorèmes de dérivation et de continuité sous le signe somme nous donne que u est dans $\mathcal{C}_{2\pi, x}^\infty(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \mathbb{C})$ et vérifie l'équation de la chaleur. De plus, $u(0, x) = f(x)$ par définition. Finalement, puisque $x \mapsto e^{ixn}$ est 2π -périodique pour tout $n \in \mathbb{Z}$, u l'est également.

Étape 3 : continuité en 0. Puisque $f \in \mathcal{C}_{pm}^1$, alors $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)| < +\infty$ et avec 5.1 on obtient la convergence normale de u sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ avec $u(0, x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

D'où $u \in \mathcal{C}_{2\pi, x}^0(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \mathbb{C}) \cap \mathcal{C}_{2\pi, x}^\infty(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \mathbb{C})$. □

4. Preuve par Francinou et al. (2012) et Queffélec and Zuily (2013).

6 Ordres moyens de φ et σ

Proposition 131.

Un ordre moyen de la fonction σ est $x \in \mathbb{N} \mapsto \frac{\pi^2}{6}x$ et $\sum_{n \leq x} \sigma(n) = \frac{\pi^2}{12}x^2 + O(x \ln x)$.

Un ordre moyen de la fonction φ est $x \in \mathbb{N} \mapsto \frac{6x}{\pi^2}$ et $\sum_{n \leq x} \varphi(n) = \frac{3x^2}{\pi^2} + O(x \ln x)$.

Démonstration. ⁵ Commençons par la fonction somme des diviseurs. Soit $x \geq 1$. On note e_x la partie entière inférieure de x et $\{x\}$ sa partie fractionnaire.

$$\sum_{n \leq x} \sigma(n) = \sum_{n=1}^{e_x} \sum_{d|n} d = \sum_{\substack{1 \leq m, d \leq e_x \\ md \leq x}} d = \sum_{m=1}^{e_x} \sum_{d=1}^{e_{x/m}} d = \sum_{m=1}^{e_x} \frac{e_{x/m}(e_{x/m} + 1)}{2}.$$

Or $e_{x/m} = \frac{x}{m} - \left\{ \frac{x}{m} \right\}$ donc $e_{x/m}(e_{x/m} + 1) = \left(\frac{x}{m} \right)^2 + \frac{x}{m}O(1) + O(1)$ uniformément par rapport à x . D'où

$$\sum_{n \leq x} \sigma(n) = \frac{1}{2} \left[x^2 \sum_{m=1}^{e_x} \frac{1}{m^2} + xO(1) \sum_{m=1}^{e_x} \frac{1}{m} + O(1) \sum_{m=1}^{e_x} 1 \right].$$

Regardons chaque somme l'une après l'autre.

$$\frac{1}{2}O(1) \sum_{m=1}^{e_x} 1 = O(x).$$

De plus, par comparaison série-intégrale et par l'application 87, on a

$$\sum_{m=1}^{e_x} \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6} + O\left(\frac{1}{x}\right).$$

D'où

$$\frac{x^2}{2} \sum_{m=1}^{e_x} \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2 x^2}{12} + O(x).$$

De même, on a

$$\sum_{m=1}^{e_x} \frac{1}{m} = \ln(x) + O(1),$$

donc

$$\frac{x}{2}O(1) \sum_{m=1}^{e_x} \frac{1}{m} = O(x) + O(x \ln x).$$

Ainsi,

$$\sum_{n \leq x} \sigma(n) = \frac{x^2 \pi^2}{12} + O(x \ln x).$$

De plus,

$$\sum_{n \leq x} \frac{n \pi^2}{6} \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \frac{x^2 \pi^2}{12}.$$

D'où l'ordre moyen.

5. Preuve par Tenenbaum (2022).

Pour l'indicatrice d'Euler, le raisonnement est globalement le même. On note tout d'abord que, par la formule d'inversion de Möbius 106 et puisque $n = \sum_{d|n} \varphi(n)$, alors $\varphi(n) = \sum_{md=n} m\mu(d)$. Ainsi

$$\sum_{n \leq x} \varphi(n) = \sum_{\substack{1 \leq m, d \leq e_x \\ md \leq x}} m\mu(d) = \sum_{d=1}^{e_x} \sum_{m=1}^{e_x/d} m\mu(d) = \sum_{d=1}^{e_x} \mu(d) \frac{e_x/d(e_x/d - 1)}{2}.$$

On a alors

$$\sum_{n \leq x} \varphi(n) = \frac{1}{2} \left[x^2 \sum_{d=1}^{e_x} \mu(d) \frac{1}{d^2} + xO(1) \sum_{d=1}^{e_x} \mu(d) \frac{1}{d} + O(1) \sum_{d=1}^{e_x} \mu(d) \right].$$

