

TD 3 : Fonctions d'une variable réelle

Questions de cours:

1. Quelle est la définition de la dérivabilité en un point pour une fonction définie sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ à valeurs dans un espace vectoriel normé ?
2. Qu'affirme le théorème de Rolle ?
3. Quelles sont les hypothèses du théorème de l'égalité des accroissements finis ?
4. Quelles sont les hypothèses du théorème de l'inégalité des accroissements finis ?
5. Énoncer la formule de Taylor-Young et la formule de Taylor avec reste intégral. Pourquoi a-t-on besoin de l'hypothèse de complétude dans la deuxième formule ?
6. Dans quels cas a-t-on la formule de Taylor-Lagrange et dans quels cas n'a-t-on que l'inégalité de Taylor-Lagrange ?
7. Qu'affirme le théorème de dérivabilité et de convergence pour une suite de fonctions dérivables $f_n : (a, b) \rightarrow (E, \|\cdot\|)$?

Exercices

Exercice 1. *Lipschitzienne si et seulement si dérivée bornée*

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un evn. Soit $f : [a, b] \rightarrow E$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors f est lipschitzienne sur $[a, b]$ si et seulement si f' est bornée sur $]a, b[$.

Exercice 2. *Un calcul d'intégrale*

Montrer que

$$\int_0^1 \frac{(1+t)(1-t)^2}{(1+t^2)^2} dt = \frac{\ln 2}{2}.$$

Exercice 3. *Une minoration*

Montrer que pour tout $t > 0$:

$$\operatorname{Arctan}(t) > \frac{t}{1+t^2}.$$

Exercice 4. *Majoration par un polynôme*

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$. On suppose qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré impair tel que, pour tout $n \geq 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait

$$|f^{(n)}(x)| \leq |P(x)|.$$

Montrer que f est identiquement nulle. Le résultat est-il toujours vrai si l'on suppose que P est de degré pair ?

Exercice 5. *Minoration de la dérivée seconde*

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $f : [0, 1] \rightarrow E$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant $f(0) = f'(0) = f'(1) = 0$ et $\|f(1)\| = 1$. Montrer qu'il existe $c \in [0, 1]$ tel que $\|f''(c)\| \geq 4$.

Exercice 6. *Étude de la convergence de suite*

On considère les suites définies par:

$$u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

Montrer à l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent et donner leur limite respective.

Exercice 7. *Dérivabilité de la racine*

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer que la fonction $\sqrt{f}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = 0$, alors $f''(x_0) = 0$.

Exercice 8. *Un bout de la méthode de Newton*

Soit $f : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose $f(c) < 0 < f(d)$ et $f'(x) > 0$ pour tout $x \in [c, d]$. On considère la suite récurrente

$$x_{n+1} = F(x_n), \quad n \geq 0 \quad \text{avec} \quad F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

1. Montrer que f a un unique zéro a et que, pour tout $x \in [c, d]$, il existe z entre a et x tel que

$$F(x) - a = \frac{1}{2} \frac{f''(z)}{f'(x)} (x - a)^2.$$

2. En déduire qu'il existe $M > 0$ tel que, pour tout $x \in [c, d]$,

$$|F(x) - a| \leq M |x - a|^2.$$

3. Montrer qu'il existe un $\alpha > 0$ tel que l'intervalle $I =]a - \alpha, a + \alpha[$ soit stable par F . En déduire que, pour chaque $x_0 \in I$, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers a .

Exercice 9. *Des exemples peu intuitifs*

Trouver:

1. Une fonction indéfiniment dérivable, strictement positive sauf en 0, et dont toutes les dérivées successives en 0 sont nulles.
2. Une fonction admettant un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 mais qui n'est pas deux fois dérivable en 0.
3. Une fonction admettant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0, mais qui n'est dérivable sur aucun voisinage de 0.

Exercice 10. *Une majoration de la norme L^1*

Soient $a < b$ deux réels et $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ deux fois dérivable sur $]a, b[$ et telle que $f(a) = f(b) = 0$.

1. Montrer que pour tout $x \in [a, b]$, il existe $c_x \in]a, b[$ tel que :

$$f(x) = \frac{1}{2} (x - a)(x - b) f''(c_x).$$

2. En déduire que si f'' est bornée sur $]a, b[$ alors

$$\int_a^b |f(t)| dt \leq \frac{(b-a)^3}{12} \|f''\|_{\infty,]a, b[}.$$

Exercice 11. *Un calcul de somme*

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable en 0 telle que $f(0) = 0$, et soit $\ell \geq 1$ un entier. Pour tout $n \geq 1$, on pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n\ell} f\left(\frac{k}{n^2}\right).$$

Montrer que la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ converge et calculer sa limite.

Exercice 12. *Dérivation d'une fonction à valeurs vectorielles*

1. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, telle que $f(0) = f'(0) = 0$. On pose :

$$\begin{aligned} T &: \mathbb{R} \rightarrow \ell^1(\mathbb{N}^*, \mathbb{R}) \\ t &\mapsto \left(f\left(\frac{t}{n}\right)\right)_{n \geq 1} \end{aligned}$$

Montrer que T est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

2. Soit $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On note $E = \mathcal{C}_b^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues et bornées qu'on munit de la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$. On pose alors :

$$\begin{aligned} T &: \mathbb{R} \rightarrow E \\ t &\mapsto T(t) = f(\cdot - t). \end{aligned}$$

Montrer que T est bien définie, continue sur $\mathbb{R}$, et dérivable en 0.

