École normale supérieure de Rennes
Institut de Mathématiques de Nancy Élie Cartan

Rapport de stage de 1ère année de Magistère

Année universitaire 2021-2022

Démonstration du Théorème d'Erdős-Kac via une variante effective du Théorème de Delange.

Présenté par : Clara Genes

Sous la tutelle de : Gérald Tenenbaum

Remerciements

Je voudrais tout d'abord adresser mon entière gratitude à mon maître de stage Gérald Tenenbaum, pour sa patience, ses idées, sa sympathie, sa disponibilité et l'autonomie qu'il m'a accordée pendant ce mois de stage. Ses conseils avisés, toujours accompagnés d'anecdotes captivantes sur l'histoire des mathématiques, ont été pour moi une grande source d'apprentissage.

Je tiens ensuite à remercier les responsables et le personnel de l'Institut Élie Cartan de Nancy pour leur accueil chaleureux et pour la mise à disposition de tous les outils nécessaires au bon déroulement de mon stage. Plus particulièrement, je remercie Thomas Stoll qui m'a mis en relation avec mon tuteur, Gérald Tenenbaum.

Je saisis maintenant cette occasion pour remercier le corps enseignant de l'ENS de Rennes et ses chargés de travaux dirigés pour leur bienveillance durant l'année écoulée, ce qui m'a permis de mener à bien les missions qui m'ont été confiées durant le stage. En particulier, je remercie vivement Karine Beauchard et Christophe Dupont pour leur investissement personnel bénéfique à la réussite de leurs élèves, ainsi que Rémi Moreau, Thomas Cavallazzi et Pierre Le Barbenchon pour le temps qu'ils ont passé à répondre à mes innombrables questions.

Je ne peux oublier de remercier mes amis Quentin Schneider et Hugo Jacob qui ont également contribué à la réussite de ce stage, en prenant soin de moi pendant ce mois.

Enfin, je terminerai en remerciant mes proches sans qui je n'en serais pas là aujourd'hui : mon père, ma mère, ma sœur, Alain, Nikita, Arthur, Chloé, Lisa, Méline, Marion, Baptiste, Matthieu, Florette, Joanna, Alice, Adrienne, Lucas, Guillhem, Gael, ainsi qu'à tous ceux qui, d'une façon ou d'une autre, ont été à mes côtés et m'ont donné confiance.

Table des matières

Dans l'étude d'une fonction arithmétique, il est souvent intéressant de s'attarder sur sa valeur moyenne ou sur une approximation adéquate de celle-ci. Les estimations de valeurs moyennes de fonctions multiplicatives constituent un outil privilégié de la théorie probabiliste des nombres. Elles permettent notamment d'appréhender la répartition des fonctions additives sur les premiers entiers via leurs fonctions caractéristiques et d'obtenir des théorèmes de convergence avec contrôle de l'approximation. Le théorème d'Erdős-Kac paru en 1939 (Erdős and Kac (1939), Erdős and Kac (1940)) est un théorème phare de cette étude.

1 Quelques notions préliminaires

Dans ce document, la lettre p sera toujours réservée à un nombre premier. Si ν et n sont des entiers non nuls, nous noterons $p^\nu \| n$,lu "divise exactement", pour $p^\nu | n$ et $p^{\nu+1} \nmid n$ où la notation $a|b$ signifie que a est un diviseur de b. Le plus grand diviseur commun à a et b deux entiers sera noté (a, b). Nous utiliserons également indifféremment la notation de Landau $f = O(g)$ et celle de Vinogradov $f \ll g$ pour signifier $|f| \leqslant C|g|$ où C est une constante strictement positive. Nous écrirons alors $f \asymp g$ pour indiquer que nous avons à la fois $f \ll g$ et $g \ll f$. De plus, la notation $\ln_k(x)$ désignera la k-ième itérée du logarithme népérien. En particulier, $\ln_2 x = \ln(\ln x)$.

1.1 Définitions et premières propriétés

Nous allons ici présenter différentes notions classiques de théorie des nombres.

Définition 1.1. Une fonction *arithmétique* est une fonction f de $\mathbb{N}^*$ à valeurs complexes.

Définition 1.2. Une fonction *analytique* est une fonction f développable en série entière au voisinage de chacun des points de son domaine de définition.

Définition 1.3. Une fonction *multiplicative* est une fonction arithmétique vérifiant :

- $f(1) = 1$,
- pour tous entiers $a, b \geqslant 1$ premiers entre eux, nous avons : $f(ab) = f(a)f(b)$.

Remarque 1.1. Si f est une fonction multiplicative alors $f(n) = \prod_{p^\nu \| n} f(p^\nu)$.

Définition 1.4. Une fonction *additive* est une fonction arithmétique vérifiant :

- $f(1) = 0$,
- pour tous entiers $a, b \geqslant 1$ premiers entre eux, nous avons : $f(ab) = f(a) + f(b)$.

Remarque 1.2. Si f est une fonction additive alors $f(n) = \sum_{p^\nu \| n} f(p^\nu)$.

Définition 1.5. La fonction ω de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$ est la fonction qui associe à chaque entier n le nombre de ses facteurs premiers distincts.

Exemple 1.1. $\omega(13) = 1$.
Exemple 1.2. $\omega(120) = \omega(2^3 \times 3 \times 5) = 3$.

Propriété 1.6. La fonction ω est additive.

Démonstration. Soit a, b deux entiers premiers entre eux. Décomposons-les en produits de facteurs premiers. Notons $\omega(a) = n$ et $\omega(b) = m$:

$$a = p_1^{\alpha_1} \dots p_n^{\alpha_n},$$
$$b = q_1^{\beta_1} \dots q_m^{\beta_m}.$$

Puisque $(a, b) = 1$, nous avons $p_i \neq q_j$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant m$. Donc

$$ab = p_1^{\alpha_1} \dots p_n^{\alpha_n} q_1^{\beta_1} \dots q_m^{\beta_m}.$$

Et ainsi $\omega(ab) = n + m = \omega(a) + \omega(b)$. □

Définition 1.7. À une fonction arithmétique g, nous associerons la *série de Dirichlet*

$$G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} g(n) n^{-s}, \qquad s = \sigma + i\tau.$$

Cela définit une fonction analytique G sur le domaine des points s où la série converge.

Cette association nous permet d'introduire sur l'ensemble des fonctions arithmétiques une addition et un produit, dit de convolution, définis comme suit.
Soient f, g deux fonctions arithmétiques. Nous posons

$$(f + g)(n) = f(n) + g(n),$$

$$(f * g)(n) = \sum_{dd'=n} f(d) g(d'). \tag{1.1}$$

Remarque 1.3. Ces opérations équipent l'ensemble des fonctions arithmétiques d'une structure d'anneau. Il s'avère que cet anneau est en particulier commutatif, unitaire et factoriel. Pour plus de détails voir Cashwell and Everett (1959).

Propriété 1.8. Un élément unité de l'opération de convolution est la fonction arithmétique δ, définie par

$$\delta(n) := \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. Soit f une fonction multiplicative.
Nous avons

$$f * \delta(n) = \sum_{dd'=n} f(d) \delta(d') = f(n) \delta(1) = f(n).$$

Le produit étant commutatif, nous avons le résultat. □

Définition 1.9. La *fonction de Möbius* μ est définie de $\mathbb{N}^*$ sur $\{-1, 0, 1\}$ par :

- $\mu(n) = 0$ si n est divisible par un carré différent de 1,
- $\mu(n) = 1$ si n est le produit d'un nombre pair de nombres premiers distincts,
- $\mu(n) = -1$ si n est le produit d'un nombre impair de nombres premiers distincts.

Remarque 1.4. Nous pouvons également définir $\mu(n)$ dans les deux derniers cas par l'égalité $\mu(n) = (-1)^{\omega(n)}$.

Propriété 1.10. La fonction de Möbius est multiplicative.

Démonstration. Soit (n, m) un couple d'entiers premiers entre-eux. Tout d'abord, si n ou m est divisible par un carré différent de 1, il en est de même du produit nm et donc $\mu(nm) = \mu(n)\mu(m) = 0$.

Ensuite, en utilisant la décomposition en facteurs premiers, comme n et m sont premiers entre eux, ils n'ont aucun facteur commun et donc le nombre de facteurs du produit est la somme des nombres de facteurs de chaque entier et aucun carré différent de 1 n'apparaît. D'où le résultat. □

Propriété 1.11. L'inverse de la fonction de Möbius pour la convolution est la fonction constante égale à 1.

Démonstration. Calculons $\mu * 1$ à partir de la définition. Nous avons

$$\mu * 1 = \sum_{dd'=n} \mu(d) = \sum_{d|n} \mu(d).$$

Si $n = 1$ alors $\mu * 1(n) = \mu(1) = 1$ et nous avons le résultat.
Sinon, soit P l'ensemble des facteurs premiers de n et $c = |P| \geqslant 1$. Les seuls diviseurs de n dont l'image par μ est non nulle sont les produits d'éléments distincts de P.
Or, le nombre de parties de P de cardinal k est $\binom{c}{k}$.
Donc, nous obtenons, pour $n > 1$,

$$\begin{aligned}
\sum_{d|n} \mu(d) &= \sum_{I \subset P} \mu\left(\prod_{p \in I} p\right) \\
&= \sum_{I \subset P} (-1)^{|I|} \\
&= \sum_{k=0}^{c} (-1)^k \left|\{I \subset P : |I| = k\}\right| \\
&= \sum_{k=0}^{c} \binom{c}{k} (-1)^k = (-1+1)^c = 0.
\end{aligned}$$

Donc $\mu * 1 = \delta$ et d'où le résultat. □

Remarque 1.5. Nous avons choisi ici de ne présenter que quelques propriétés qui nous seront utiles de la fonction de Möbius mais celle-ci en présente bien plus. Pour avoir des résultats plus complets, nous pourrons nous référer au livre de Hardy and Wright (1938) ou au séminaire de Badiou (1961).

1.2 Quelques outils classiques

Dans cette sous-section nous allons présenter quelques outils classiques qui nous seront utiles tout au long de ce document. Ce sont des résultats classiques qui ne seront pas démontrés ici.

En théorie des probabilité, *l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev*[1] est une inégalité de concentration permettant de montrer qu'une variable aléatoire a une probabilité faible de s'éloigner de son espérance.

Théorème 1.12. *Soit X une variable aléatoire d'espérance $\mathbb{E}[X]$ et de variance σ^2 avec σ l'écart type de X. Alors, pour tout réel ε strictement positif,*

$$\mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}[X]| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$

Le *théorème des résidus*[2] est un outil d'analyse complexe permettant d'évaluer certaines intégrales de fonctions holomorphes.

Théorème 1.13. *Soit U un sous-ensemble ouvert et simplement connexe du plan $\mathbb{C}$. Soit S un ensemble dénombrable de points de U et f une fonction définie et holomorphe sur $U \backslash S$. Soit γ un lacet dans U ne rencontrant aucun point de S. Alors*

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{s \in S} \operatorname{Res}(f, s) \operatorname{Ind}_\gamma(s),$$

où $\operatorname{Res}(f, s)$ désigne le résidu de f en s et $\operatorname{Ind}_\gamma(s)$ l'indice du lacet γ par rapport à s.

Le *théorème de continuité* de Lévy[3] relie la convergence faible des fonctions de répartition à la convergence simple des fonctions caractéristiques.

Théorème 1.14. (Théorème de continuité, Lévy, 1925).

Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de fonctions de répartition et $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de leurs fonctions caractéristiques. Alors F_n converge faiblement vers une fonction de répartition F si, et seulement si, φ_n converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction φ continue en 0. De plus, dans ce cas, φ est la fonction caractéristique de F.

Rappelons également le théorème des nombres premiers[4], concernant la répartition asymptotique de ces derniers.

1. Pour une démonstration voir Darracq and Rombaldi (2021).
2. Pour une preuve, voir Tauvel (2020) ou Cartan (1961).
3. Pour une preuve, voir Graczyk et al. (2021).
4. Pour une preuve, voir Tenenbaum and Mendès France (2000).

Théorème 1.15. *Notant $\pi(x)$ le nombre de nombres premiers n'excédant pas $x \in \mathbb{R}$, nous avons*

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x} \qquad (x \to \infty).$$

2 L'inégalité de Turán-Kubilius

2.1 Ordre normal

Définition 2.1. En théorie des nombres, un ensemble A d'entiers naturels est dit de densité naturelle α, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, si nous avons

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_n(A)}{n} = \alpha.$$

où $N_n(A) = |A \cap \{1, \dots, n\}|$ et sous réserve d'existence de la limite. Heuristiquement, c'est une façon de mesurer la taille de certains sous-ensembles d'entiers naturels : la densité de A peut-être vue comme une approximation de la probabilité qu'un entier tiré au hasard dans un intervalle arbitrairement grand appartienne à A.

Définition 2.2. En arithmétique, une propriété $P(n)$ est dite vraie presque partout si l'ensemble A des entiers naturels n tels que $P(n)$ soit vérifiée est de densité naturelle égale à 1, c'est-à-dire

$$\frac{|A \cap \{1, \dots, n\}|}{n} \to 1 \qquad (n \to \infty).$$

Définition 2.3. Soient f, g deux fonctions arithmétiques. Nous disons que f est *d'ordre normal* g si, pour tout $\varepsilon > 0$, nous avons

$$|f(n) - g(n)| \leqslant \varepsilon |g(n)| \tag{2.1}$$

pour tout n d'un ensemble d'entiers de densité unité, c'est-à-dire pour presque tout n.

Puisqu'une fonction f peut avoir plusieurs ordres normaux, il est commode de choisir cet ordre élémentaire et monotone, lorsque cela est possible. En terme de fonctions de répartition, l'existence d'un ordre normal s'interprète comme la convergence vers une loi impropre après une renormalisation adaptée.

Exemple 2.1. Dans le cas de fonctions positives, la relation (2.1) équivaut à la convergence en loi des fonctions de répartition

$$H_N(z) := \nu_N \left\{ n \ : \ \frac{f(n)}{g(n)} \leqslant z \right\} \xrightarrow{\mathscr{L}} H(z) := \mathbb{1}_{[1,+\infty[}(z).$$

où ν_N est la loi uniforme sur $\Omega_N := \{n : 1 \leqslant n \leqslant N\}$.

Exemple 2.2. Hardy et Ramanujan ont montré en 1917 que l'ordre normal de $\omega(n)$ est $\ln_2 n$. Autrement dit, "la plupart des entiers" n ont $\ln_2 n$ facteurs premiers distincts (pour une démonstration voir Hardy and Ramanujan (1917)).

2.2 L'inégalité de Turán-Kubilius

Dans cette sous-section, nous allons énoncer l'inégalité de Turán-Kubilius. Celle-ci sera essentielle dans la démonstration que nous avons choisi du théorème de Delange (Théorème 3.2 *infra*).
Soit f une fonction arithmétique. Alors la fonction g définie par

$$g(N) = \mathbb{E}_N(f) \coloneqq \frac{1}{N} \sum_{n \leqslant N} f(n) \tag{2.2}$$

pour tout N entier est la *valeur moyenne* de f. C'est un bon candidat à son ordre normal.

Nous notons la *variance empirique* de f sur Ω_x

$$\mathbb{V}_N(f) \coloneqq \mathbb{E}_N\left(|f - g(N)|^2\right).$$

L'inégalité de Turán-Kubilius (Lemme (2.1) *infra*) en donne une majoration qui suffit souvent à la détermination de l'ordre normal de fonctions additives. Remarquons qu'il est souvent commode de remplacer cette variance par la variance *semi-empirique*. Cette dernière est calculée à partir de l'espérance d'un modèle probabiliste construit à partir de l'écriture

$$f(n) = \sum_{p^\nu \leq N} f(p^\nu) \xi_{p^\nu}(n) \qquad n \leq N,$$

où

$$\xi_{p^\nu}(n) \coloneqq \begin{cases} 1 & \text{si } p^\nu \| n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Donc sur Ω_N muni de ν_N nous avons :

$$f = \sum_{p^\nu \leq N} f(p^\nu) \xi_{p^\nu}$$

vues commes variables aléatoires.

