TD 3 - Exercice 5 *Minoration de la dérivée seconde*

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $f : [0,1] \to E$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant $f(0) = f'(0) = f'(1) = 0$ et $\|f(1)\| = 1$. Montrer qu'il existe $c \in [0,1]$ tel que $\|f''(c)\| \geqslant 4$.

Résolution. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur les deux intervalles $[0,1/2]$ et $[1/2,1]$. Nous pouvons donc appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange sur ces deux intervalles:

$$\left\| f\left(\frac{1}{2}\right) - f(0) - \frac{1}{2}f'(0) \right\| \leqslant \frac{1}{8}\|f''\|_{\infty,[0,1/2]} \leqslant \frac{1}{8}\|f''\|_{\infty} \quad \textit{i.e.} \quad \left\| f\left(\frac{1}{2}\right) \right\| \leqslant \frac{1}{8}\|f''\|_{\infty},$$

$$\left\| f\left(\frac{1}{2}\right) - f(1) - \frac{1}{2}f'(1) \right\| \leqslant \frac{1}{8}\|f''\|_{\infty,[1/2,1]} \leqslant \frac{1}{8}\|f''\|_{\infty} \quad \textit{i.e.} \quad \left\| f\left(\frac{1}{2}\right) - f(1) \right\| \leqslant \frac{1}{8}\|f''\|_{\infty}.$$

En mettant ensemble ces deux inégalités, nous trouvons:

$$1 = \|f(1)\| = \left\| f(1) - f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) \right\| \leqslant \left\| f(1) - f\left(\frac{1}{2}\right) \right\| + \left\| f\left(\frac{1}{2}\right) \right\| \leqslant \frac{1}{8}\|f''\|_{\infty} + \frac{1}{8}\|f''\|_{\infty} = \frac{1}{4}\|f''\|_{\infty}$$

Ainsi, $\|f''\|_{\infty} \geqslant 4$ et, par définition de la norme $\|\cdot\|_{\infty}$, il existe un $c \in [0,1]$ tel qu'on ait l'inégalité demandée. □

TD3 - Exercice 7 *Dérivabilité de la racine*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer que la fonction $\sqrt{f}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = 0$, alors $f''(x_0) = 0$.

Résolution. Il est clair que la fonction $\sqrt{f}$ est dérivable en tout point $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \neq 0$ comme composée de deux fonctions dérivables. Soit maintenant $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = 0$. Alors, puisque f est à valeurs positives, cela implique que x_0 est un minimum (global) de f et donc:

$$f'(x_0) = 0 \quad \text{et} \quad f''(x_0) > 0.$$

La fonction est de classe $\mathcal{C}^2$ donc on peut faire un développement limité à l'ordre 2 de f en x_0 et on a pour tout $h > 0$:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2}f''(x_0) + h^2\varepsilon(h),$$

où ε est une fonction à valeurs positives telle que $\varepsilon(h) \overset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$. En simplifiant grâce aux observations précédentes et en prenant la racine carrée, on obtient le taux d'accroissement suivant:

$$\frac{\sqrt{f(x_0+h)} - \sqrt{f(x_0)}}{h} = \frac{\sqrt{f(x_0+h)}}{h} = \frac{|h|}{h}\sqrt{\frac{f''(x_0)}{2} + \varepsilon(h)}.$$

Il s'agit de montrer que le taux d'accroissement converge vers 0 lorsque $h \to 0^{\pm}$ si et seulement si $f''(x_0) = 0$.

- Si $f''(x_0) = 0$, alors on obtient

$$\frac{\sqrt{f(x_0+h)} - \sqrt{f(x_0)}}{h} = \underbrace{\frac{|h|}{h}}_{\text{borné par 1}} \sqrt{\varepsilon(h)} \overset{h\to 0^{\pm}}{\longrightarrow} 0.$$

  La fonction est donc dérivable en x_0.

- Si $f''(x_0) \neq 0$, on obtient

$$\frac{\sqrt{f(x_0+h)} - \sqrt{f(x_0)}}{h} = \frac{|h|}{h}\sqrt{\frac{f''(x_0)}{2} + \varepsilon(h)} \overset{h\to 0^{+}}{\longrightarrow} \sqrt{\frac{f''(x_0)}{2}}$$

  et

$$\frac{\sqrt{f(x_0+h)} - \sqrt{f(x_0)}}{h} = \frac{|h|}{h}\sqrt{\frac{f''(x_0)}{2} + \varepsilon(h)} \overset{h\to 0^{-}}{\longrightarrow} -\sqrt{\frac{f''(x_0)}{2}}.$$

  Le taux d'accroissement de $\sqrt{f}$ en x_0 n'admet pas de limite (deux valeurs du taux d'accroissement différentes). La fonction n'est donc pas dérivable en x_0.

