TD 4 : Différentielle

Questions de cours:

1. Pour une application entre deux espaces vectoriels normés, que signifie qu'elle est différentiable en un point ? Que signifie qu'elle est de classe $\mathcal{C}^2$?
2. Quelle est la différentielle d'une application constante ? D'une application linéaire continue ? D'une application bilinéaire continue ?
3. Quelles sont les étapes à suivre pour calculer la différentielle d'une application ?
4. La différentiabilité d'une application en un point implique-t-elle sa continuité en ce point ?
5. Donner la définition de la dérivée en un point a et dans une direction v d'une application entre espaces vectoriels normés.
6. Si f admet une dérivée en un point a dans toutes les directions v, f est-elle nécessairement différentiable en a ? La réciproque est-elle vraie ?
7. Énoncer le théorème des fonctions composées.
8. Énoncer le théorème des accroissements finis pour une fonction à variable vectorielle.
9. Si f est une application différentiable et bijective, que peut-on dire de la différentiabilité de sa réciproque ?
10. Qu'est-ce qu'un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme ?
11. Que signifie qu'une application admet une différentielle partielle d'ordre 1 ? d'ordre 2 (énoncer le lemme de Schwarz) ? d'ordre n ?
12. Quel est le lien entre les différentielles partielles et la différentiabilité ? Et entre les différentielles partielles et le fait d'être $\mathcal{C}^1$ ou $\mathcal{C}^2$?
13. Énoncer les formules de Taylor–Young et de Taylor avec reste intégral pour des applications à variable vectorielle.
14. Donner la définition de la matrice jacobienne, du gradient et de la matrice hessienne.

Exercices

Exercice 1. *Pour s'exercer*

Déterminer les différentielles des applications f suivantes aux points x_0 spécifiés:

1. En $x_0 = 0$ avec
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^x + x^2 - \sin(x). \end{array}$$
2. En $(x_0, y_0) = (1, 2)$ avec
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & 2x - 3y. \end{array}$$
3. En $(x_0, y_0) = (0, 0)$ avec
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (\cos(x), 2x - \sin(y)). \end{array}$$
4. En $(x_0, y_0) = ((0, -1, 0), (1, 1, 0))$ avec
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x_1 y_2 + x_2 y_3 - 2 x_3 y_1. \end{array}$$

5. En $x_0 = I_n$ avec
$$f \quad : \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & AA^T. \end{array}$$

Donner la matrice jacobienne des applications données aux points 2 et 3.

Exercice 2. *Application directe de la définition*
Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. On suppose qu'il existe une constante $M > 0$ telle que :
$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \|f(x)\| \leqslant M\|x\|^2.$$
L'application f est-elle différentiable en 0 ?

Exercice 3. *Différentielle du carré de la norme*
Soit $N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ une norme sur $\mathbb{R}^n$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ par
$$f(x) = \big(N(x)\big)^2.$$

1. Montrer que N n'est pas différentiable en 0.
2. Montrer que f est différentiable en 0 et donner sa différentielle df_0.

Exercice 4. *Condition suffisante pour être constante*
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, on ait:
$$|f(x) - f(y)| \leqslant \|x - y\|^2 .$$
Démontrer que f est constante.

Exercice 5. *Condition suffisante pour être linéaire*
Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ différentiable. On suppose que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $x \in \mathbb{R}^n$, $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

1. Démontrer que $f(0) = 0$.
2. Démontrer que f est linéaire.

Exercice 6. *Un petit bout du théorème d'Hadamard-Lévy*
Une application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est dite *propre* si, pour tout $K \subseteq \mathbb{R}^m$ compact, $f^{-1}(K)$ est compact.
Montrer que si $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ est un $\mathcal{C}^1-$difféomorphisme global de $\mathbb{R}^n$, alors f est propre et, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, la différentielle de f en x est inversible.

Remarque: La réciproque est vraie: une application propre, de classe $\mathcal{C}^2$ et dont la différentielle est partout inversible est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme global. La démonstration est difficile.

Exercice 7. *Applications bilinéaires continues*
Soit $(E_1, \|\cdot\|_{E_1})$, $(E_2, \|\cdot\|_{E_2})$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ des espaces vectoriels normés. On pose $E = E_1 \times E_2$ que l'on munit de la norme $\|\cdot\|_E$ définie par :
$$\forall x = (x_1, x_2) \in E, \quad \|x\|_E = \max\{\|x_1\|_{E_1}, \|x_2\|_{E_2}\}.$$
Soit $f : E \to F$ une application bilinéaire continue. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et donner l'expression de sa différentielle. En déduire que si $(A, \|\cdot\|)$ est une algèbre normée, l'application $(x, y) \in A \times A \mapsto xy \in A$ est de classe $\mathcal{C}^1$.
Remarque: plus généralement, on peut montrer que le résultat reste valable pour toute application n-linéaire continue. La preuve du caractère $\mathcal{C}^1$ est difficile.

