TD 2 : Applications linéaires continues et normes subordonnées

Questions de cours:

1. Comment peut-on démontrer, en pratique, qu'une application (multi)-linéaire entre espaces vectoriels normés est continue ?
2. Quelle est la définition d'une norme subordonnée à une norme vectorielle ?
3. Quelle est la méthode usuelle pour calculer la norme subordonnée d'un opérateur ?

Continuité des applications linéaires

Exercice 1. *Il faut préciser la norme!*
On se place sur $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. On considère la forme linéaire :

$$\varphi : f \in E \mapsto f(0).$$

1. Montrer que φ est continue pour la norme $\|\cdot\|_\infty$, mais n'est pas continue pour la norme $\|\cdot\|_{L^1}$.
2. Ce phénomène peut-il apparaître en dimension finie?

Exercice 2. *Continuité de l'application identité*
Soient $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ deux normes sur un espace vectoriel E. Montrer que $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont équivalentes si et seulement si

$$\mathrm{id}^1 : (E, \|\cdot\|_1) \to (E, \|\cdot\|_2) \text{ et } \mathrm{id}^2 : (E, \|\cdot\|_2) \to (E, \|\cdot\|_1)$$

sont continues.

Exercice 3. *Opérateur de dérivation*
Soit $E = \mathcal{C}^\infty([0,1],\mathbb{R})$. On considère l'opérateur de dérivation $D : E \to E, f \mapsto f'$. Montrer que, quelle que soit la norme $\|\cdot\|$ dont on munit E, D n'est jamais une application linéaire continue de $(E, \|\cdot\|)$ dans lui-même.

Calcul de normes subordonnées

Exercice 4. *Calcul de norme subordonnée*
Sur $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$, on définit la forme linéaire μ_f associée à un élément non nul f de E par :

$$\forall g \in E, \quad \mu_f(g) = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que μ_f est bien définie, continue et calculer sa norme subordonnée.

Exercice 5. *Opérateurs à noyau*
Soit $K \in \mathcal{C}^0([0,1]^2,\mathbb{R})$. On note $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Pour $f \in E$, on note Tf la fonction définie par :

$$\forall x \in [0,1], \quad Tf(x) = \int_0^1 K(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y.$$

1. Montrer que T est bien défini, qu'il s'agit d'un endomorphisme linéaire continu de E et calculer sa norme.
2. Calculer la norme de T dans le cas où $K(x,y) = x + y$.

Exercice 6. *Opérateur d'intégration*

Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ et $F = \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_F$ définie par :

$$\forall f \in F,\ \|f\|_F = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty.$$

On définit alors $T : (E, \|\cdot\|_\infty) \to (F, \|\cdot\|_F)$ par :

$$\forall f \in E,\ \forall x \in [0,1],\ Tf(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que T est bien définie, linéaire, continue et calculer sa norme subordonnée. La valeur de la norme de T est-elle atteinte ?

Exercice 7. *Une application bilinéaire*

On note $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. On considère l'application :

$$B : \left\{ \begin{array}{cl} (E, \|\cdot\|_\infty) \times (E, \|\cdot\|_{L^2}) & \to (E, \|\cdot\|_\infty) \\ (f,g) & \mapsto \left(x \mapsto \displaystyle\int_0^x e^t f(t) g(t)\,\mathrm{d}t \right) \end{array} \right.$$

Montrer que B est bien définie, bilinéaire, continue et calculer sa norme.

Exercice 8. *Normes subordonnées matricielles*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $C_1, ..., C_n$ ses colonnes et $L_1, ..., L_n$ ses lignes.

1. On munit $\mathbb{C}^n$ de la norme $\|\cdot\|_1$. Montrer que $\|A\|_1 = \max_{j\in\{1,\dots,n\}} \|C_j\|_1 = \max_{j\in\{1,\dots,n\}} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$.
2. On munit $\mathbb{C}^n$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Montrer que $\|A\|_\infty = \max_{i\in\{1,\dots,n\}} \|L_i\|_1 = \max_{i\in\{1,\dots,n\}} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$.
3. Soit $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x+y, 2x-y) \in \mathbb{R}^2$. Donner $\|f\|_1$ et $\|f\|_\infty$.

Quelques propriétés topologiques

Exercice 9. *Formes linéaires positives*

Soient $a < b$ deux réels, $E = \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ et φ une forme linéaire positive sur E, i.e. pour tout $f \in E$, si $f \geqslant 0$ alors $\varphi(f) \geqslant 0$. Montrer que φ est continue et calculer sa norme subordonnée.

Indication : On pourra montrer et utiliser que pour tout $f \in E$, $|\varphi(f)| \leqslant \varphi(|f|)$.

Exercice 10. *Continuité et noyau d'une forme linéaire*

Soient E un espace vectoriel normé et φ une forme linéaire non nulle sur E. Montrer que φ est continue si et seulement si son noyau est fermé.

Exercice 11. *Complétude de $\mathcal{L}_c(E,F)$*

Soient E, F deux espaces vectoriels normés. Montrer que si F est complet, alors l'espace $\mathcal{L}_c(E,F)$ muni de la norme d'opérateur est complet.

Exercice 12. *Dual de $\ell^p(\mathbb{N})$, $1 \leqslant p < +\infty$*

Soit $1 \leqslant p < +\infty$ et q son exposant conjugué, i.e. tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Pour $y \in \ell^q(\mathbb{N})$, on pose pour tout $x \in \ell^p(\mathbb{N})$:

$$F_y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n.$$

1. Montrer que pour tout $y \in \ell^q(\mathbb{N})$, on a $F_y \in (\ell^p(\mathbb{N}))'$.

2. On pose :
$$F\colon y \in \ell^q(\mathbb{N}) \mapsto F_y \in (\ell^p(\mathbb{N}))'.$$
Montrer que F est une isométrie linéaire.

   Le but est maintenant de montrer la surjectivité de F. Soit $\varphi \in (\ell^p(\mathbb{N}))'$. On pose $y_n = \varphi(e_n)$, où e_n désigne la suite dont tous les termes sont nuls, sauf le terme de rang n qui vaut 1.

3. Pour $p = 1$, montrer que $(y_n)_n \in \ell^\infty(\mathbb{N})$.

4. Pour $1 < p < +\infty$, on pose pour tout $n, N \geqslant 0$,
$$x_n^N = \begin{cases} y_n^{-1}|y_n|^q & \text{si } y_n \neq 0 \text{ et } n \leqslant N, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
Calculer $\varphi(x^N)$ et en déduire que $y \in \ell^q(\mathbb{N})$.

5. Montrer que F est surjective.