Lemme 2.1. Inégalité de Turán-Kubilius
Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ une fonction additive. Alors il existe une fonction $\varepsilon(x)$ telle que $\lim_{x \to \infty} \varepsilon(x) = 0$ et

$$\frac{1}{x} \sum_{n \leqslant x} |f(n) - E(x)|^2 \ll D(x)^2 \left(2 + \varepsilon(x)\right)$$

uniformément pour tous f, x, où nous avons noté

$$E(x) \coloneqq \sum_{p^\nu \leqslant x} \frac{f(p^\nu)}{p^\nu} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \text{ et } D(x) \coloneqq \left(\sum_{p^\nu \leqslant x} \frac{|f(p^\nu)|^2}{p^\nu}\right)^{1/2}.$$

Démonstration. Dans un premier temps, étudions le cas où f est réelle et positive ou nulle. Nous avons, puisque f est additive,

$$\sum_{n \leqslant x} f(n) = \sum_{n \leqslant x} \sum_{p^\nu \| n} f(p^\nu).$$

Donc

$$\sum_{n\leqslant x} f(n) = \sum_{p^\nu\leqslant x} f(p^\nu) \sum_{\substack{n\leqslant x\\ p^\nu\| n}} 1 = \sum_{p^\nu\leqslant x} f(p^\nu)\left(\sum_{\substack{n\leqslant x\\ p^\nu| n}} 1 - \sum_{\substack{n\leqslant x\\ p^{\nu+1}\| n}} 1\right)$$
$$= \sum_{p^\nu\leqslant x} f(p^\nu)\left(\left\lfloor\frac{x}{p^\nu}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{x}{p^{\nu+1}}\right\rfloor\right).$$

Or, comme

$$x-y+1 \geqslant \lfloor x\rfloor - \lfloor y\rfloor \geqslant x-y-1 \text{ pour tous } x,y\in\mathbb{R}, \tag{2.3}$$

nous obtenons

$$\sum_{n\leqslant x} f(n) \geqslant \sum_{p^\nu\leqslant x} f(p^\nu)\left(\frac{x}{p^\nu} - \frac{x}{p^{\nu+1}} - 1\right) = \sum_{p^\nu\leqslant x} x\frac{f(p^\nu)}{p^\nu}\left(1-\frac{1}{p}\right) - \sum_{p^\nu\leqslant x} f(p^\nu).$$

Donc

$$\sum_{n\leqslant x} f(n) \geqslant xE(x) - \sum_{p^\nu\leqslant x} f(p^\nu).$$

Or, en développant pour $x\in\mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x} |f(n)-E(x)|^2 = \frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x} f(n)^2 + E(x)^2 - 2\frac{E(x)}{x}\sum_{n\leqslant x} f(n)$$
$$\leqslant \frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x} f(n)^2 + E(x)^2 - 2\frac{E(x)}{x}\left(xE(x) - \sum_{p^\nu\leqslant x} f(p^\nu)\right)$$
$$= \frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x} f(n)^2 - E(x)^2 - 2\frac{E(x)}{x}\sum_{p^\nu\leqslant x} f(p^\nu). \tag{2.4}$$

Attardons-nous sur la première somme :

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x} f(n)^2 = \frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}\left(\sum_{p^\nu\| n} f(p^\nu)\right)\left(\sum_{q^\mu\| n} f(q^\mu)\right)$$
$$= \frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}\sum_{\substack{p,q\\ p^\nu\| n\\ q^\mu\| n}} f(p^\nu)f(q^\mu)$$
$$= \frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}\sum_{p^\nu\| n} f(p^\nu)^2 + \frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}\sum_{\substack{p^\nu\| n\\ q^\mu\| n\\ p\neq q}} f(p^\nu)f(q^\mu). \tag{2.5}$$

Pour ce qui est de la seconde somme, nous observons, à la suite d'inversion de sommations, que

$$\sum_{\substack{p\neq q\\ p^\nu q^\mu\leqslant x}} f(p^\nu)f(q^\mu)\sum_{\substack{n\leqslant x\\ p^\nu\| n\\ q^\mu\| n}} 1 = \sum_{\substack{p\neq q\\ p^\nu q^\mu\leqslant x}} f(p^\nu)f(q^\mu)\left(\left\lfloor\frac{x}{p^\nu q^\mu}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{x}{p^{\nu+1}q^\mu}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{x}{p^\nu q^{\mu+1}}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{x}{p^{\nu+1}q^{\mu+1}}\right\rfloor\right).$$

De la première inégalité de (2.3), nous déduisons

$$\frac{1}{x}\sum_{\substack{p\neq q\\ p^\nu q^\mu\leqslant x}} f(p^\nu)f(q^\mu)\sum_{\substack{n\leqslant x\\ p^\nu\| n\\ q^\mu\| n}} 1 \leqslant \frac{1}{x}\sum_{\substack{p\neq q\\ p^\nu q^\mu\leqslant x}} f(p^\nu)f(q^\mu)\left(\frac{x}{p^\nu q^\mu}\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{q}\right)+2\right)$$

En raisonnant de même sur la première somme de (2.5), nous obtenons, lorsque f est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$,

$$\frac{1}{x}\sum_{p^\nu\leqslant x} f(p^\nu)\sum_{\substack{n\leqslant x\\ p^\nu\| n}} 1 = \frac{1}{x}\sum_{p^\nu\leqslant x} f(p^\nu)\left(\left\lfloor\frac{x}{p^\nu}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{x}{p^{\nu+1}}\right\rfloor\right)$$

$$\leqslant \frac{1}{x}\sum_{p^\nu\leqslant x} f(p^\nu)\left(\frac{x}{p^\nu}\underbrace{\left(1-\frac{1}{p}\right)}_{\leqslant 1}+\underbrace{1}_{\leqslant x/p^\nu}\right)\leqslant 2\sum_{p^\nu\leqslant x}\frac{f(p^\nu)^2}{p^\nu}.$$

Ainsi,

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x} f(n)^2 \leqslant 2D(x)^2+\frac{1}{x}\sum_{\substack{p\neq q\\ p^\nu q^\mu\leqslant x}} f(p^\nu)f(q^\mu)\frac{x}{p^\nu q^\mu}\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{q}\right)+\frac{2}{x}\sum_{\substack{p\neq q\\ p^\nu q^\mu\leqslant x}} f(p^\nu)f(q^\mu)$$

$$\leqslant 2D(x)^2+\underbrace{\left(\sum_p\frac{f(p^\nu)}{p^\nu}\left(1-\frac{1}{p}\right)\right)^2}_{\leqslant E(x)^2}+\frac{2}{x}\sum_{\substack{p\neq q\\ p^\nu q^\mu\leqslant x}} f(p^\nu)f(q^\mu).$$

En reportant cette dernière inégalité dans (2.4), nous obtenons alors

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}|f(n)-E(x)|^2\leqslant 2D(x)^2+\frac{2}{x}\sum_{\substack{p\neq q\\ p^\nu q^\mu\leqslant x}} f(p^\nu)f(q^\mu)+2\frac{E(x)}{x}\sum_{p^\nu\leqslant x} f(p^\nu). \tag{2.6}$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous obtenons

$$\sum_{p^\nu\leqslant x} f(p^\nu)=\sum_{p^\nu\leqslant x}\frac{f(p^\nu)}{p^{\nu/2}}p^{\nu/2}\leqslant\left(\sum_{p^\nu\leqslant x}\frac{f(p^\nu)^2}{p^\nu}\right)^{1/2}\left(\sum_{p^\nu\leqslant x}p^\nu\right)^{1/2}\leqslant D(x)\left(2\sum_{p^\nu\leqslant x}p^\nu\right)^{1/2}.$$

De même,

$$\sum_{\substack{p\neq q\\ p^\nu q^\mu\leqslant x}} f(p^\nu)f(q^\mu)=\sum_{\substack{p\neq q\\ p^\nu q^\mu\leqslant x}}\frac{f(p^\nu)f(q^\mu)}{p^{\nu/2}q^{\mu/2}}p^{\nu/2}q^{\mu/2}\leqslant\left(\sum_{\substack{p\neq q\\ p^\nu q^\mu\leqslant x}}\frac{f(p^\nu)^2f(q^\mu)^2}{p^\nu q^\mu}\right)^{1/2}\left(\sum_{\substack{p\neq q\\ p^\nu q^\mu\leqslant x}}p^\nu q^\mu\right)^{1/2}$$

$$\leqslant 2D(x)^2\left(\sum_{\substack{p\neq q\\ p^\nu q^\mu\leqslant x}}p^\nu q^\mu\right)^{1/2}.$$

Et enfin,

$$E(x)^2=\left(\sum_{p^\nu\leqslant x}\frac{f(p^\nu)}{p^{\nu/2}}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{1/2}\frac{1}{p^{\nu/2}}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{1/2}\right)^2$$

$$\leqslant\sum_{p^\nu\leqslant x}\frac{f(p^\nu)^2}{p^\nu}\left(1-\frac{1}{p}\right)\sum_{p^\nu\leqslant x}\frac{1}{p^\nu}\left(1-\frac{1}{p}\right)\leqslant D(x)^2\sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p}.$$

En reportant dans (2.6), nous obtenons

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}|f(n)-E(x)|^2 \leqslant 2D(x)^2+\frac{2D(x)^2}{x}\left(\sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p}\right)^{1/2}\left(2\sum_{p^\nu\leqslant x}p^\nu\right)^{1/2}+\frac{4D(x)^2}{x}\left(\sum_{\substack{p\neq q\\ p^\nu q^\mu\leqslant x}}p^\nu q^\mu\right)^{1/2}.$$

Et donc

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}|f(n)-E(x)|^2 \ll D(x)^2\left(2+\varepsilon(x)\right), \tag{2.7}$$

où nous avons posé

$$\varepsilon(x) \coloneqq \frac{4}{x}\left(2\sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p}\sum_{p^\nu\leqslant x}p^\nu\right)^{1/2}+\frac{8}{x}\left(\sum_{\substack{p\neq q\\ p^\nu q^\mu\leqslant x}}p^\nu q^\mu\right)^{1/2}.$$

Il ne nous reste plus qu'à démontrer que $\varepsilon(x)\overset{x\to\infty}{\longrightarrow}0$. Or, d'une part, nous avons

$$\sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p}\ll \ln_2 x,$$

et

$$\sum_{p^\nu\leqslant x}p^\nu=\sum_{\nu\geqslant 1}\sum_{p\leqslant x^{1/\nu}}p^\nu=\sum_{1\leqslant\nu\leqslant(\ln x)/\ln 2}\sum_{p\leqslant x^{1/\nu}}p^\nu.$$

La somme intérieur se réécrit

$$\begin{aligned}\sum_{p\leqslant x^{1/\nu}}p^\nu &= \sum_{p\leqslant x^{1/\nu}}\nu\int_0^p t^{\nu-1}\mathrm{d}t=\nu\int_0^{x^{1/\nu}}t^{\nu-1}\sum_{t<p\leqslant x^{1/\nu}}1\mathrm{d}t\\ &\leqslant \nu\int_0^{x^{1/\nu}}t^{\nu-1}\sum_{p\leqslant x^{1/\nu}}1\mathrm{d}t=\nu^2\int_0^{x^{1/\nu}}t^{\nu-1}\frac{x^{1/\nu}}{\ln x}\mathrm{d}t\\ &=\nu\frac{x^{(\nu+1)/\nu}}{\ln x}\end{aligned}$$

Nous remarquons alors que ce dernier terme est tel que uniformément pour $\nu\geqslant 1$,

$$\nu x^{(\nu+1)/\nu}=O(x^2).$$

Ainsi, nous avons

$$\frac{4}{x}\left(2\sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p}\sum_{p^\nu\leqslant x}p^\nu\right)^{1/2}\ll\sqrt{\frac{\ln_2 x}{\ln x}}.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{p\neq q\\ p^\nu q^\mu\leqslant x}}p^\nu q^\mu &\leqslant \sum_{\substack{p\neq q\\ p^\nu q^\mu\leqslant x}}p^\nu q^\mu\frac{x}{p^\nu q^\mu}=x\sum_{\substack{p\neq q\\ p^\nu q^\mu\leqslant x}}1\leqslant x\sum_{p^\nu\leqslant x}\sum_{q^\mu\leqslant x/p^\nu}1\\ &\ll x\sum_{p^\nu\leqslant x}\sum_{q\leqslant x/p^\nu}1\ll x\sum_{p^\nu\leqslant x}\frac{x/p^\nu}{\ln(2x/p^\nu)}\ll x\sum_{p\leqslant x}\frac{x/p}{\ln(2x/p)}.\end{aligned}$$

L'avant-dernière inégalité étant une conséquence du théorème des nombres premiers 1.15. Nous avons alors

$$\sum_{\substack{p\neq q\\ p^\nu q^\mu\leqslant x}} p^\nu q^\mu \ll x\sum_{p\leqslant x}\int_2^{x/p}\frac{\mathrm{d}t}{\ln(2t)} \ll x\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln(2t)}\sum_{p\leqslant x/t} 1$$

$$\ll x\int_1^x \frac{1}{\ln(2t)}\frac{x/t}{\ln(x/t)}\mathrm{d}t \ll \frac{x^2}{\ln x}\int_1^{\sqrt{x}}\frac{\mathrm{d}t}{t\ln t}.$$

En effet, avec le changement de variable $u = x/t$, nous avons

$$\int_1^x \frac{1}{\ln(2t)}\frac{x/t}{\ln(x/t)}\mathrm{d}t = \int_1^{\sqrt{x}} \frac{1}{\ln(2t)}\frac{x/t}{\ln(x/t)}\mathrm{d}t + \int_{\sqrt{x}}^x \frac{1}{\ln(2t)}\frac{x/t}{\ln(x/t)}\mathrm{d}t$$

$$\ll \frac{x}{\ln x}\int_1^{\sqrt{x}}\frac{1}{t\ln(2t)}\mathrm{d}t + \frac{x}{\ln x}\int_1^{\sqrt{x}}\frac{1}{u\ln(u)}\mathrm{d}u$$

$$\ll \frac{x}{\ln x}\int_1^{\sqrt{x}}\frac{1}{t\ln t}\mathrm{d}t.$$

Cela implique

$$\sum_{\substack{p\neq q\\ p^\nu q^\mu\leqslant x}} p^\nu q^\mu \ll \frac{x^2}{\ln x}\int_1^{\sqrt{x}}\frac{\mathrm{d}t}{t\ln t} \ll \frac{x^2\ln_2 x}{\ln x}.$$

D'où

$$\frac{8}{x}\left(\sum_{\substack{p\neq q\\ p^\nu q^\mu\leqslant x}} p^\nu q^\mu\right)^{1/2} \ll \sqrt{\frac{\ln_2 x}{\ln x}}.$$

Nous avons alors l'estimation suivante [5]

$$\varepsilon(x) \ll \sqrt{\frac{\ln_2 x}{\ln x}} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Lorsque f est à valeurs des deux signes, nous introduisons les parties positives et négatives de f notées f^+ et f^- et définies par $f^\pm(p^\nu) = \max(\pm f(p^\nu), 0)$. Cela induit les définitions suivantes :

$$E_\pm(x) = \sum_{p^\nu\leqslant x}\frac{f^\pm(p^\nu)}{p^\nu}\left(1-\frac{1}{p}\right),$$

$$D_\pm(x)^2 = \sum_{p^\nu\leqslant x}\frac{|f^\pm(p^\nu)|^2}{p^\nu}.$$

Donc nous avons pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$|f(n)-E(x)|^2 = \left|(f^+(n)-E_+(x)) - (f^-(n)-E_-(x))\right|^2$$

$$\leqslant 2\left|f^+(n)-E_+(x)\right|^2 + 2\left|f^-(n)-E_-(x)\right|^2.$$

5. Il faut voir qu'il y a environ 10^{84} particules dans l'univers et que $\ln_2(10^{84}) \approx 5,3$. Ainsi, dans ce document et dans la théorie des nombres, les entiers considérés sont plus qu'astronomiques.