Exercice 13. *Inégalité de Kolmogorov*

Soit E un espace vectoriel normé. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, E)$. On suppose que :

$$\|f\|_\infty < +\infty \quad \text{et} \quad \|f''\|_\infty < +\infty.$$

1. Montrer que f' est bornée et même que pour tout $h > 0$:

$$\|f'\|_\infty \leq \frac{2\|f\|_\infty}{h} + \frac{h\|f''\|_\infty}{2}.$$

2. En déduire :

$$\|f'\|_\infty \leq 2\sqrt{\|f\|_\infty \|f''\|_\infty}.$$

3. Reprendre la question 2 et montrer l'inégalité de Kolmogorov :

$$\|f'\|_\infty \leq \sqrt{2\|f\|_\infty \|f''\|_\infty}.$$

Exercice 14. *Théorème de Darboux*

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application dérivable.

- Montrer que f' vérifie la conclusion du théorème des valeurs intermédiaires, c'est-à-dire que l'image d'un intervalle par f' est un intervalle.
- Supposons de plus que f est convexe. Montrer que $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 15. *Nombre de racines d'un polynôme réel*

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ admettant exactement k coefficients non nuls. Montrer que P a au plus $2k - 1$ racines réelles distinctes. Cette majoration est-elle optimale ?

Exercice 16. *Lemme d'Hadamard*

Soient $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $n \geq 1$. Établir l'équivalence des propriétés suivantes :

- $f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0$,
- $\exists g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = x^n g(x)$.

Exercice 17. *Vers le principe des zéros isolés*

1. Soient $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) = 0$. On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^{(n)}(a) \neq 0$. Montrer qu'il existe $h > 0$ tel que :

$$\forall y \in]a - h, a + h[\setminus \{a\}, \quad f(y) \neq 0.$$

2. Soient $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et S un segment de $\mathbb{R}$. On suppose que pour tout zéro a de f , il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^{(n)}(a) \neq 0$. Montrer que f ne s'annule qu'un nombre fini de fois sur S .

Exercice 18. *Convexité et taux d'accroissement*

Soit $f : [a, b] \rightarrow E$ une fonction à valeurs dans un espace de Banach et soit $C \subset E$ un convexe fermé. Montrer que, si f est dérivable sur $[a, b]$ et vérifie

$$\forall x \in [a, b], f'(x) \in C,$$

alors le rapport $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ appartient à C .

Le résultat persiste-il si on suppose que f est seulement dérivable à droite en tout point de $[a, b]$ et vérifie $f'_d(x) \in C$ pour tout $x \in [a, b]$?

Exercice 19. *Autour du lemme de Borel*

1. Soit $(a_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Montrer le lemme de Borel qui stipule qu'il existe une fonction $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u^{(n)}(0) = a_n.$$

Indication : On pourra utiliser une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ valant 1 sur $[-1/2, 1/2]$ et nulle en dehors de $[-1, 1]$ dont on expliquera la construction et considérer une fonction u de la forme :

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f(\lambda_n x) a_n \frac{x^n}{n!},$$

où $(\lambda_n)_n \in (\mathbb{R}_*^+)^{\mathbb{N}}$ sera choisie convenablement.

2. Montrer que toute fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur un segment $[a, b]$ avec dérivées de tous ordres à droite en a et à gauche en b peut être prolongée en une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
3. *Plus difficile:* Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ une fonction paire. En utilisant le lemme de Borel, montrer qu'il existe $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = g(x^2).$$

Exercice 20. *Sinus cardinal et inégalité*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1, \dots, x_n \in [0, \pi]$. On pose $x = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$. Comparer :

$$\prod_{k=1}^n \frac{\sin(x_k)}{x_k} \quad \text{et} \quad \left(\frac{\sin(x)}{x} \right)^n.$$

Indication : étudier la fonction $y \mapsto \ln \left(\frac{\sin(y)}{y} \right)$.

Exercice 21. *Le théorème de Bernstein*

Soient $a > 0$ et $f :]-a, a[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$. On suppose que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in]-a, a[, f^{(2k)}(x) \geq 0.$$

Montrer que f est développable en série entière sur $] -a, a[$.

Indication: Pour tout $b \in]0, a[$, montrer que la fonction $F(x) = f(x) + f(-x)$ est développable en série entière sur $] -b, b[$ en utilisant la formule de Taylor avec reste intégral.

Exercice 22. *Lien entre fonction caractéristique et moments*

Soit $X \in \mathcal{L}(\Omega, \mathcal{A}, P)$ une variable aléatoire réelles et φ_X sa fonction caractéristique, i.e. $\varphi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX})$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On rappelle qu'une variable aléatoire admet un moment à l'ordre k si la quantité $\mathbb{E}(X^k) = \int_{\Omega} X^k dP$ est finie. Montrer que si φ_X est n -fois dérivable en 0 pour $n \geq 2$, alors X admet un moment jusqu'à l'ordre $2 \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, donnés par $\mathbb{E}(X^k) = (-i)^k \varphi_X^{(k)}(0)$.