De plus, puisque $|\sum_{d \leq x} \mu(d)| \leq x$, on obtient

$$O(1) \sum_{d=1}^{e_x} \mu(d) = O(x), \quad xO(1) \sum_{d=1}^{e_x} \mu(d) \frac{1}{d} = O(x \ln x) + O(x) = O(x \ln x).$$

Et enfin, puisque la série $\sum_{d \leq x} \mu(d)/d^2$ est absolument convergente, et puisque pour $N \in \mathbb{N}^*$ (après calculs) on a

$$\left(\sum_{d \leq N} \frac{\mu(d)}{d^2} \right) \left(\sum_{k \leq N} \frac{1}{k^2} \right) = \sum_{m=1}^{N^2} \frac{1}{m^2} \sum_{d|m} \mu(d) = 1.$$

En faisant tendre N vers $+\infty$, on obtient :

$$\frac{x^2}{2} \sum_{d \leq x} \frac{\mu(d)}{d^2} = \frac{x^2}{2} \left(\sum_{d \geq 1} \frac{\mu(d)}{d^2} - \sum_{d \geq x} \frac{\mu(d)}{d^2} \right) = \frac{x^2}{2} \left(\frac{6}{\pi^2} + O\left(\frac{1}{x}\right) \right) = \frac{3x^2}{\pi^2} + O(x).$$

Et donc

$$\sum_{n \leq x} \varphi(n) = \frac{3x^2}{\pi^2} + O(x) + O(x \ln x) = \frac{3x^2}{\pi^2} + O(x \ln x).$$

Ainsi, en remarquant que $\sum_{n \leq x} 6n/\pi^2 \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} 3x^2/\pi^2$, on obtient l'ordre normal. □

7 Approximation par des fonctions lisses

Théorème 132. Soit $n \geq 1$ et $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$.

- Si $S \subset M$ est fermé, toute fonction lisse $f : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ est la restriction d'une fonction lisse $F : M \rightarrow \mathbb{R}^n$, i.e. $F = f$ sur S .
- Soit $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue telle qu'il existe un fermé $S \subset M$ où f se restreint à une fonction lisse. Alors $\forall \varepsilon : M \rightarrow \mathbb{R}^+$ continue positive, $\exists g : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ lisse telle que $f|_S = g|_S$ et $\|f(x) - g(x)\| \leq \varepsilon(x), \forall x \in M$.

Démonstration. ⁶ Montrons d'abord le premier point.

Par définition, pour tout $p \in S$ il existe $U = U(p)$ voisinage ouvert dans M de p et $g_p : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une extension locale de f . On considère le recouvrement d'ouverts $\{U(p)\}_{p \in S} \cup (M \setminus S)$ et on prend $\{\rho_p\} \cup \{\rho\}$ une partition de l'unité subordonnée à ce recouvrement.

Pour tout $x \in M$, on définit sur M la fonction $F(x) = \sum_{p \in S} \rho_p(x) g_p(x)$. Cette somme est finie car pour chaque x il existe un voisinage sur lequel seule une quantité finie de ρ_p ne s'annulent pas. La fonction $F : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ est donc localement une somme finie de fonctions lisses donc est lisse.

Si $x \in S$, on obtient

$$F(x) = \sum_{p \in S} \rho_p(x) g_p(x) = \sum_{p \in S} \rho_p(x) f(x) = f(x) \sum_{p \in S} \rho_p(x) = f(x).$$

D'où F est une extension lisse de f .

Pour le deuxième point, on construit la fonction g localement. Soit ε une fonction décrite dans l'énoncé. Pour tout $p \in M$, il existe un voisinage $U = U(p) \subset M$ et $g_p : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que $f|_{U \cap S} = g_p|_{U \cap S}$ et $\|f(x) - g_p(x)\| \leq \varepsilon(x)$ sur U .

En effet, si $p \in S$, on prend g_p extension de f qui existe d'après le premier point et on obtient trivialement $\|f(x) - g_p(x)\| \leq \varepsilon(x)$ quitte à restreindre U par continuité de f .

Et si $p \in M \setminus S$ alors on choisit $U(p)$ tel que $U(p) \cap S = \emptyset$ (possible car S est fermé) et $g_p \equiv f(p)$ une fonction constante. On obtient bien $\|f(x) - g_p(x)\| \leq \varepsilon(x)$ sur U en choisissant U assez petit encore une fois par continuité de f .

Pour le cas global, on recolle les g_p ainsi construites en prenant une partition de l'unité $\{\rho_p\}$ subordonnée à $\{U(p)\}_{p \in M}$ et on définit sur M la fonction

$$g(x) = \sum_{p \in M} \rho_p(x) g_p(x).$$

Comme dans le premier point, la somme est finie et en particulier g est lisse sur M avec $g|_S = f|_S$. Enfin, pour tout $x \in M$, on a

$$\begin{aligned} \|f(x) - g(x)\| &= \left\| f(x) - \sum_{p \in M} \rho_p(x) g_p(x) \right\| \\ &= \left\| \sum_{p \in M} \rho_p(x) f(x) - \sum_{p \in M} \rho_p(x) g_p(x) \right\| \\ &\leq \sum_{p \in M} \rho_p(x) \|f(x) - g_p(x)\| = \|f(x) - g_p(x)\| \sum_{p \in M} \rho_p(x) < \varepsilon(x). \end{aligned}$$

□

⁶. Preuve par Martelli (2023).