Et
$$D(x)^2 = D_-(x)^2 + D_+(x)^2.$$
En effet, cette dernière égalité est dûe au fait que $f^+f^- = \max(f,0)\max(-f,0) = 0$.

Ces observations montrent que l'inégalité (2.7) obtenue reste valide pour toute fonction f réelle à valeurs quelconques. Lorsque f est à valeurs complexes, nous appliquons le résultat précédent aux parties réelle et imaginaire de f et l'inégalité persiste encore.
D'où le résultat. □

3 Le théorème de Delange

Cette section est consacrée au théorème de Delange. Nous allons nous appuyer sur une de ses démonstrations pour en montrer une variante effective qui sera le point clef de la démonstration du Théorème (4.1 *infra*) d'Erdős-Kac. Plusieurs démonstrations de ce théorème existent. Celle que nous allons présenter est celle de Tenenbaum (2022) mais nous avons étudié celles de Schwartz and Spilker (1993) et Elliott (2012) pour mieux en comprendre les choix.

3.1 Lemme

Le résultat classique suivant nous sera utile à plusieurs reprises au cours de ce document.

Lemme 3.1. Soit $(u_n)_{n\in N}$ une famille de nombres complexes du disque unité. Alors nous avons l'inégalité suivante
$$|u_1u_2\dots u_n - 1| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |u_k - 1|.$$

Démonstration. Nous allons montrer ce résultat par récurrence.
Initialisation : Évidemment, pour $n = 1$ nous avons l'inégalité demandée.
Hérédité : Supposons la propriété vraie au rang n. Montrons-la au rang $n+1$.
Nous avons les inégalités successives suivantes.
$$\begin{aligned}|u_1u_2\dots u_nu_{n+1} - 1| &= |u_{n+1}(u_1u_2\dots u_n - 1) + u_{n+1} - 1| \\ &\leqslant |u_{n+1}||u_1u_2\dots u_n - 1| + |u_{n+1} - 1| \\ &\overset{(HdR)}{\leqslant} \sum_{k=1}^{n+1} |u_k - 1|.\end{aligned}$$
D'où la récurrence et d'où le résultat. □

Nous pouvons également énoncer un corollaire de ce dernier lemme

Corollaire 3.1. Soit B et θ deux réels. Alors
$$\left|B\mathrm{e}^{i\theta} - 1\right| \leqslant |B-1| + \left|\mathrm{e}^{i\theta} - 1\right|.$$

Démonstration. De manière similaire à la démonstration du Lemme3.1, nous avons
$$\left|B\mathrm{e}^{i\theta} - 1\right| = \left|\mathrm{e}^{i\theta}(B-1) + \mathrm{e}^{i\theta} - 1\right| \leqslant \left|\mathrm{e}^{i\theta}\right||B-1| + \left|\mathrm{e}^{i\theta} - 1\right| = |B-1| + \left|\mathrm{e}^{i\theta} - 1\right|$$
□

3.2 Énoncé et démonstration du théorème de Delange

Théorème 3.2. (Delange).
Soit g une fonction multiplicative telle que $|g(n)| \leqslant 1$ pour tout entier naturel n non nul.
Sous l'hypothèse

$$\sum_p \frac{1-\mathrm{Re}(g(p))}{p} < +\infty, \tag{3.1}$$

nous avons

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x} g(n) = \prod_{p\leqslant x}\left(1-\frac{1}{p}\right)\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{g(p^\nu)}{p^\nu} + \underset{x\to\infty}{o}(1). \tag{3.2}$$

Remarque 3.1. Ce théorème n'a pas été publié par Delange mais a fait l'objet de plusieurs exposés oraux [6]. Il repose, à partir d'une idée de Rényi (1965), sur l'inégalité de Turán-Kubilius.

Démonstration. Définissons, pour tout réel $y \geqslant 2$, une fonction multiplicative g_y par :

$$g_y(p^\nu) := \begin{cases} g(p^\nu) & \text{si } p \leqslant y \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarquons que g_y ne varie que sur un ensemble fini de nombres premiers. Nous espérons tout de même qu'elle soit une bonne approximation de g pour y assez grand.

Notons $h_y := \mu * g_y$ où $*$ est le produit de convolution défini par (1.1) et μ la fonction de Möbius (1.9). La fonction h_y est multiplicative comme convolée de deux fonctions arithmétiques multiplicatives. Nous avons donc :

$$h_y(p^\nu) = \sum_{k=0}^{\nu}\mu(p^k)g_y(p^{\nu-k}) = \mu(1)g_y(p^\nu) + \mu(p)g_y(p^{\nu-1}).$$

C'est-à-dire

$$h_y(p^\nu) := \begin{cases} g(p^\nu) - g(p^{\nu-1}) & \text{si } \nu \geqslant 1 \text{ et } p \leqslant y \\ 0 & \text{si } \nu \geqslant 1 \text{ et } p > y. \end{cases} \tag{3.3}$$

Cela implique

$$H_y(x) := \sum_{k\leqslant x}|h_y(k)| + x\sum_{k>x}\frac{|h_y(k)|}{k} \overset{(a)}{\leqslant} \sqrt{x}\sum_{k\geqslant 1}\frac{|h_y(k)|}{\sqrt{k}} \overset{(b)}{\leqslant} \sqrt{x}\prod_{p\leqslant y}\left(1+\frac{2}{\sqrt{p}-1}\right). \tag{3.4}$$

En effet, pour l'inégalité (a) [7],

$$\mathbb{1}_{[1,x]}(k) + \frac{x}{k}\mathbb{1}_{]x,\infty[}(k) \leqslant \left(\frac{x}{k}\right)^{1/2}.$$

---

6. Par exemple, lors d'une présentation à l'École Normale Supérieure de Paris, voir Delange (1961)
7. À noter que nous avons ici une racine carré car nous avons utilisé la méthode de Rankin. Elle consiste à majorer, à un coefficient près, une fonction indicatrice par un terme plus grand que 1 lorsque la condition de l'indication est vérifiée et par un terme plus grand que 0 sinon. Nous aurions donc pu choisir n'importe quel exposant de $]0,1[$ (pour plus de détails voir Tenenbaum (2022)).

Et puisque h_y est une fonction multiplicative, en développant, nous obtenons

$$\sqrt{x}\sum_{k\geqslant 1}\frac{|h_y(k)|}{\sqrt{k}}=\sqrt{x}\prod_{p\leqslant y}\left(1+\sum_{\nu\geqslant 1}\frac{|h_y(p^\nu)|}{p^{\nu/2}}\right).$$

De là, puisque $|h_y(p^\nu)|=|g_y(p^\nu)-g_y(p^{\nu-1})|\leqslant 2$, nous avons l'inégalité (b). En effet,

$$\begin{aligned}\sqrt{x}\prod_{p\leqslant y}\left(1+\sum_{\nu\geqslant 1}\frac{|h_y(p^\nu)|}{p^{\nu/2}}\right)&\leqslant\sqrt{x}\prod_{p\leqslant y}\left(1+\frac{2}{p^{1/2}}+\frac{2}{p}+\frac{2}{p^{3/2}}+\cdots\right)\\ &=\sqrt{x}\prod_{p\leqslant y}\left(1+\frac{2}{\sqrt{p}-1}\right).\end{aligned}\tag{3.5}$$

Nous remarquons que par l'encadrement $\lfloor x\rfloor\leqslant x\leqslant\lfloor x\rfloor+1$, l'inégalité triangulaire et le fait que

$$\sum_{k\leqslant x}\frac{x}{k}|h_y(k)|\geqslant\sum_{k\leqslant x}|h_y(k)|$$

nous obtenons, pour tout y fixé :

$$\sum_{k\leqslant x}h_y(k)\left\lfloor\frac{x}{k}\right\rfloor-\sum_{k\geqslant 1}h_y(k)\frac{x}{k}=O(H_y(x)).$$

De plus, puisque, à y fixé,

$$\frac{H_y(x)}{x}\overset{x\to\infty}{\longrightarrow}0,$$

nous avons

$$\sum_{k\geqslant 1}h_y(k)\frac{x}{k}+O(H_y(x))=x\left\{M(g_y)+o(1)\right\},$$

où

$$M(g_y):=\prod_{p\leqslant y}\left(1-\frac{1}{p}\right)\sum_{\nu\geqslant 0}\frac{g(p^\nu)}{p^\nu}.\tag{3.6}$$

En effet, à nouveau en développant k en facteurs premiers et en utilisant le fait que h est multiplicative, nous avons

$$\begin{aligned}\sum_{k\geqslant 1}\frac{h_y(k)}{k}&=\prod_{p\leqslant y}\left(1+\sum_{\nu\geqslant 1}\frac{h_y(p^\nu)}{p^\nu}\right)=\prod_{p\leqslant y}\left(1+\sum_{\nu\geqslant 1}\frac{g_y(p^\nu)}{p^\nu}-\sum_{\nu\geqslant 0}\frac{g_y(p^\nu)}{p^{\nu+1}}\right),\\ &=\prod_{p\leqslant y}\left(1-\frac{1}{p}+\left(1-\frac{1}{p}\right)\sum_{\nu\geqslant 1}\frac{g_y(p^\nu)}{p^\nu}\right),\\ &=\prod_{p\leqslant y}\left(1-\frac{1}{p}\right)\sum_{\nu\geqslant 0}\frac{g(p^\nu)}{p^\nu}.\end{aligned}\tag{3.7}$$

Puisque $h_y=g_y*\mu$ et donc $g_y=h_y*1$ il vient

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant x}g_y(n)&=\sum_{n\leqslant x}\sum_{dd'=n}h_y(d)\times 1=\sum_{n\leqslant x}\sum_{d|n}h_y(d)\\ &=\sum_{d\leqslant x}\sum_{\substack{n\equiv 0(d)\\ n\leqslant x}}h_y(d)=\sum_{d\leqslant x}h_y(d)\sum_{\substack{n\equiv 0(d)\\ n\leqslant x}}1=\sum_{d\leqslant x}h_y(d)\left\lfloor\frac{x}{d}\right\rfloor.\end{aligned}$$

On obtient finalement

$$\sum_{n\leqslant x} g_y(n) = \sum_{d\leqslant x} h_y(d)\left\lfloor\frac{x}{d}\right\rfloor = x\sum_{k\geqslant 1}\frac{h_y(k)}{k} + O(H_y(x)) = x(M(g_y)+o(1)). \tag{3.8}$$

C'est-à-dire

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x} g_y(n) = M(g_y)+o(1).$$

Ainsi, pour tout y fixé, g_y possède une valeur moyenne. Nous en déduisons que, pour toute fonction $A : \mathbb{N}\to\mathbb{R}$, nous avons

$$\sum_{n\leqslant x} g_y(n)\mathrm{e}^{-iA(y)} = x\left(M(g_y)\mathrm{e}^{-iA(y)} + \underset{x\to\infty}{o}(1)\right). \tag{3.9}$$

Considérons dorénavant les fonctions $r : n\in\mathbb{N}^*\mapsto |g(n)|$ et

$$\vartheta : p^\nu \mapsto \begin{cases}\arg(g(p^\nu)) & \text{si } g(p^\nu)\neq 0\\ 0 & \text{sinon,}\end{cases}$$

l'argument étant choisi dans $]-\pi,\pi]$.
Nous pouvons observer que la fonction r est multiplicative puisque g l'est et que la fonction ϑ est additive puisque sur l'intervalle $]-\pi,\pi]$ la fonction arg est additive (modulo 2π) et est composée avec g qui est multiplicative.
Posons également

$$A(x) \coloneqq \sum_{p\leqslant x}\frac{\vartheta(p)}{p}.$$

D'après (3.9) nous avons, pour tout $\varepsilon>0$, l'existance d'un x_0 suffisamment grand tel que pour tout $x\geqslant x_0$,

$$\left|\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x} g_y(n)\mathrm{e}^{-iA(y)} - M(g_y)\mathrm{e}^{-iA(y)}\right| < \varepsilon. \tag{3.10}$$

Nous voulons montrer que

$$\left\{M(g_y)\mathrm{e}^{-iA(y)}\right\}_{y\to\infty} \tag{3.11}$$

est une suite de Cauchy puisque cela implique la convergence du terme $M(g_y)\mathrm{e}^{-iA(y)}$ vers une limite $M\in\mathbb{R}$ lorsque y tend vers l'infini. Pour prouver que la suite est bien de Cauchy, nous allons choisir $y\leqslant z$, deux réels assez grands, et montrer que

$$\left|M(g_y)\mathrm{e}^{-iA(y)} - M(g_z)\mathrm{e}^{-iA(z)}\right| < \varepsilon.$$

En utilisant l'équation (3.10) et en prenant x réel tel que $y\leqslant z\leqslant x$, nous allons transferer notre étude des termes de la suite (3.11) vers l'étude de la première somme de l'inégalité (3.10). En résumé, il est suffisant de montrer que, pour $y\leqslant z\leqslant x$ avec y assez grand :

$$S(x,y,z) \coloneqq \frac{1}{x}\left|\sum_{n\leqslant x} g_z(n)\mathrm{e}^{-iA(z)} - \sum_{n\leqslant x} g_y(n)\mathrm{e}^{-iA(y)}\right| < \varepsilon. \tag{3.12}$$

Nous avons

$$S(x,y,z) \leqslant \frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}\left|g_z(n)\mathrm{e}^{-iA(z)} - g_y(n)\mathrm{e}^{-iA(y)}\right|$$
$$\overset{(c)}{\leqslant} \frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}\left|\mathrm{e}^{-i(A(z)-A(y))}\prod_{\substack{p^\nu\|n\\ y<p\leqslant z}} g(p^\nu) - 1\right|.$$

En effet, en utilisant le fait que g est multiplicative et en décomposant n en produit de facteurs premiers, nous écrivons

$$g_y(n) = \prod_{p^\nu\|n} g_y(p^\nu) = \prod_{\substack{p^\nu\|n\\ p\leqslant y}} g(p^\nu).$$

Nous obtenons alors, puisque $|g(n)|\leqslant 1$,

$$\sum_{n\leqslant x}\left|g_z(n)\mathrm{e}^{-iA(z)} - g_y(n)\mathrm{e}^{-iA(y)}\right| = \sum_{n\leqslant x}\left|\left(\prod_{\substack{p^\nu\|n\\ p\leqslant z}} g(p^\nu)\right)\mathrm{e}^{-iA(z)} - \left(\prod_{\substack{p^\nu\|n\\ p\leqslant y}} g(p^\nu)\right)\mathrm{e}^{-iA(y)}\right|$$
$$= \sum_{n\leqslant x}\left|\left(\prod_{\substack{p^\nu\|n\\ p\leqslant y}} g(p^\nu)\right)\mathrm{e}^{-iA(y)}\left\{\left(\prod_{\substack{p^\nu\|n\\ y<p\leqslant z}} g(p^\nu)\right)\mathrm{e}^{-i(A(z)-A(y))} - 1\right\}\right|$$
$$\overset{(c)}{\leqslant} \sum_{n\leqslant x}\left|\mathrm{e}^{-i(A(z)-A(y))}\prod_{\substack{p^\nu\|n\\ y<p\leqslant z}} g(p^\nu) - 1\right|.$$