□

TD3 - Exercice 13 *Inégalité de Kolmogorov*

Soit E un espace vectoriel normé. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, E)$. On suppose que :

$$\|f\|_\infty < +\infty \quad \text{et} \quad \|f''\|_\infty < +\infty.$$

1. Montrer que f' est bornée et même que pour tout $h > 0$:

$$\|f'\|_\infty \leqslant \frac{2\|f\|_\infty}{h} + \frac{h\|f''\|_\infty}{2}.$$

2. En déduire :

$$\|f'\|_\infty \leqslant 2\sqrt{\|f\|_\infty \|f''\|_\infty}.$$

3. Reprendre la question 2 et montrer l'inégalité de Kolmogorov :

$$\|f'\|_\infty \leqslant \sqrt{2\|f\|_\infty \|f''\|_\infty}.$$

Résolution. 1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $h > 0$, f est $\mathcal{C}^2$ sur $[x, x+h]$. Ainsi, on peut appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à f sur $[x, x+h]$ à l'ordre 2:

$$\|f(x+h) - f(x) - f'(x)h\| \leqslant \frac{h^2}{2} \|f''\|_{\infty,[x,x+h]} \leqslant \frac{h^2}{2} \|f''\|_\infty.$$

D'où, par inégalité triangulaire,

$$h \|f'(x)\| \leqslant \frac{h^2}{2} \|f''\|_\infty + 2 \|f\|_\infty.$$

Le membre de droite est indépendant de x donc on peut passer à la borne sup et il vient

$$\|f'\|_\infty \leqslant \frac{2\|f\|_\infty}{h} + \frac{h\|f''\|_\infty}{2}.$$

2. Puisque l'inégalité précédente est vraie pour tout $h > 0$, on recherche le minimum de la fonction:

$$g : h \mapsto \frac{2\|f\|_\infty}{h} + \frac{h\|f''\|_\infty}{2}.$$

La dérivée de cette fonction est donnée par

$$g' : h \mapsto -\frac{2\|f\|_\infty}{h^2} + \frac{\|f''\|_\infty}{2}.$$

Ainsi, $g'(h) \geqslant 0$ signifie

$$\|f''\|_\infty h^2 \geqslant 4 \|f\|_\infty \quad \textit{i.e.} \quad \sqrt{\|f''\|_\infty} h \geqslant 2\sqrt{\|f\|_\infty}.$$

On remarque alors que $\|f''\|_\infty = 0$ si et seulement si f'' est la fonction nulle, si et seulement si f' est une fonction constante (provient de l'inégalité des accroissements finis pour fonctions à valeurs vectorielles et du fait que $\mathbb{R}$ est connexe). De même, f' est constante si et seulement si f est de la forme $x \mapsto ax + b$ qui n'est pas borné. Donc l'hypothèse $\|f\|_\infty < +\infty$ implique que f'' n'est pas nulle: on peut donc diviser par $\|f''\|_\infty$. Alors

$$g'(h) \geqslant 0 \Longleftrightarrow h \geqslant 2\sqrt{\frac{\|f\|_\infty}{\|f''\|_\infty}},$$

et on trouve donc le minimum de g ce qui donne:

$$\|f'\|_\infty \leqslant 2\sqrt{\|f\|_\infty \|f''\|_\infty}.$$

3. La majoration trouvée en 1. n'est pas assez précise pour obtenir $\sqrt{2}$ et non pas 2 en facteur de la racine. Pour avoir une majoration satisfaisante, on aimerait utiliser une formule du cours qui nous donne une égalité avec reste. Le problème est que nous avons une fonction à valeurs vectorielles et le seul résultat donnant une égalité dans ce cas requiert la complétude de E. On doit donc ruser un peu. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $h > 0$, on a

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \big(f(x+h) - f(x) - hf'(x)\big),$$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \big(f(x-h) - f(x) + hf'(x)\big).$$

En soustrayant la première égalité à la deuxième, on obtient

$$f(x+h) - f(x-h) = 2hf'(x) + \big(f(x+h) - f(x) - hf'(x)\big) - \big(f(x-h) - f(x) + hf'(x)\big).$$

On utilise à nouveau la formule de Taylor-Lagrange sur les parenthèses, et on a

$$2h\left\|f'(x)\right\| \leqslant 2\left\|f\right\|_\infty + 2.\frac{h^2}{2}\left\|f''\right\|_\infty.$$

Le membre de droite est indépendant de x donc on peut passer à la borne sup et on obtient la majoration légèrement plus précise que l'on voulait. Il suffit de refaire le même travail de minimisation de la question 2. sur $g : h \mapsto \frac{1}{h}\left\|f\right\|_\infty + \frac{h}{2}\left\|f''\right\|_\infty$ et on obtient le résultat de la question 3.

$\square$