Troisième partie

Questions

Question 1 : Trouver une majoration du terme d'erreur d'interpolation d'une fonction $n + 1$ fois dérivable sur $[a, b]$ pour des points équidistants.

Réponse 1 : Pour des points équidistants, on a $x_i = x_0 + ih$ pour tout $0 \leq i \leq n$, $h = (b - a)/n$ et $x_0 = a$. Pour $x \in [a, b]$ on effectue le changement de variable $x = a + sh$ avec $s \in [0, n]$. Donc

$$\pi_{n+1}(x) = (x - x_0) \dots (x - x_n) = sh(sh - h) \dots (sh - nh) = h^{n+1}s(s - 1) \dots (s - n).$$

Ainsi, d'après le théorème 31, il existe un ζ_x tel que

$$f(x) - P_n(x) = \frac{s(s - 1) \dots (s - n)}{(n + 1)!} h^{n+1} f^{(n+1)}(\zeta_x).$$

Or la fonction $\phi(s) = |s(s - 1) \dots (s - n)|$ définie sur $[0, n]$ vérifie $\phi(s) = \phi(n - s)$ donc elle atteint son maximum dans $\left[0, \frac{n}{2}\right]$. De plus, sur $\left[1, \frac{n}{2}\right]$ on a $\phi(s - 1)/\phi(s) = (n + 1 - s)/s > 1$. Donc ϕ atteint son maximum dans $[0, 1]$. Donc $\max_{[0, n]} \phi = \max_{[0, 1]} \phi \leq n!$. Il en résulte

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{h^{n+1}}{n + 1} \max_{\{x_0, \dots, x_n\}} \|f^{(n+1)}\|.$$

De plus, avec l'expression de π_{n+1} donnée plus haut, on voit que

$$\|\pi_{n+1}\|_{[a, b]} = h^{n+1} \max_{s \in [0, n]} \phi(s) \leq h^{n+1} n! = \frac{n!}{(n + 1)!} (a + b)^{n+1}.$$

La formule de Stirling montre finalement que l'ordre de grandeur de $\|\pi_{n+1}\|$ est

$$\|\pi_{n+1}\| = O\left(\frac{b - a}{e}\right)^{n+1} \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty.$$

Question 2 : Quelle est la transformée de Fourier d'une fonction porte ?

Réponse 2 : On définit une fonction porte de largeur temporelle τ par $\Pi_\tau(t) = 1$ si $|t| \leq \frac{1}{2}\tau$ et 0 sinon. Sa transformée de Fourier, après calculs, est la fonction

$$\hat{\Pi}_\tau(\nu) = \frac{\sin(\pi\nu\tau)}{\pi\nu}.$$

Question 3 : À quoi ressemble la transformée de Fourier d'un signal périodique ou non et discret ou non ?

Réponse 3 : Un signal **périodique continu** est transformé par la TFtc (Transformée de Fourier à temps continu) en un spectre de raies **discrètes non périodiques**. Un signal **non périodique continu** est transformé par la TFtc en un spectre **continu non périodique**. Un signal **non périodique discret** est transformé par la TFtd (Transformée de Fourier à temps discret) en un spectre **continu périodique**. Un signal périodique discret est transformé par la TFtd en un spectre **périodique discret**. Cela est dû à la formule de Poisson impliquant qu'un échantillonnage périodise le spectre et que la transformée de Fourier inverse rend un signal discret continu.

Quatrième partie

Bibliographie

- Beck, V., Malick, J., and Peyré, G. (2005). *Objectif agrégation*. H&K, 2nd edition.
- Demailly, J.-P. (2016). *Analyse numérique et équation différentielle*. EDP sciences.
- Francinou, S., Gianella, H., and Nicolas, S. (2012). *Oraux X-ENS, Analyse*, volume 4. Cassini.
- Gourdon, X. (2016). *Les maths en tête, Analyse*. ellipses, 2nd edition.
- Li, D. (2013). *Cours d'analyse fonctionnelle*. ellipses.
- Martelli, B. (2023). Manifolds. <https://people.dm.unipi.it/martelli/didattica/matematica/2023/Manifolds.pdf>. [Online; Accessed on 02-11-2023].
- Queffélec, H. and Zuily, C. (2013). *Analyse pour l'agrégation, cours et exercices corrigés*. Dunod, 4e edition.
- Rombaldi, J.-É. (2019). *Éléments d'analyse réelle*. EDP sciences, 2nd edition.
- Tenenbaum, G. (2022). *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*. Belin Éducation.