Nous avons alors

$$S(x,y,z) \leqslant \frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}\left|\mathrm{e}^{-i(A(z)-A(y))}\prod_{\substack{p^\nu\|n\\ y<p\leqslant z}} |g(p^\nu)|\,\mathrm{e}^{i\vartheta(p^\nu)} - 1\right|.$$

Que nous réécrivons

$$S(x,y,z) \leqslant \frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}\left|\left(\prod_{\substack{p^\nu\|n\\ y<p\leqslant z}} |g(p^\nu)|\right)\mathrm{e}^{i\vartheta_{y,z}(n)-i(A(z)-A(y))} - 1\right|$$

où $\vartheta_{y,z}$ est la fonction additive définie par $\vartheta_{y,z}(p^\nu) \coloneqq \mathbb{1}_{]y,z]}(p)\vartheta(p^\nu)$. Or, par le Lemme 3.1 et le Corollaire 3.1 nous déduisons :

$$S(x,y,z) \leqslant \frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}\left|\prod_{\substack{p^\nu\|n\\ y<p\leqslant z}} |g(p^\nu)| - 1\right| + \frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}\left|\mathrm{e}^{i(A(z)-A(y)-\vartheta_{y,z}(n))} - 1\right|$$
$$\leqslant \frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}\sum_{\substack{p^\nu\|n\\ y<p\leqslant z}} \big||g(p^\nu)| - 1\big| + \frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}\left|\mathrm{e}^{i(A(z)-A(y)-\vartheta_{y,z}(n))} - 1\right|$$
$$= \frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}\sum_{\substack{p^\nu\|n\\ y<p\leqslant z}} (1 - r(p^\nu)) + \frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}\left|\mathrm{e}^{i(A(z)-A(y)-\vartheta_{y,z}(n))} - 1\right|,$$

Puisque nous avons :

$$|\mathrm{e}^{iu}-1|=\left|\int_0^u \mathrm{e}^{it}\mathrm{d}t\right|\leqslant |u| \qquad (u\in\mathbb{R}), \tag{3.13}$$

alors

$$\sum_{n\leqslant x}\left|\mathrm{e}^{i(A(z)-A(y)-\vartheta_{y,z}(n))}-1\right|\leqslant \sum_{n\leqslant x}|A(z)-A(y)-\vartheta_{y,z}(n)|\,.$$

Donc, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}|A(z)-A(y)-\vartheta_{y,z}(n)| &\leqslant \frac{1}{x}\left(\sum_{n\leqslant x}1\right)^{1/2}\left(\sum_{n\leqslant x}|A(z)-A(y)-\vartheta_{y,z}(n)|^2\right)^{1/2}\\ &\leqslant \left(\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}(A(z)-A(y)-\vartheta_{y,z}(n))^2\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

De plus, par inversion de sommations nous obtenons

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant x}\sum_{\substack{p^\nu\|n\\ y<p\leqslant z}}1-r(p^\nu) &= \sum_{\substack{p^\nu\leqslant x\\ y<p\leqslant z}}(1-r(p^\nu))\sum_{\substack{n\leqslant x\\ p^\nu\|n}}1\leqslant \sum_{\substack{p^\nu\leqslant x\\ y<p\leqslant z}}(1-r(p^\nu))\left(\left\lfloor\frac{x}{p^\nu}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{x}{p^{\nu+1}}\right\rfloor\right)\\ &\leqslant x\sum_{\substack{p^\nu\leqslant x\\ y<p\leqslant z}}\frac{1-r(p^\nu)}{p^\nu}=x\sum_{y<p\leqslant z}\frac{1-r(p)}{p}+x\sum_{\substack{\nu\geqslant 2\\ y<p\leqslant z\\ p^\nu\leqslant x}}\frac{1-r(p^\nu)}{p^\nu}\\ &\leqslant \sum_{y<p\leqslant z}\frac{1-r(p)}{p}+\sum_{\substack{y<p\leqslant z\\ p^\nu\leqslant x}}\sum_{\nu\geqslant 2}\frac{1}{p^\nu}\leqslant \sum_{y<p\leqslant z}\frac{1-r(p)}{p}+\sum_{y<p\leqslant z}\frac{1}{p(p-1)}\\ &\leqslant \sum_{y<p\leqslant z}\frac{1-r(p)}{p}+\underset{y\to\infty}{O}\left(\frac{1}{y}\right)\leqslant \sum_{y<p\leqslant z}\frac{1-\mathrm{Re}(g(p))}{p}+\underset{y\to\infty}{O}\left(\frac{1}{y}\right).\end{aligned}$$

Ainsi,

$$S(x,y,z)\leqslant \sum_{y<p\leqslant z}\frac{1-\mathrm{Re}(g(p))}{p}+\left(\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}(A(z)-A(y)-\vartheta_{y,z}(n))^2\right)^{1/2}+\underset{y\to\infty}{O}\left(\frac{1}{y}\right).$$

Nous voulons estimer la deuxième somme à l'aide de l'inégalité de Turán-Kubilius (2.1). Mais avant cela, observons qu'ici, la différence

$$A(z)-A(y)=\sum_{y<p\leqslant z}\frac{\vartheta(p)}{p}$$

n'est définie que sur la première puissance de p alors que dans l'énoncé de l'inégalité de Turán-Kubilius, les sommes contiennent toutes les puissances des entiers premiers. Écrivons alors, en gardant les notations du Lemme 2.1, pour une fonction additive f,

$$E(x)=\underbrace{\sum_{p\leqslant x}\frac{f(p)}{p}\left(1-\frac{1}{p}\right)}_{E_1(x)}+\underbrace{\sum_{p^\nu\leqslant x,\nu\geqslant 2}\frac{f(p^\nu)}{p^\nu}\left(1-\frac{1}{p}\right)}_{E_2(x)}.$$

De même, écrivons

$$D(x)^2 = \underbrace{\left(\sum_{p \leqslant x} \frac{|f(p)|^2}{p}\right)}_{D_1(x)^2} + \underbrace{\left(\sum_{p^\nu \leqslant x, \nu \geqslant 2} \frac{|f(p^\nu)|^2}{p^\nu}\right)}_{D_2(x)^2}.$$

L'inégalité de Turán-Kubilius implique

$$\frac{1}{x}\sum_{n \leqslant x} (f(n) - E_1(x))^2 \ll D_1(x)^2 + D_2(x)^2 + E_2(x)^2.$$

Dans notre situation,

$$f(n) = \vartheta_{y,z}(n),$$

$$E_1(x) = \sum_{y<p\leqslant z} \frac{\vartheta(p)}{p} = A(z) - A(y),$$

$$E_2(x) = \sum_{\substack{y<p\leqslant z\\ p^\nu \leqslant x\\ \nu\geqslant 2}} \frac{\vartheta(p^\nu)}{p^\nu} \overset{(d)}{\ll} \sum_{y<p\leqslant z}\sum_{\nu\geqslant 2}\frac{1}{p^\nu} \ll \sum_{y<p\leqslant z}\frac{1}{p^2} \leqslant \sum_{y<n}\frac{1}{n^2} \ll \frac{1}{y},$$

où (d) est vrai puisque $|\vartheta(p^\nu)| \leqslant \pi$. De manière similaire,

$$D_2(x)^2 \ll \frac{1}{y}.$$

En reportant ces inégalités dans l'inégalité de Turán-Kubilius, nous obtenons

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}(\vartheta_{y,z}(n) - (A(z)-A(y)))^2 \ll \frac{1}{y} + \sum_{y<p\leqslant z}\frac{\vartheta(p)^2}{p}.$$

Et ainsi,

$$S(x,y,z) \ll \sum_{y<p\leqslant z}\frac{1-\mathrm{Re}(g(p))}{p} + \sqrt{\frac{1}{y} + \sum_{y<p\leqslant z}\frac{\vartheta(p)^2}{p}} + \frac{1}{y}.$$

Comme $\sqrt{a+b} \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b}$ et $1/y \leqslant 1/\sqrt{y}$, nous avons

$$S(x,y,z) \ll \sum_{y<p\leqslant z}\frac{1-\mathrm{Re}(g(p))}{p} + \frac{1}{\sqrt{y}} + \sqrt{\sum_{y<p\leqslant z}\frac{\vartheta(p)^2}{p}}. \tag{3.14}$$

Nous pouvons remarquer que, pour tout nombre premier p,

$$\vartheta(p)^2 \leqslant \pi^2\{1 - \mathrm{Re}(g(p))\}. \tag{3.15}$$

En effet, ou bien $|\vartheta(p)| > \pi/2$, et alors $\mathrm{Re}(g(p)) \leqslant 0$ donc puisque l'argument a été choisi dans $]-\pi,\pi]$, nous avons

$$\vartheta(p)^2 \leqslant \pi^2 \leqslant \pi^2 \underbrace{\{1-\mathrm{Re}(g(p))\}}_{\geqslant 1}.$$

Ou bien, $|\vartheta(p)| \leqslant \pi/2$, et alors

$$1-\mathrm{Re}(g(p)) = 1 - \mathrm{Re}(|g(p)|\mathrm{e}^{i\vartheta(p)}) = 1 - \underbrace{r(p)}_{\leqslant 1}\underbrace{\cos(\vartheta(p))}_{\geqslant 0} \geqslant 1-\cos(\vartheta(p)) \geqslant \frac{2\vartheta(p)^2}{\pi^2} \geqslant \frac{\vartheta(p)^2}{\pi^2},$$

où l'avant dernière inégalité découle de l'inégalité $2\sin^2(x/2) \geqslant 2(x/\pi)^2$. En injectant (3.15) dans (3.14), nous obtenons

$$\begin{aligned}\sum_{y<p\leqslant z} \frac{1-\mathrm{Re}(g(p))}{p} + \frac{1}{\sqrt{y}} + \sqrt{\sum_{y<p\leqslant z} \frac{\vartheta(p)^2}{p}} \\ \leqslant \sum_{y<p\leqslant z} \frac{1-\mathrm{Re}(g(p))}{p} + \frac{1}{\sqrt{y}} + \pi\sqrt{\sum_{y<p\leqslant z} \frac{1-\mathrm{Re}(g(p))}{p}} \\ \leqslant \sum_{y<p} \frac{1-\mathrm{Re}(g(p))}{p} + \frac{1}{\sqrt{y}} + \pi\sqrt{\sum_{y<p} \frac{1-\mathrm{Re}(g(p))}{p}}.\end{aligned}$$

Or par l'hypothèse du Théorème (3.1), $\sum_{y<p}(1-\mathrm{Re}(g(p)))/p$ tend vers 0 lorsque y tend vers l'infini comme reste d'une série convergente. Donc la racine carrée de cette somme la domine. Nous obtenons donc

$$S(x,y,z) \ll \eta(y) := \frac{1}{\sqrt{y}} + \pi\sqrt{\sum_{y<p} \frac{1-\mathrm{Re}(g(p))}{p}}.$$

C'est-à-dire

$$S(x,y,z) = o(1), \qquad (y \to \infty). \tag{3.16}$$

Notons que cette estimation de l'erreur de la différence contenue dans $S(x,y,z)$ ne dépend pas de z. Donc, pour tout $z \geqslant y$, la majoration (3.16) reste valide. Ainsi le critère de Cauchy est vérifié pour $M(g_y)\mathrm{e}^{-iA(y)}$ puisque d'après (3.10) et (3.12), nous avons montré que pour tout $\delta > 0$, il existe un rang n_0 tel que pour tout $y > n_0$,

$$\left|M(g_y)\mathrm{e}^{-iA(y)} - M(g_z)\mathrm{e}^{-iA(z)}\right| \leqslant 2\varepsilon + |S(x,y,z)| \leqslant \delta.$$

D'où l'existence d'un $M \in \mathbb{C}$ tel que

$$M(g_y)\mathrm{e}^{-iA(y)} = M + o(1), \qquad (y \to \infty). \tag{3.17}$$

En choisissant $z = x$ dans $S(x,y,z)$ et en remarquant que $g_x(n) = g(n)$ pour $n \leqslant x$, il vient

$$\left|\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x} g(n)\mathrm{e}^{-iA(x)} - \frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x} g_y(n)\mathrm{e}^{-iA(y)}\right| = o(1) \qquad (y \to \infty)$$

C'est-à-dire

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x} g(n)\mathrm{e}^{-iA(x)} = \frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x} g_y(n)\mathrm{e}^{-iA(y)} + o(1) \qquad (y \to \infty) \tag{3.18}$$

En passant à la limite $[x \to \infty]$ dans l'équation (3.18) en utilisant (3.9), nous obtenons

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x} g(n)\mathrm{e}^{-iA(x)} = M(g_y)\mathrm{e}^{-iA(y)} + o(1) \qquad (y \to \infty).$$

De plus, en passant à la limite $[y \to \infty]$ dans l'expression précédente en utilisant (3.17), nous obtenons

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x} g(n)\mathrm{e}^{-iA(x)} = M = \lim_{x\to\infty} M(g_x)\mathrm{e}^{-iA(x)}.$$

Donc
$$\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x} g(n)\mathrm{e}^{-iA(x)} = M(g_x)\mathrm{e}^{-iA(x)} + o(1) \qquad (x\to\infty).$$
C'est-à-dire,
$$\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x} g(n) = M(g_x) + o(1) \qquad (x\to\infty),$$
ce qui est exactement, d'après la définition (3.6) de M,
$$\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x} g(n) = \prod_{p\leqslant x}\left(1-\frac{1}{p}\right)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{g(p^\nu)}{p^\nu} + o(1), \qquad (x\to\infty).$$
□

3.3 Une variante effective du théorème de Delange

Pour démontrer le théorème d'Erdős-Kac (Théorème 4.1 *infra*), nous devons tout d'abord énoncer une variante effective du théorème de Delange (Théorème 3.2). Pour ce faire, nous allons considérer une famille $\{g_x : x \geqslant 2\}$ de fonctions multiplicatives de module au plus 1 vérifiant une certaine hypothèse, et nous allons montrer que la formule asymptotique 3.2 reste vraie uniformément pour $x \geqslant 2$.

Dans la suite de ce document nous noterons $y = y(x) := x^{1/\ln_2 x}$.

Propriété 3.3. Soit $\{g_x ; x \geqslant 2\}$ une famille de fonctions multiplicatives de module au plus 1 telle que

$$\lim_{x\to\infty}\sum_{y<p\leqslant x}\frac{|g_x(p)-1|}{p} = 0. \tag{3.19}$$

Alors

$$\sum_{n\leqslant x} g_x(n) = x\prod_{p\leqslant x}\left(1-\frac{1}{p}\right)\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{g_x(p^\nu)}{p^\nu} + o(x), \qquad (x\to\infty). \tag{3.20}$$

Démonstration. Désignons par $\mathscr{A}(x)$ la classe des fonctions multiplicatives G, à valeurs dans le disque unité et satisfaisant $G(p^\nu) = 1$ pour tout $p > y$ et $\nu \geqslant 1$.
Étape 1 : Montrons que, uniformément pour $x \geqslant 2$ et $G \in \mathscr{A}(x)$, nous avons

$$\sum_{n\leqslant x} G(n) = x\prod_{p\leqslant y}\left(1-\frac{1}{p}\right)\sum_{\nu\geqslant 0}\frac{G(p^\nu)}{p^\nu} + \underset{x\to\infty}{O}\left(\frac{x}{\ln x}\right). \tag{3.21}$$

À l'instar de la démonstration effectuée à la section précédente, nous allons poser $h = \mu * G$, où μ désigne la fonction de Möbius.

D'après (3.3), nous avons

$$\begin{cases} h(p^\nu) = 0 & \text{si } \nu \geqslant 1 \text{ et } p > y \\ |h(p^\nu)| \leqslant 2 & \text{si } \nu \geqslant 1 \text{ et } p \leqslant y. \end{cases}$$

Nous retrouvons également, d'après (3.7) et (3.8),

$$\sum_{n\leqslant x} G(n) = \sum_{d\leqslant x} h(d) \left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor = x \sum_{d\geqslant 1} \frac{h(d)}{d} + R = x \prod_{p\leqslant y} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{\nu\geqslant 0} \frac{G(p^\nu)}{p^\nu} + R$$

où R vérifie, d'après (3.4),

$$|R| \leqslant \sum_{k\leqslant x} |h(k)| + x \sum_{k>x} \frac{|h(k)|}{k} \leqslant \sum_{k\geqslant 1} |h(k)| \left(\frac{x}{k}\right)^\alpha, \qquad 0 < \alpha < 1.$$

Le facteur $(x/n)^\alpha$ est à nouveau inspiré de la méthode de Rankin (voir Note page 13). Ici, comme nous le verrons plus tard, α dépendra de x et va tendre vers 1 lorsque x tendra vers l'infini.

Nous pouvons à présent généraliser l'équation (3.5) correspondant au choix $\alpha = 1/2$. En effet,

$$x^\alpha \prod_{p\leqslant y} \left(1 + \sum_{\nu\geqslant 1} \frac{|h(p^\nu)|}{p^{\nu\alpha}}\right) \leqslant x^\alpha \prod_{p\leqslant y} \left(1 + \frac{2}{p^\alpha - 1}\right).$$

D'où

$$|R| \leqslant x^\alpha \prod_{p\leqslant y} \left(1 + \frac{2}{p^\alpha - 1}\right).$$

Or puisque $1 + u \leqslant \exp(u)$, nous avons

$$|R| \ll x^\alpha \prod_{p\leqslant y} \exp\left(\frac{2}{p^\alpha}\right) = x^\alpha \exp\left(\sum_{p\leqslant y} \frac{2}{p^\alpha}\right). \tag{3.22}$$

Comme $y = x^{1/\ln_2 x}$, il vient

$$\ln y = \frac{\ln x}{\ln_2 x}.$$

En prenant

$$\alpha = 1 - \frac{C \ln_2 x}{\ln x} = 1 - \frac{C}{\ln y},$$

nous avons

$$x^\alpha = x^{1 - C(\ln_2 x)/\ln x} = \frac{x}{(\ln x)^C}.$$

où $C > 0$ est une constante que nous déterminerons plus tard. Écrivons alors

$$\sum_{p\leqslant y} \frac{1}{p^\alpha} = \sum_{p\leqslant y} \frac{1}{p} + \sum_{p\leqslant y} \frac{p^{1-\alpha} - 1}{p}.$$

Par sommation d'Abel, nous obtenons

$$\sum_{p\leqslant y} \frac{1}{p^\alpha} = \ln_2 y + O(1).$$

D'où,

$$\exp\left\{2 \sum_{p\leqslant y} \frac{1}{p^\alpha}\right\} = \exp\left\{2 \ln_2 y + O(1)\right\} \ll (\ln y)^2.$$

En reportant dans l'equation (3.22), nous obtenons

$$|R| \ll x^{\alpha}(\ln y)^2.$$

En choisissant $C = 3$, nous obtenons

$$x^{\alpha}(\ln y)^2 = \frac{x}{(\ln x)^3}\left(\frac{\ln x}{\ln_2 x}\right)^2 \leqslant \frac{x}{\ln x}$$

Donc

$$R \ll \frac{x}{\ln x}.$$

d'où (3.21).

<u>*Étape 2 :*</u> Montrons que sous l'hypothèse (3.19), nous obtenons bien la formule annoncée (3.20).

Posons

$$G_x(n) \coloneqq \prod_{\substack{p\leqslant y \\ p^{\nu}\|n}} g_x(p^{\nu}).$$

Nous avons

$$\begin{aligned}|g_x(n) - G_x(n)| &= \left|\prod_{p^{\nu}\|n} g_x(p^{\nu}) - \prod_{\substack{p\leqslant y \\ p^{\nu}\|n}} g_x(p^{\nu})\right| = \left|\prod_{\substack{p\leqslant y \\ p^{\nu}\|n}} g_x(p^{\nu})\left(1 - \prod_{\substack{p>y \\ p^{\nu}\|n}} g_x(p^{\nu})\right)\right| \\ &\leqslant \left|\prod_{\substack{p>y \\ p^{\nu}\|n}} g_x(p^{\nu}) - 1\right|.\end{aligned}$$

Ainsi, par le Lemme (3.1),

$$|g_x(n) - G_x(n)| \leqslant \sum_{\substack{p>y \\ p^{\nu}\|n}} |g_x(p^{\nu}) - 1|.$$

En sommant, nous obtenons

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant x} |g_x(n) - G_x(n)| &\leqslant \sum_{n\leqslant x}\sum_{\substack{p>y \\ p^{\nu}\|n}} |g_x(p^{\nu}) - 1| = \sum_{\substack{y<p\leqslant x \\ \nu\geqslant 1}} |g_x(p^{\nu}) - 1| \sum_{\substack{k\leqslant x/p^{\nu} \\ k\equiv 0(p)}} 1 \\ &= x\sum_{y<p\leqslant x} \frac{|g_x(p^{\nu}) - 1|}{p^{\nu}} = o(x) \qquad (x \to \infty).\end{aligned}$$

Mais, puisque G_x vérifie les hypothèses de la première étape, d'après l'équation (3.21) nous pouvons écrire

$$\sum_{n\leqslant x} G_x(n) = x\prod_{p\leqslant y}\left(1 - \frac{1}{p}\right)\sum_{\nu\geqslant 0}\frac{G_x(p^{\nu})}{p^{\nu}} + \underset{x\to\infty}{O}\left(\frac{x}{\ln x}\right).$$

De plus, pour $p \leqslant y$, nous avons $G_x(p^{\nu}) = g_x(p^{\nu})$ par définition de G_x. Donc nous en concluons l'égalité suivante :

$$\sum_{n\leqslant x} g_x(n) = \sum_{n\leqslant x} G_x(n) + \underset{x\to\infty}{o}(x) = x\prod_{p\leqslant y}\left(1 - \frac{1}{p}\right)\sum_{\nu\geqslant 0}\frac{g_x(p^{\nu})}{p^{\nu}} + \underset{x\to\infty}{o}(x).$$

Notons que ce produit porte sur $p \leqslant y$ et nous voulons considérer tout premier p au plus égaux à x. Interessons-nous donc au produit suivant :

$$\prod_{y<p\leqslant x}\left(1-\frac{1}{p}\right)\sum_{\nu\geqslant 0}\frac{g_x(p^\nu)}{p^\nu} \tag{3.23}$$

Nous avons

$$\begin{aligned}\prod_{y<p\leqslant x}\left(1-\frac{1}{p}\right)\sum_{\nu\geqslant 0}\frac{g_x(p^\nu)}{p^\nu} &= \prod_{y<p\leqslant x}\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1+\frac{g_x(p)}{p}+O\left(\frac{1}{p^2}\right)\right)\\ &= \prod_{y<p\leqslant x}\left(1+\frac{g_x(p)-1}{p}+O\left(\frac{1}{p^2}\right)\right).\end{aligned}$$

De plus, comme $|1+u|= \mathrm{e}^{u+O(u^2)}$ pour tout $|u|\ll 1$,

$$\begin{aligned}\prod_{y<p\leqslant x}\left(1-\frac{1}{p}\right)\sum_{\nu\geqslant 0}\frac{g_x(p^\nu)}{p^\nu} &= \prod_{y<p\leqslant x}\exp\left(\frac{g_x(p)-1}{p}+O\left(\frac{1}{p^2}\right)\right)\\ &= \exp\left(\sum_{y<p\leqslant x}\frac{g_x(p)-1}{p}+O\left(\frac{1}{p^2}\right)\right).\end{aligned}$$

Or d'après l'hypothèse (3.19), le terme $\sum\limits_{y<p\leqslant x}(g(p)-1)/p$ tend vers 0 lorsque x vers l'infini, d'où

$$\prod_{y<p\leqslant x}\left(1-\frac{1}{p}\right)\sum_{\nu\geqslant 0}\frac{g_x(p^\nu)}{p^\nu} = \exp\left(\underset{x\to\infty}{o}(1)\right) = 1+o(1), \qquad (x\to\infty).$$

D'où le résultat. $\square$

4 Le théorème d'Erdős-Kac

En 1939, Marc Kac donne une conférence à l'Insitut des études avancées de Princeton à laquelle assiste Paul Erdős. Il y développe en particulier sa pensée sur la répartition des facteurs premiers. En effet, il est persuadé que celle-ci cache une loi gaussienne. En choisissant un entier n et en représentant la proportion des entiers inférieurs à n ayant k facteurs premiers en fonction de k, nous pouvons en effet voir une courbe en cloche se dessiner. Pour plus de détails ou pour observer les graphiques correspondant, étudier Mathieu (2017). Quelques mois après cette conférence, Erdős et Kac démontrent le résultat suivant.

Théorème 4.1. (Erdős-Kac, 1939).
Pour tout $\tau \in \mathbb{R}$, nous avons

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\left|\left\{n\leqslant x : \omega(n)\leqslant \ln_2 x+\tau\sqrt{(\ln_2 x)}\right\}\right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\tau}\mathrm{e}^{-t^2/2}\,dt.$$

En théorie des nombres, le théorème d'Erdős-Kac énonce une convergence faible des fréquences associées à la fonction additive $\omega(n)$. Il peut se lire comme suit. La répartition des valeurs prises par $\omega(n)$ pour $n\geqslant 1$ tend vers une loi normale $\mathcal{N}(\ln_2 n, \ln_2 n)$ de moyenne $\ln_2 n$ et d'écart-type $\sqrt{\ln_2 n}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Nous allons démontrer ce théorème en trois étapes. Tout d'abord nous allons nous intéresser à la fonction $\omega_y(n)$ dénombrant le nombre de facteurs premiers p de n tels que $p\leqslant y$.

4.1 Étape 1 : étude de la fonction tronquée

Nous nous intéressons à une convergence faible (ou dite *en loi*) de variables aléatoires. Nous alors donc nous observer la convergence simple de leurs fonctions caractéristiques. Cette remarque nous invite à étudier la somme suivante

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}\mathrm{e}^{i\tau(\omega_y(n)-\ln_2 x)/\sqrt{\ln_2 x}},$$

où $y\in\mathbb{R}$ et $\omega_y(n)$ est définie par

$$\omega_y(n) \coloneqq \sum_{p|n,\ p\leqslant y} 1$$

Nous avons

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}\mathrm{e}^{i\tau(\omega_y(n)-\ln_2 x)/\sqrt{\ln_2 x}} = \frac{\mathrm{e}^{-i\tau\sqrt{\ln_2 x}}}{x}\sum_{n\leqslant x}\mathrm{e}^{i\tau\omega_y(n)/\sqrt{\ln_2 x}}.$$

Posons alors

$$\tau_x = \frac{\tau}{\sqrt{\ln_2 x}},$$

et

$$g_x(n,\tau) = \mathrm{e}^{i\omega_y(n)\tau_x}.$$

La fonction $\omega_y(n)$ étant additive,

$$\begin{aligned} g_x(nm,\tau) &= \mathrm{e}^{i\omega_y(nm)\tau_x} \\ &= \mathrm{e}^{i\tau_x(\omega_y(n)+\omega_y(m))} = g_x(n,\tau)g_x(m,\tau). \end{aligned}$$

Donc $g_x(n,\tau)$ est multiplicative. De plus, d'après (3.13), nous avons, comme $\omega_y(p^\nu)=1$ si $\nu\geqslant 1$ et 0 sinon,

$$\sum_{y<p\leqslant x}\frac{|1-g_x(p,\tau)|}{p} \leqslant \sum_{y<p\leqslant x}\frac{|\tau_x|}{p} = |\tau_x|\sum_{y<p\leqslant x}\frac{1}{p}.$$

Puisque

$$\sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p}\sim \ln_2 x,$$

nous en déduisons, pour τ fixé,

$$\sum_{y<p\leqslant x}\frac{|1-g_x(p,\tau)|}{p} \leqslant |\tau_x|\ln_3 x = \tau\frac{\ln_3 x}{\sqrt{\ln_2 x}} \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Remarquons également que,

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{g_x(p^\nu,\tau)}{p^\nu} = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{i\tau_x\omega_y(p^\nu)}}{p^\nu} = 1+\mathrm{e}^{i\tau_x}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{p^\nu} = 1+\frac{\mathrm{e}^{i\tau_x}}{p-1}.$$

Cela implique

$$\left(1-\frac{1}{p}\right)\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{g_x(p^\nu,\tau)}{p^\nu} = \left(1+\frac{g_x(p,\tau)-1}{p}\right).$$

Utilisons le résultat (3.3) sur la famille $\{\mathrm{e}^{i\tau_x\omega_y(n)}, x\geqslant 2\}$. En effet, cette famille vérifie l'hypothèse (3.1) puisque, à τ fixé,

$$\sum_{y<p\leqslant x}\frac{|\mathrm{e}^{i\tau_x\omega_y(p)}-1|}{p} \ll \frac{|\tau|}{\sqrt{\ln_2 x}}\sum_{y<p\leqslant x}\frac{1}{p}\sim\frac{|\tau|\ln_3 x}{\sqrt{\ln_2 x}} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Nous obtenons

$$\begin{aligned}
\sum_{n\leqslant x} g_x(n,\tau) &= x\prod_{p\leqslant x}\left(1-\frac{1}{p}\right)\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{g_x(p^\nu,\tau)}{p^\nu}+o(x)\\
&= x\prod_{p\leqslant x}\left(1+\frac{g_x(p,\tau)-1}{p}\right)+o(x)\\
&= x\prod_{p\leqslant x}\left(1+\frac{\mathrm{e}^{i\tau_x}-1}{p}\right)+o(x)\\
&= x\exp\left\{\sum_{p\leqslant x}\frac{\mathrm{e}^{i\tau_x}-1}{p}+O\left(\frac{\tau_x^2}{p^2}\right)\right\}+o(x) \qquad (x\to\infty).
\end{aligned}$$

En développant $\mathrm{e}^{i\tau_x}$ à l'ordre 2, et toujours puisque $\sum_{p\leqslant x} 1/p \sim \ln_2 x$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x} g_x(n,\tau) &= \exp\left\{\sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p}\left(i\tau_x-\frac{\tau_x^2}{2}+O\left(\tau_x^3\right)\right)+O\left(\tau_x^3\right)\right\}+o(1)\\
&= \exp\left\{i\tau_x\ln_2 x-\frac{\tau_x^2\ln_2 x}{2}+O\left(\tau_x^3\ln_2 x\right)\right\}+o(1) \qquad (x\to\infty)\\
&= \exp\left\{i\tau\sqrt{\ln_2 x}-\frac{\tau^2}{2}+o(1)\right\}+o(1).
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Finalement,

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}\mathrm{e}^{i\tau(\omega_y(n)-\ln_2 x)/\sqrt{\ln_2 x}} = \mathrm{e}^{-\tau^2/2}+o(1) \qquad (x\to\infty). \tag{4.2}$$

Donc nous avons le résultat puisque le Théorème 1.14 implique que la variable

$$\frac{\omega_y(n)-\ln_2 x}{\sqrt{\ln_2 x}}$$

de fonction caractéristique

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}\mathrm{e}^{i\tau(\omega_y(n)-\ln_2 x)/\sqrt{\ln_2 x}}$$

converge en loi vers la gaussienne sur Ω_x muni de la loi uniforme.

4.2 Étape 2 : recherche d'un terme d'erreur

Remarquons qu'à la conclusion de l'étape précédente, nous n'avons pas de terme d'erreur. Autrement dit, nous n'avons aucune information sur la vitesse de convergence de la fonction de répartition de la variable

$$\frac{\omega_y(n)-\ln_2 x}{\sqrt{\ln_2 x}}$$

vers celle du modèle de la répartition normale centrée réduite. Le théorème de Rényi and Turán (1958) montre que le terme d'erreur optimal est $O\left(1/\sqrt{\ln_2 x}\right)$.

Nous allons rechercher un terme d'erreur en utilisant l'inégalité de Berry-Esseen pour ensuite le comparer à ce résultat. Rappelons d'abord les définitions suivantes.

Définition 4.2. Si F est une fonction de répartition sur $\mathbb{R}$, sa *transformée de Fourier-Stieltjes* est donnée par la formule

$$f(\tau) \coloneqq \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{i\tau x} \mathrm{d}F(x).$$

La fonction f ainsi définie est la fonction caractéristique de la fonction F.

Définition 4.3. Si F est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$, sa *transformée de Fourier* est donnée par la formule

$$\hat{F}(\tau) \coloneqq \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-i\tau x} F(x) \mathrm{d}x.$$

4.2.1 Lemmes

Lemme 4.1. (Ganelius) Soit g une fonction intégrable et bornée sur $\mathbb{R}$. Nous supposons qu'il existe un réel T positif tel que

$$\sup_{x \leqslant y \leqslant x+1/T} \{g(y) - g(x)\} \leqslant K \in \mathbb{R}, \tag{4.3}$$

et pour tout $|\tau| \leqslant T$

$$\hat{g}(\tau) \coloneqq \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-i\tau x} g(x) \mathrm{d}x = 0.$$

Alors

$$\|g\|_\infty \ll K.$$

Démonstration. Tout d'abord supposons $T = 1$. La deuxième hypothèse implique, pour τ réel,

$$\hat{g}(\tau)\hat{\chi}(\tau) = 0$$

pour toute fonction χ intégrable dont la transformée de Fourier est à support inclus dans $[-1, 1]$. Remarquons que cette égalité entraîne que le produit de convolution $g * \chi$ est nul puisque la transformée de Fourier d'un produit de convolution est le produit des transformées de Fourier et que l'application à qui une fonction associe sa transformée de Fourier est injective. Choisissons

$$\chi(t) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\sin(t/2)}{t/2} \right)^2.$$

Observons que cette application est bien à support dans $[0, 1/2\pi] \subset [-1, 1]$ en temps que carré d'un sinus cardinal. Sa transformée de Fourier s'écrit alors

$$\hat{\chi}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-i\tau x} \left(\frac{\sin(x/2)}{x/2} \right)^2 \mathrm{d}x.$$

Pour calculer cette intégrale nous procédons comme suit.

$$\begin{aligned}\hat{\chi}(\tau) &= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-i\tau x}}{x^2}\,(1-\cos(x))\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{-1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-i\tau x}}{x^2}\left(\mathrm{e}^{ix}+\mathrm{e}^{-ix}-2\right)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

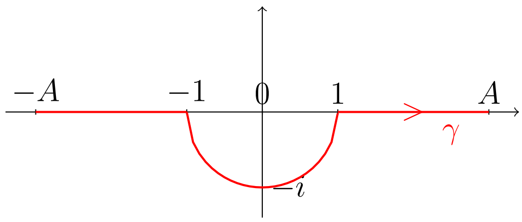
Soit $A>0$ fixé. Puisque l'intégrande est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$, nous avons

$$\int\limits_{-A}^{A} \frac{\mathrm{e}^{-i\tau x}}{x^2}\left(\mathrm{e}^{ix}+\mathrm{e}^{-ix}-2\right)\mathrm{d}x = \int\limits_{\gamma} \frac{\mathrm{e}^{-i\tau z}}{z^2}\left(\mathrm{e}^{iz}+\mathrm{e}^{-iz}-2\right)\mathrm{d}z = \Phi_A(1-\tau)+\Phi_A(-1-\tau)-2\Phi_A(-\tau)$$

où

$$\Phi_A(\tau) = \int\limits_{\gamma} \frac{\mathrm{e}^{i\tau z}}{z^2}\mathrm{d}z \qquad (\tau\in\mathbb{R}),$$

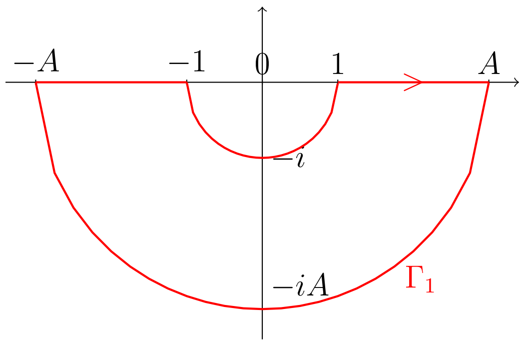
et γ est le chemin défini comme suit.

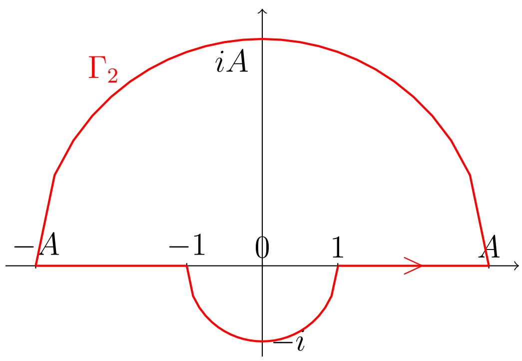


On calcule $\Phi_A(\tau)$ en appliquant le Théorème 1.13 à la fonction

$$\Psi : z \mapsto \frac{\mathrm{e}^{i\tau z}}{z^2}.$$

Cette fonction possède un unique pôle d'ordre 2 en $z=0$ avec pour résidu $i\tau$. Considérons alors les deux contours suivants.





où Γ_1 et Γ_2 sont parcourus dans le sens indirect et direct respectivement. Nous allons considérer l'un ou l'autre de ces deux chemins selon le signe de τ. En effet, pour $\theta \in [0, 2\pi]$, nous avons

$$\left|\Psi\left(A\mathrm{e}^{i\theta}\right)\right| = \left|\frac{\mathrm{e}^{i\tau A\mathrm{e}^{i\theta}}}{A^2\mathrm{e}^{2i\theta}}\right| = \frac{\mathrm{e}^{-\tau A\sin(\theta)}}{A^2}.$$

Ainsi, par convergence dominée, l'intégrale sur les grands demi-cercles que nous ajoutons à γ tendent vers 0 lorsque A tend vers l'infini si

$$\tau \geqslant 0 \text{ et } \theta \in [0, \pi] \qquad \text{ou} \qquad \tau < 0 \text{ et } \theta \in [\pi, 2\pi].$$

De plus, comme 0 n'est pas dans l'intérieur de Γ_1, nous avons par le Théorème 1.13

$$\int_{\Gamma_1} \frac{\mathrm{e}^{i\tau z}}{z^2}\mathrm{d}z = 0$$

Pour $\tau \geqslant 0$, nous avons encore grâce au Théorème 1.13

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{i\tau x}}{x^2}\mathrm{d}x = -2\pi\tau$$

Ainsi, pour $\tau < -1$,

$$\begin{cases} \Phi_A(1-\tau) = -2\pi(1-\tau) \\ \Phi_A(-1-\tau) = -2\pi(-1-\tau) \\ \Phi_A(-\tau) = 2\pi\tau. \end{cases}$$

Pour $-1 \leqslant \tau \leqslant 0$,

$$\begin{cases} \Phi_A(1-\tau) = -2\pi(1-\tau) \\ \Phi_A(-1-\tau) = 0 \\ \Phi_A(-\tau) = 2\pi\tau. \end{cases}$$

Pour $0 \leqslant \tau \leqslant 1$,

$$\begin{cases} \Phi_A(1-\tau) = -2\pi(1-\tau) \\ \Phi_A(-1-\tau) = 0 \\ \Phi_A(-\tau) = 0. \end{cases}$$

Pour $\tau > 1$, $\Phi_A(1-\tau) = \Phi_A(-1-\tau) = \Phi_A(-\tau) = 0$. Donc,

$$\hat{\chi}(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{si } \tau < -1 \\ 1+\tau & \text{si } -1 \leqslant \tau \leqslant 0 \\ 1-\tau & \text{si } 0 \leqslant \tau \leqslant 1 \\ 0 & \text{si } \tau > 1. \end{cases}$$

C'est-à-dire, $\hat{\chi}(\tau) = \max(1-|\tau|, 0)$. Nous aurons également besoin de l'inégalité suivante :

$$I := \int_{|t|>5} \chi(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{-5} \left(\frac{\sin(t/2)}{t/2}\right)^2 + \frac{1}{2\pi}\int_{5}^{+\infty} \left(\frac{\sin(t/2)}{t/2}\right)^2 \leqslant \frac{4}{\pi}\int_5^{\infty} \frac{1}{t^2} = \frac{4}{5\pi}. \tag{4.4}$$

Soit $0 < \varepsilon < 1$ un nombre réel fixé et $\theta = \pm 1$ tel que

$$\|g\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}}\{\theta g(x)\},$$

où $\|g\|_\infty$ existe car la fonction est bornée par hypothèse. Par définition du supremum, nous pouvons trouver un x_0 dépendant du choix de ε tel que $\theta g(x_0) \geqslant (1-\varepsilon)\|g\|_\infty$. Le produit de convolution de g et χ étant nul, en l'appliquant à $(x_0 - 5\theta)$, nous obtenons

$$\begin{aligned} 0 &= \theta \int_{-\infty}^{+\infty} g((x_0 - 5\theta) - t)\chi(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_{-5}^{5} \underbrace{\theta g(x_0)\chi(t)}_{\geqslant (1-\varepsilon)\|g\|_\infty} - \theta\{g(x_0) - g((x_0 - 5\theta) - t)\}\chi(t)\mathrm{d}t + \int_{|t|>5} \underbrace{\theta g((x_0 - 5\theta) - t)}_{\geqslant -\|g\|_\infty}\chi(t)\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

De plus, nous remarquons que pour $|t| \leqslant 5$, nous avons $-10 \leqslant -5 - t \leqslant 0$ ou $0 \leqslant 5 - t \leqslant 10$ selon que θ vaut 1 ou -1. Ainsi, par l'hypothèse (4.3) et toujours avec $T = 1$,

$$\theta\{g(x_0) - g((x_0 - 5\theta) - t)\} \leqslant \sup_{x \leqslant y \leqslant x+10} \{g(y) - g(x)\} \leqslant 10K$$

et

$$\int_{-5}^{5} \chi(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \chi(t)\mathrm{d}t - I = \pi^2 - I \geqslant 1 - I.$$

Nous obtenons finalement

$$0 \geqslant (1-\varepsilon)(1-I)\|g\|_\infty - 10K(1-I) - I\|g\|_\infty.$$

C'est-à-dire, en faisant tendre ε vers 0,

$$\|g\|_\infty \leqslant \frac{10K(1-I)}{1-2I} \ll K.$$

Pour le cas général $T > 0$, le raisonement est identique avec $g(x/T)$. $\square$

Lemme 4.2. Soit g une fonction intégrable et bornée sur $\mathbb{R}$. Sous l'hypothèse qu'il existe un réel T positif tel que

$$\sup_{x \leqslant y \leqslant x+1/T} \{g(y) - g(x)\} \leqslant K \in \mathbb{R},$$

nous avons

$$\|g\|_\infty \ll K + \int_{-T}^{T} |\hat{g}(\tau)|\mathrm{d}\tau.$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Posons

$$\alpha := \frac{2}{\pi\varepsilon t^2} \sin\left(\frac{\varepsilon t}{2}\right) \sin\left(\frac{(2T+\varepsilon)t}{2}\right). \tag{4.5}$$

Soit $f := g * \alpha$. Nous voulons appliquer le Lemme précédent à $g - f$. Nous avons

$$\hat{\alpha}(\tau) = \frac{2}{\pi\varepsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-i\tau x} \frac{1}{x^2} \sin\left(\frac{\varepsilon x}{2}\right) \sin\left(\frac{(2T+\varepsilon)x}{2}\right) \mathrm{d}x.$$

Après des calculs tout à fait similaires aux calculs fait pour expliciter $\hat{\chi}$ lors de la démonstration du Lemme 4.1, nous obtenons

$$\hat{\alpha}(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\tau| \leqslant T \\ \frac{T+\varepsilon-|\tau|}{\varepsilon} & \text{si } T < |\tau| \leqslant T+\varepsilon \\ 0 & \text{si } |\tau| > T+\varepsilon. \end{cases}$$

Puisque $\hat{f} = \hat{g}\hat{\alpha}$ est à support compact, nous avons successivement

$$\|f\|_\infty \leqslant \frac{1}{2\pi}\|\hat{f}\|_1.$$

et

$$\|\hat{f}\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |\hat{g}(\tau)\hat{\alpha}(\tau)|\mathrm{d}\tau = \int_{-T-\varepsilon}^{T+\varepsilon} |\hat{g}(\tau)\hat{\alpha}(\tau)|\mathrm{d}\tau \leqslant \int_{-T-\varepsilon}^{T+\varepsilon} |\hat{g}(\tau)|\mathrm{d}\tau,$$

il vient, par l'hypothèse (4.3)

$$\sup_{x\leqslant y\leqslant x+1/T} \{g(y) - f(y) - (g(x) - f(x))\} \leqslant K + \sup_{x\leqslant y\leqslant x+1/T} \{f(y) - f(x)\} \leqslant K + 2\|f\|_\infty.$$

Or, par le Lemme (4.1),

$$\|g\|_\infty \leqslant \|g-f\|_\infty + \|f\|_\infty \ll K + \|f\|_\infty \ll K + \int_{-T-\varepsilon}^{T+\varepsilon} |\hat{g}(\tau)|\mathrm{d}\tau$$

Et nous avons le résultat en faisant tendre ε vers 0. $\square$

4.2.2 L'inégalité de Berry-Esseen

Théorème 4.4. ***(Berry-Esseen)*** *Soient F, G deux fonctions de répartition, de fonctions caractéristiques respectives f, g. Supposons que G est dérivable et que G' est borné sur $\mathbb{R}$. Alors, nous avons, pour tout $T > 0$,*

$$\|F - G\|_\infty \ll \frac{1}{T} + \int_{-T}^{T} \left| \frac{f(\tau) - g(\tau)}{\tau} \right| d\tau.$$

Remarque 4.1. Cette borne n'est finie que si la fonction $|f - g|$ est intégrable pour la mesure $\mathrm{d}\tau/|\tau|$.

Démonstration. Posons $H := F - G$, et introduisons pour tout $\varepsilon > 0$, la fonction

$$H_\varepsilon(x) := -\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\varepsilon t}\mathrm{d}H(x-t) = \mathrm{e}^{-\varepsilon x}\int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{\varepsilon t}\mathrm{d}H(t). \tag{4.6}$$

H_ε est une fonction intégrable et sa transformée de Fourier est

$$\begin{aligned}\hat{H}_\varepsilon(\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-i\tau x} H_\varepsilon(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(\varepsilon+i\tau)x}\left(\int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{\varepsilon t}\mathrm{d}(F-G)(t)\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_t^{+\infty} \mathrm{e}^{-(\varepsilon+i\tau)x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{e}^{\varepsilon t}\mathrm{d}(F-G)(t) = \frac{f(-\tau) - g(-\tau)}{\varepsilon + i\tau}.\end{aligned}$$

Par une intégration par parties à partir de l'intégrale (4.6) en dérivant l'exponentielle, nous avons

$$H_\varepsilon(x) = H(x) - \varepsilon \mathrm{e}^{-\varepsilon x} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{\varepsilon t} H(t) \mathrm{d}t = H(x) - \varepsilon L(x,t), \tag{4.7}$$

où nous posons

$$L(x,t) \coloneqq \mathrm{e}^{-\varepsilon x} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{\varepsilon t} H(t) \mathrm{d}t.$$

Puisque F et G sont des fonctions de répartition, elles sont croissantes et vérifient les égalités $F(-\infty) = G(-\infty) = 0$ et $F(+\infty) = G(+\infty) = 1$. Nous en déduisons

$$H(-\infty) = 0, \tag{4.8}$$

$$\|H\|_\infty \leqslant 1.$$

Ainsi, en passant à la limite dans l'équation (4.6) et en utilisant un théorème d'inversion limite-intégrale et l'égalité (4.8) nous déduisons que

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} H_\varepsilon(x) = H(x).$$

Posons $\eta \coloneqq \|G'\|_\infty$. Nous avons par l'inégalité de Taylor-Lagrange

$$-G(x+y) + G(x) \geqslant -\eta y, \qquad (x \in \mathbb{R}, y > 0).$$

De plus, par croissance de F,

$$F(x+y) - F(x) \geqslant 0, \qquad (x \in \mathbb{R}, y > 0).$$

Ainsi

$$H(x+y) - H(x) \geqslant -\eta y, \qquad (x \in \mathbb{R}, y > 0).$$

De plus,

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x}(x,t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{ \mathrm{e}^{-\varepsilon x} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{\varepsilon t} H(t) \mathrm{d}t \right\} = -\varepsilon \mathrm{e}^{-\varepsilon x} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{\varepsilon t} H(t) \mathrm{d}t + H(x).$$

Puisque $\|H\|_\infty \leqslant 1$, il suit

$$\begin{aligned} \left| -\varepsilon \mathrm{e}^{-\varepsilon x} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{\varepsilon t} H(t) \mathrm{d}t + H(x) \right| &\leqslant \varepsilon \mathrm{e}^{-\varepsilon x} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{\varepsilon t} |H(t)| \mathrm{d}t + |H(x)| \\ &\leqslant \|H(x)\|_\infty \left(\varepsilon \mathrm{e}^{-\varepsilon x} \left[\frac{\mathrm{e}^{\varepsilon t}}{\varepsilon} \right]_{-\infty}^{x} + 1 \right) \leqslant 2. \end{aligned}$$

Nous avons alors

$$L(x+y,t) - L(x,t) \leqslant 2y.$$

En reportant dans l'équation (4.7), il vient pour tout réel x et $0 \leqslant y \leqslant 1/T$,

$$\begin{aligned} H_\varepsilon(x+y) - H_\varepsilon(x) &= H(x+y) - H(x) - \varepsilon(L(x+y,t) - L(x,t)) \\ &\geqslant -\eta y - 2\varepsilon y \geqslant -\frac{\eta + 2\varepsilon}{T}. \end{aligned}$$

En appliquant le Lemme 4.2 à $-H_\varepsilon$ avec $K := (\eta + 2\varepsilon)/T$, nous obtenons pour tout réel x,

$$|H_\varepsilon(x)| \ll \frac{\eta + 2\varepsilon}{T} + \int_{-T}^{T} \left| \frac{f(-\tau) - g(-\tau)}{\varepsilon + i\tau} \right| \mathrm{d}\tau.$$

En faisant tendre ε vers 0, nous aboutissons finalement à

$$\|F - G\|_\infty \ll \frac{1}{T} + \int_{-T}^{T} \left| \frac{f(\tau) - g(\tau)}{\tau} \right| \mathrm{d}\tau.$$

□

Nous souhaitons appliquer cette inégalité aux fonctions de répatitions figurantes dans le Théorème 4.1. Posons pour z réel et x entier

$$F_x(z) := \nu_x \left\{ n : \omega_y(n) \leqslant \ln_2 x + z\sqrt{\ln_2 x} \right\}$$

où ν_x désigne la mesure de probabilité uniforme sur $\mathbb{N}^*$. Notons également $\varphi_x(\tau)$ la fonction caractéristique correspondante, c'est-à-dire

$$\varphi_x(\tau) := \frac{1}{x} \sum_{n \leqslant x} \mathrm{e}^{i\tau(\omega_y(n) - \ln_2 x)/\sqrt{\ln_2 x}}.$$

Pour plus de lisibilité, posons finalement

$$\Phi(z) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} \mathrm{e}^{-t^2/2} \mathrm{d}t$$

la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite et $\varphi(\tau) := \mathrm{e}^{-\tau^2/2}$ sa fonction caractéristique.

L'inégalité de Berry-Esseen, applicable car Φ est dérivable de dérivée bornée, fournit alors

$$\sup_{z \in \mathbb{R}} |F_x(z) - \Phi(z)| \ll \frac{1}{T} + \int_{-T}^{T} \frac{|\varphi_x(\tau) - \varphi(\tau)|}{|\tau|} \mathrm{d}\tau.$$

Choisissons $T = \sqrt{\ln_2 x}$. Comme un facteur $|\tau|$ apparaît, il faut s'assurer que le numérateur est assez petit en 0 pour que l'intégrale reste petite. Scindons alors l'intégrale en trois selon que : $|\tau| \leqslant 1/\ln x$, $1/\ln x \leqslant |\tau| \leqslant 1/(\ln_2 x)^{1/6}$ ou $1/(\ln_2 x)^{1/6} \leqslant |\tau| \leqslant T$ et désignons ces intégrales par I_1, I_2 et I_3 respectivement.

Lorsque $|\tau| \leqslant 1/\ln x$, nous utilisons $\mathrm{e}^{ix} = 1 + O(x)$ pour écrire

$$\varphi_x(\tau) = \frac{1}{x} \sum_{n \leqslant x} \left(1 + O\left(\frac{\tau(\omega_y(n) - \ln_2 x)}{\sqrt{\ln_2 x}} \right) \right) = 1 + O\left(\frac{|\tau|}{x\sqrt{\ln_2 x}} \sum_{n \leqslant x} |\omega_y(n) - \ln_2 x| \right).$$

Or, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} \frac{1}{x\sqrt{\ln_2 x}} \sum_{n \leqslant x} |\omega_y(n) - \ln_2 x| &\leqslant \frac{1}{x\sqrt{\ln_2 x}} \left(\sum_{n \leqslant x} 1 \sum_{n \leqslant x} |\omega_y(n) - \ln_2 x|^2 \right)^{1/2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{\ln_2 x}} \left(\sum_{n \leqslant x} |\omega_y(n) - \ln_2 x|^2 \right)^{1/2} \end{aligned}$$

Et par l'inégalité de Turán-Kubilius,

$$\sum_{n\leqslant x}|\omega_y(n)-\ln_2 x|^2\ll x\ln_2 x.$$

D'où,

$$\frac{|\tau|}{x\sqrt{\ln_2 x}}\sum_{n\leqslant x}|\omega_y(n)-\ln_2 x|\ll|\tau|$$

et

$$\varphi_x(\tau)=1+O(|\tau|).$$

Ainsi,

$$I_1=\int_{-1/\ln x}^{1/\ln x}\frac{|1+O(|\tau|)-\varphi(\tau)|}{|\tau|}\mathrm{d}\tau=\int_{-1/\ln x}^{1/\ln x}\left(\frac{\tau^2}{2|\tau|}+O(1)\right)\mathrm{d}\tau\ll\int_{-1/\ln x}^{1/\ln x}\mathrm{d}\tau\ll\frac{1}{\ln x}.$$

Ensuite, en reprenant l'étape 1 de la démonstration du Théorème 3.21, nous avons

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}G_x(n)=\prod_{p\leqslant y}\left(1-\frac{1-G_x(p)}{p}\right)+O\left(\frac{1}{\ln x}\right)\qquad(x\to\infty).$$

En prenant alors $G_x(n)=\mathrm{e}^{i\tau_x\omega_y(n)}$ où $\tau_x=\tau/\sqrt{\ln_2 x}$ nous avons, en utilisant $|1+u|=\mathrm{e}^{u+O(u^2)}$ pour tout $|u|\leqslant 1$,

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}\mathrm{e}^{i\tau_x\omega_y(n)}=\exp\left\{-\sum_{p\leqslant y}\frac{1-\mathrm{e}^{i\tau_x}}{p}+O\left(\frac{\tau_x^2}{p^2}\right)\right\}.$$

Effectuons un développement limité de l'exponentielle à l'ordre 2

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}\mathrm{e}^{i\tau_x\omega_y(n)}&=\exp\left\{\left(\sum_{p\leqslant y}\frac{i\tau_x-\tau_x^2/2+O(\tau_x^3)}{p}\right)+O\left(\tau_x^2\sum_{p\leqslant y}\frac{1}{p^2}\right)\right\}\\&=\exp\left\{i\tau_x\ln_2 y-\frac{1}{2}\tau_x^2\ln_2 y+O\left(\tau_x^3\ln_2 y+\tau_x^2\right)\right\}\\&=\exp\left\{i\tau_x\ln_2 y-\frac{\tau^2\left(\ln_2 x-\ln_3 x\right)}{2\ln_2 x}\right.\\&\qquad\left.+O\left(\frac{\tau^3}{\ln_2 x\sqrt{\ln_2 x}}\left(\ln_2 x-\ln_3 x\right)+\frac{\tau^2}{\ln_2 x}\right)\right\}\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}\mathrm{e}^{i\tau_x(\omega_y(n)-\ln_2 y)}&=\exp\left\{-\frac{1}{2}\tau^2+\frac{\tau^2\ln_3 x}{2\ln_2 x}+O\left(\frac{\tau^3}{\sqrt{\ln_2 x}}+\tau^2\frac{\ln_3 x}{\ln_2 x}+\frac{\tau^2}{\ln_2 x}\right)\right\}\\&=\exp\left\{-\frac{1}{2}\tau^2+O\left(\frac{\tau^3}{\sqrt{\ln_2 x}}+\tau^2\frac{\ln_3 x}{\ln_2 x}\right)\right\}\\&=\mathrm{e}^{-\tau^2/2}\left\{1+O\left(\frac{\tau^3}{\sqrt{\ln_2 x}}+\tau^2\frac{\ln_3 x}{\ln_2 x}\right)\right\}\end{aligned}$$

Ainsi,

$$I_2\ll\int_{1/\ln x}^{(1/\ln_2 x)^{1/6}}\mathrm{e}^{-\tau^2/2}\left(\frac{\tau\ln_3 x}{\ln_2 x}+\frac{\tau^2}{\sqrt{\ln_2 x}}\right)\mathrm{d}\tau\ll\frac{\ln_3 x}{\ln_2 x}+\frac{1}{\sqrt{\ln_2 x}}.$$

Et enfin, puisque, pour tout $(\ln_2 x)^{1/6} \leqslant |\tau| \leqslant T$,

$$\varphi_x(\tau) \ll \mathrm{e}^{-2\tau^2/\pi^2},$$

alors

$$I_3 \ll \int_{(\ln_2 x)^{1/6}}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-2\tau^2/\pi^2}}{\tau} \mathrm{d}\tau \ll \frac{1}{\sqrt{\ln_2 x}}.$$

Nous avons alors, par l'inégalité de Berry-Esseen,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x} \sum_{\substack{n \leqslant x \\ \omega_y(n) \leqslant \ln_2 y + z\sqrt{\ln_2 y}}} 1 &= \Phi(z) + O\left(\frac{1}{T} + I_1 + I_2 + I_3\right), \\
&= \Phi(z) + O\left(\frac{1}{\sqrt{\ln_2 x}} + \frac{2}{\ln x} + \frac{\ln_3 x}{\ln_2 x} + \frac{1}{\sqrt{\ln_2 x}} + \frac{1}{\sqrt{\ln_2 x}}\right) \\
&= \Phi(z) + O\left(\frac{1}{\sqrt{\ln_2 x}}\right). \qquad (4.9)
\end{aligned}$$

4.3 Étape 3 : étude de la différence des répartitions de la fonction complète et de la fonction tronquée

Soit $f_y(n) \coloneqq \omega_y(n) - \omega(n)$. Il nous faut encore montrer que la fonction f reste assez petite asymptotiquement pour ne pas influencer le resultat (4.2). Nous avons par l'inégalité de Turán-Kubilius (2.1) une majoration de la variance de la variable $f_y - \ln_3 x$

$$\sum_{p \leqslant x} (f_y(n) - \ln_3 x)^2 \ll x \sum_{y < p \leqslant x} \frac{1}{p} \ll x \ln_3 x.$$

De là, en appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev (1.12), nous déduisons que

$$\frac{1}{x} \sum_{|\omega(n) - \omega_y(n)| > \varepsilon\sqrt{\ln_2 x}} 1 \ll \frac{\ln_3 x}{\varepsilon^2 \ln_2 x}.$$

Soit z, ε deux réels. Considérons les ensembles donnés par $\mathscr{B} = \left\{n : \omega(n) \leqslant \ln_2 x + z\sqrt{\ln_2 x}\right\}$ et $\mathscr{C} = \left\{n : \omega_y(n) \leqslant \ln_2 y + (z+\varepsilon)\sqrt{\ln_2 y}\right\}$.

$$\mathscr{B} = (\mathscr{B} \cap \mathscr{C}) \cup \left(\mathscr{B} \cap \overline{\mathscr{C}}\right) \subset \mathscr{C} \cup \left(\mathscr{B} \cap \overline{\mathscr{C}}\right)$$

Or nous avons

$$\begin{aligned}
\mathscr{B} \cap \overline{\mathscr{C}} &= \left\{n : \omega(n) \leqslant \ln_2 x + z\sqrt{\ln_2 x}\right\} \cap \left\{n : \omega_y(n) > \ln_2 y + (z+\varepsilon)\sqrt{\ln_2 y}\right\} \\
&\subset \left\{n : \omega(n) - \omega_y(n) < \ln_2 x - \ln_2 y + z\left(\sqrt{\ln_2 x} - \sqrt{\ln_2 y}\right) - \varepsilon\sqrt{\ln_2 y}\right\} \\
&\subset \left\{n : \omega(n) - \omega_y(n) < \ln_3 x + z\frac{\ln_3 x}{\sqrt{\ln_2 x}} - \varepsilon\sqrt{\ln_2 y}\right\}.
\end{aligned}$$

D'après (4.9), nous pouvons alors écrire

$$\frac{1}{x}\sum_{n \in \mathscr{B}} 1 \leqslant \frac{1}{x}\sum_{n \in \mathscr{C}} 1 + \frac{1}{x}\sum_{n \in \mathscr{B} \cap \overline{\mathscr{C}}} 1 = \Phi(z+\varepsilon) + O\left(\frac{1}{\sqrt{\ln_2 x}} + \frac{\ln_3 x}{\varepsilon^2 \ln_2 x}\right).$$

Nous savons que Φ est une fonction dérivable, la formule de Taylor-Young nous permet d'approcher $\Phi(z+\varepsilon)$ par $\Phi(z)+\varepsilon$ avec une erreur en $O(\varepsilon)$. Ceci fournit

$$\frac{1}{x}\sum_{\omega(n)\leqslant \ln_2 x+z\sqrt{\ln_2 x}} 1 \leqslant \Phi(z)+O\left(\varepsilon+\frac{\ln_3 x}{\varepsilon^2 \ln_2 x}+\frac{1}{\sqrt{\ln_2 x}}\right).$$

Or en dérivant l'intérieur de la parenthèse par rapport à ε, nous trouvons un minimum en

$$\varepsilon=\left(\frac{2\ln_3 x}{\ln_2 x}\right)^{1/3}$$

Donc, pour cette valeur de ε nous avons

$$O\left(\varepsilon+\frac{\ln_3 x}{\varepsilon^2 \ln_2 x}+\frac{1}{\sqrt{\ln_2 x}}\right)=O\left(\left(\frac{\ln_3 x}{\ln_2 x}\right)^{1/3}\right).$$

De même, en considérant $\mathscr{C}=\left\{n : \omega_y(n)\leqslant \ln_2 y+(z-\varepsilon)\sqrt{\ln_2 y}\right\}$ et en écrivant

$$\mathscr{C}=(\mathscr{C}\cap\mathscr{B})\cup\left(\mathscr{C}\cap\overline{\mathscr{B}}\right)\subset\mathscr{B}\cup\left(\mathscr{C}\cap\overline{\mathscr{B}}\right)$$

Nous obtenons la majoration

$$\frac{1}{x}\sum_{\omega(n)\leqslant \ln_2 x+z\sqrt{\ln_2 x}} 1 \geqslant \Phi(z)+O\left(\left(\frac{\ln_3 x}{\ln_2 x}\right)^{1/3}\right).$$

D'où

$$\frac{1}{x}\left|\left\{n\leqslant x : \omega(n)\leqslant \ln_2 x+z\sqrt{(\ln_2 x)}\right\}\right|=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z} \mathrm{e}^{-t^2/2}\mathrm{d}t+O\left(\left(\frac{\ln_3 x}{\ln_2 x}\right)^{1/3}\right). \tag{4.10}$$

4.4 Vers une optimisation du terme d'erreur

Dans la sous-section précédente, nous avons obtenu un terme d'erreur qui n'est pas optimal. Nous pouvons toutefois nous en approcher. Le théorème que nous allons présenter nous permettra d'améliorer le terme d'erreur optenu lors de la comparaison entre $\omega(n)$ et $\omega_y(n)$

Théorème 4.5. *Soit f une fonction multiplicative positive ou nulle et A, B réels tels que*

- $\sum_{p\leqslant y} f(p)\ln p\leqslant Ay$,
- $\sum_{p}\sum_{\nu\geqslant 2}\frac{f(p^\nu)}{p^\nu}\ln(p^\nu)\leqslant B$.

Alors on a, pour $x>1$,

$$\sum_{n\leqslant x} f(n)\leqslant (1+A+B)\frac{x}{\ln x}\sum_{n\leqslant x}\frac{f(n)}{n}. \tag{4.11}$$

Démonstration. Posons

$$S(x) := \sum_{n\leqslant x} f(n)$$

et introduisons

$$L(x) := \sum_{n\leqslant x} \frac{f(n)}{n}.$$

Évidemment, pour tout $x \geqslant 1$, nous avons

$$S(x) \leqslant xL(x). \tag{4.12}$$

En remarquant que

$$x = \frac{x}{n} \prod_{p^\nu \| n} p^\nu,$$

nous pouvons écrire

$$S(x)\ln x = \sum_{n\leqslant x} f(n)\ln\left(\frac{x}{n}\right) + \sum_{n\leqslant x} f(n) \sum_{p\| n} \ln(p) + \sum_{n\leqslant x} f(n) \sum_{\substack{\nu\geqslant 2\\ p^\nu\| n}} \ln(p^\nu).$$

Désignons ces trois sommes respectivement par S_1, S_2 et S_3. Nous avons clairement

$$S_1 \leqslant xL(x).$$

Par le changement de variable $n = mp$ dans S_2 nous avons

$$\begin{aligned} S_2 = \sum_{n\leqslant x} f(n) \sum_{p\| n} \ln(p) &= \sum_{m\leqslant x} \sum_{\substack{p\,\nmid\, m\\ p\leqslant x/m}} f(m)f(p)\ln(p) \\ &\leqslant \sum_{m\leqslant x} f(m) \sum_{p\leqslant x/m} f(p)\ln(p). \end{aligned}$$

D'après la première hypothèse, nous avons

$$S_2 \leqslant \sum_{m\leqslant x} f(m) A\frac{x}{m} = AxL(x)$$

Enfin, par interversion de sommations, nous avons

$$\begin{aligned} S_3 = \sum_{n\leqslant x} f(n) \sum_{\substack{\nu\geqslant 2\\ p^\nu\| n}} \ln(p^\nu) &= \sum_p \sum_{\nu\geqslant 2} \sum_{\substack{n\leqslant x\\ p^\nu\| n}} f(n)\ln(p^\nu) \\ &= \sum_p \sum_{\nu\geqslant 2} \sum_{\substack{m\leqslant x/p^\nu\\ p\,\nmid\, m}} f(m)f(p^\nu)\ln(p^\nu) \\ &\leqslant \sum_p \sum_{\nu\geqslant 2} f(p^\nu)\ln(p^\nu) \sum_{m\leqslant x/p^\nu} f(m) \\ &= \sum_p \sum_{\nu\geqslant 2} f(p^\nu)\ln(p^\nu) S\left(\frac{x}{p^\nu}\right), \end{aligned}$$

Par l'équation (4.12) nous avons

$$S_3 \leqslant \sum_p \sum_{\nu\geqslant 2} f(p^\nu)\ln(p^\nu)\frac{x}{p^\nu} L\left(\frac{x}{p^\nu}\right)$$

Puisque L est une fonction croissante, et d'après la deuxième hypothèse, nous avons

$$S_3 \leqslant xL(x) \sum_p \sum_{\nu \geqslant 2} f(p^\nu) \ln(p^\nu) \frac{x}{p^\nu} \leqslant xL(x)B$$

Donc nous avons bien

$$S(x) \leqslant (A+B+1)L(x).$$

Ce qui achève la démonstration. □

Rappelons que $y := x^{1/\ln_2 x}$ et choisissons $f_y(n) = \mathrm{e}^{(\omega(n)-\omega_y(n))-K\ln_3 x}$, avec K une constante positive. Nous voulons appliquer le Théorème 4.5 à cette fonction. Vérifions que f_y satisfait les deux hypothèses du théorème.

$$\sum_{p\leqslant y} f_y(p)\ln(p) = \mathrm{e}^{-K\ln_3 x} \sum_{p\leqslant y} \ln(p) \tag{4.13}$$

Or,

$$\sum_{p\leqslant y} \ln(p) = \sum_{p\leqslant y} \int_1^p \frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_1^y \frac{1}{t}\left(\sum_{t\leqslant p\leqslant y} 1\right)\mathrm{d}t \leqslant \int_1^y \frac{1}{t}\left(\sum_{p\leqslant y} 1\right)\mathrm{d}t = \int_1^y \frac{1}{t}\pi(y)\mathrm{d}t \ll \frac{y}{\ln y}\ln y = y.$$

Ainsi

$$\sum_{p\leqslant y} f_y(p)\ln(p) \ll \mathrm{e}^{-K\ln_3 x} y \ll y$$

donc la constante A de l'énoncé est une constante absolue. De plus,

$$\begin{aligned}
\sum_p \sum_{\nu\geqslant 2} \frac{f_y(p^\nu)}{p^\nu}\ln(p^\nu) &= \mathrm{e}^{-K\ln_3 x} \sum_p \sum_{\nu\geqslant 2} \frac{\mathrm{e}^{(1-\omega_y(p))}\ln(p^\nu)}{p^\nu} \\
&\leqslant \sum_{p\leqslant y}\sum_{\nu\geqslant 2} \frac{\ln(p^\nu)}{p^\nu} + \mathrm{e}\sum_{p>y}\sum_{\nu\geqslant 2}\frac{\ln(p^\nu)}{p^\nu} \\
&\ll \sum_p \sum_{\nu\geqslant 2} \frac{\ln(p^\nu)}{p^\nu}
\end{aligned}$$

Et nous pouvons montrer de même que précédemment que cette somme est finie. Soient K et c deux constantes positives à déterminer.

$$\frac{1}{x}\sum_{\substack{n\leqslant x \\ \omega(n)-\omega_y(n)>K\ln_3 x}} 1 \leqslant \frac{1}{x}\sum_{\substack{n\leqslant x \\ \omega(n)-\omega_y(n)>K\ln_3 x}} \mathrm{e}^{c(\omega(n)-\omega_y(n))-K\ln_3 x} \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-Kc\ln_3 x}}{x}\sum_{n\leqslant x} \mathrm{e}^{c(\omega(n)-\omega_y(n))}.$$

Toujours par le même raisonnement, nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x}\sum_{\substack{n\leqslant x \\ \omega(n)-\omega_y(n)>K\ln_3 x}} 1 &\ll \frac{\mathrm{e}^{-Kc\ln_3 x}}{x}\prod_{y<p\leqslant x}\left(1+\frac{\mathrm{e}^c-1}{p}\right) \\
&= \frac{1}{x(\ln_2 x)^{Kc}}\exp\left\{(\mathrm{e}^c-1)\sum_{y<p\leqslant x}\frac{1}{p} + O\left(\frac{1}{p^2}\right)\right\} \\
&\ll \exp\left\{(\mathrm{e}^c-1)\ln_3 x\right\}\ln_2 x^{-Kc} \\
&= (\ln_2 x)^{\mathrm{e}^c-1-Kc}. \qquad (4.14)
\end{aligned}$$

Or

$$\omega(n) \leqslant \ln_2 x + z\sqrt{\ln_2 x} = \ln_2 y + \ln_3 x + z\sqrt{\ln_2 x}$$

implique

$$\omega_y(n) \leqslant \ln_2 y + \ln_3 x + z\sqrt{\ln_2 x} = \ln_2 y + \sqrt{\ln_2 x}\left(z + \frac{\ln_3 x}{\sqrt{\ln_2 x}}\right).$$

Or,

$$\sqrt{\ln_2 x} \leqslant \sqrt{\ln_2 y} + \frac{\ln_3 x}{\sqrt{\ln_2 x}}.$$

Donc,

$$\omega_y(n) \leqslant \ln_2 y + z_1\sqrt{\ln_2 y}$$

avec

$$z_1 = z + O\left(\frac{\ln_3 x}{\sqrt{\ln_2 x}}\right).$$

Ainsi,

$$\frac{1}{x}\sum_{\substack{n\leqslant x\\ \omega(n)\leqslant \ln_2 x + z\sqrt{\ln_2 x}}} 1 \leqslant \frac{1}{x}\sum_{\substack{n\leqslant x\\ \omega_y(n)\leqslant \ln_2 y + z_1\sqrt{\ln_2 y}}} 1 = \Phi(z_1) + O\left(\frac{1}{\sqrt{\ln_2 x}}\right) = \Phi(z) + O\left(\frac{\ln_3 x}{\sqrt{\ln_2 x}}\right).$$

De même

$$\omega_y(n) \leqslant \ln_2 y + z\sqrt{\ln_2 x} - 2\ln_3 x = \ln_2 x - 3\ln_3 x + z\sqrt{\ln_2 x}$$

donc

$$\omega(n) \leqslant \ln_2 x + z\sqrt{\ln_2 x}$$

ou

$$\omega(n) - \omega_y(n) > 3\ln_3 x.$$

Donc

$$\frac{1}{x}\sum_{\substack{n\leqslant x\\ \omega(n)\leqslant \ln_2 x + z\sqrt{\ln_2 x}}} 1 \geqslant \Phi(z) + O\left(\frac{\ln_3 x}{\sqrt{\ln_2 x}}\right) + E.$$

En reprenant la majoration (4.14) avec $K = 3$ et $c = \ln(3)$ nous obtenons

$$E \ll (\ln_2 x)^{2-3\ln(3)} < \frac{1}{\ln_2 x}.$$

Ainsi,

$$\frac{1}{x}\sum_{\substack{n\leqslant x\\ \omega(n)\leqslant \ln_2 x + z\sqrt{\ln_2 x}}} 1 \leqslant \varphi(z) + O\left(\frac{\ln_3 x}{\sqrt{\ln_2 x}}\right).$$

D'où

$$\frac{1}{x}\left|\left\{n \leqslant x : \omega(n) \leqslant \ln_2 x + z\sqrt{(\ln_2 x)}\right\}\right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z} \mathrm{e}^{-t^2/2}\mathrm{d}t + O\left(\frac{\ln_3 x}{\sqrt{\ln_2 x}}\right).$$

Le terme d'erreur trouvé ci-dessus est plus proche du terme d'erreur optimal que celui obtenu précédemment en 4.10. Il n'est pas possible, avec les outils dont nous avons fait usage, de l'améliorer d'avantage. Ce dernier terme d'erreur est tout de même satisfaisant.

5 Conclusion

Durant ce mois de stage, j'ai d'abord dû entreprendre une démarche d'appropriation et d'approfondissement des différentes notions et méthodes classiques de la théorie des nombres. Le théorème d'Erdős-Kac est un sujet qui a été beaucoup étudié. Il est toujours, à ce jour, au cœur de certaines thèses et recherches puisqu'il est un outil phare de cette théorie. Mon travail fut d'en trouver une démonstration en utilisant à la fois une variante effective du théorème de Delange, et quelques outils de la théorie des probabilités, comme le théorème de continuité de Lévy ou encore l'inégalité de Berry-Esseen. J'ai pu également améliorer le terme d'erreur avec une borne exponentielle tout en constatant que le terme d'erreur optimal n'est pas atteignable avec les outils utilisés. Pour obtenir ce terme d'erreur, la démonstration la plus directe utilise la méthode de Selberg-Delange.

Mon stage à l'Institut de Mathématiques Élie Cartan a été une initiation très instructive dans le domaine de la recherche. J'ai pu observer le quotidien d'un chercheur de renom et j'ai été amenée à découvrir sa grande pluralité (travaux personnels ou en collaboration, participation ou organisation de conférences et séminaires, participation aux jury de différents évènements comme des soutenances de thèses ou harmonisations des notes du Baccalauréat, ouvertures à d'autres domaines comme la littérature, etc.). Ce stage m'a également permis d'assister à quatre séminaires de théorie des nombres. Pour conclure, assister à ces différents travaux menant à des échanges, des partages de connaissances ou compétences entre chercheurs m'a particulièrement touchée et m'a finalement ouvert les portes de la recherche.

6 Bibliographie

Badiou, F. (1960-1961). Formules d'inversion de Möbius. *Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres*, 2.

Cartan, H. (1961). *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*. Hermann (Paris).

Cashwell, E. and Everett, C. J. (1959). The ring of number-theoretic functions. *Pacific Journal of Mathematics*, 9(4) :975–985.

Darracq, M.-C. and Rombaldi, J.-É. (2021). *Probabilités pour la Licence : Cours complet avec 200 exercices corrigés*. De Boeck Supérieur.

Delange, H. (1961). Sur les fonctions arithmétiques multiplicatives. *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*, 78(3) :273–304.

Elliott, P. D. (2012). *Probabilistic number theory I : Mean-value theorems*, volume 239. Springer Science & Business Media.

Erdős, P. and Kac, M. (1939). On the gaussian law of errors in the theory of additive functions. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 25(4) :206–207.

Erdős, P. and Kac, M. (1940). The gaussian law of errors in the theory of additive number theoretic functions. *American Journal of Mathematics*, 62(1/4) :738.

Graczyk, P., Jakubowski, T., and Vostrikova, L. (2021). *Cours de probabilités pour la licence-avec exercices corrigés*. Editions Ellipses.

Hardy, G. H. and Ramanujan, S. (1917). The normal number of prime factors of a number n. *Quart. J.*, 48 :76–92.

Hardy, G. H. and Wright, E. M. (1938). *An Introduction to the Theory of Numbers*. Cambridge University Press.

Mathieu, J. (2017). Théorie probabiliste des nombres : les théorèmes fondateurs.

Rényi, A. and Turán, P. (1958). On a theorem of erdös-kac. *Acta Arithmetica*, 4(1) :71–84.

Schwartz, W. and Spilker, J. (1993). *Arithmetical Functions : An Introduction to Elementary and Analytic Properties of Arithmetic Functions and to Some of Their Almost-periodic Properties*. Cambridge University Press.

Tauvel, P. (2020). *Analyse complexe pour la Licence 3-Cours et exercices corrigés : Cours et exercices corrigés*. Dunod.

Tenenbaum, G. (2022). *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*. Belin Éducation.

Tenenbaum, G. and Mendès France, M. (2000). *Les Nombres Premiers*. Que sais-je.