Exercice 8. *Puissance sur une algèbre normée*

Soit E une algèbre normée et soit $n \geqslant 1$. Montrer que l'application puissance : $g_n : x \in E \mapsto x^n \in E$, est de classe $\mathcal{C}^1$ (on pourra utiliser le résultat de la remarque suivant l'exercice 7) et que :

$$\forall x \in E, \forall h \in E, \quad d(g_n)_x(h) = \sum_{k=0}^{n-1} x^k h x^{n-1-k}.$$

Exercice 9. *Transformation d'une suite ℓ^p*

Soient $p \geqslant 1$ et $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ une fonction nulle en 0. On pose :

$$F \quad : \quad \begin{array}{ccc} \ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{R}) & \to & \ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \\ x = (x_n)_{n \geqslant 0} & \mapsto & F(x) = (f(x_n))_{n \geqslant 0} \end{array}.$$

1. Montrer que F est bien définie.
2. Montrer que F est différentiable et calculer sa différentielle.
3. F est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?

Exercice 10. *Transformation d'une suite ℓ^∞*

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On pose :

$$F \quad : \quad \begin{array}{ccc} \ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R}) & \to & \ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \\ x = (x_n)_{n \geqslant 0} & \mapsto & F(x) = (f(x_n))_{n \geqslant 0} \end{array}.$$

Montrer que F est bien définie, deux fois différentiable et calculer sa différentielle seconde.

Exercice 11. *Changements de variables*

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux applications différentiables.

1. Exprimer la dérivée de : $x \in \mathbb{R} \mapsto \alpha(x) = f(x, x) \in \mathbb{R}$ en fonction de la différentielle de f.
2. Exprimer la différentielle de : $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \beta(x, y) = f(y, x) \in \mathbb{R}$ en fonction de la différentielle de f.
3. Exprimer la différentielle de : $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \gamma(x, y) = g(x^2 + y^2) \in \mathbb{R}$ en fonction de la dérivée de g.
4. Exprimer la différentielle de : $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \delta(x, y) = g(xf(x, y^2)) \in \mathbb{R}$ en fonction de la différentielle de f et de la dérivée de g.

Exercice 12. *La trace de la puissance*

Soit $k \geqslant 1$. Montrer le caractère $\mathcal{C}^1$ de l'application suivante :

$$M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \mathrm{Tr}(M^k) \in \mathbb{R}.$$

Calculer sa différentielle.

Exercice 13. *Détecteur de vecteurs propres*

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et u un endomorphisme de E continu et symétrique (i.e. pour tout $(x, y) \in E^2$: $\langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$).

1. Montrer que l'application $x \in E \mapsto \langle u(x), x \rangle \in \mathbb{R}$ est différentiable sur E et calculer sa différentielle.
2. On considère l'application :
$$\varphi \quad : \quad \begin{array}{ccc} E \setminus \{0\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\langle u(x), x \rangle}{\|x\|^2} \end{array}.$$
Établir qu'il s'agit d'une application différentiable et calculer sa différentielle. Montrer que pour tout élément non nul a de E, $d\varphi_a \equiv 0$ si et seulement si a est un vecteur propre de u.

Exercice 14. *Un calcul de différentielle en dimension infinie*
On note $E = \{f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R}),\ f(0) = 0\}$ et $F = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, qu'on munit des normes :

$$\forall f \in E,\ \|f\|_E = \|f'\|_\infty \quad \text{et} \quad \forall g \in F,\ \|g\|_F = \|g\|_\infty.$$

On définit alors $T : E \to F$ par :

$$\forall f \in E,\ Tf = f' + f^2.$$

1. Montrer que $\|\cdot\|_E$ définit bien une norme sur E. L'espace vectoriel normé obtenu est il complet ?
2. Montrer que T est $\mathcal{C}^1$ et donner l'expression de sa différentielle.

Exercice 15. *L'intégrale du déterminant*
On note $E = \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R}^2)$ qu'on munit de la norme $\|\cdot\|_E$ définie par :

$$\forall f \in E,\ \|f\|_E = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty.$$

Montrer le caractère $\mathcal{C}^1$ de l'application $T\colon E \to \mathbb{R}$ définie par

$$f \mapsto \int_0^1 \det(f(t), f'(t))\,\mathrm{d}t.$$

Calculer sa différentielle.

Exercice 16. *Différentielle d'une fonction définie par une intégrale*
Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme $\|\cdot\|_\infty$. Soit F un espace de Banach et $\varphi : \mathbb{R} \to F$ une application de classe $\mathcal{C}^2$. On définit $T : E \to F$ par

$$\forall f \in E, \quad T(f) := \int_0^1 \varphi\big(f(t)\big)\,dt.$$

1. Montrer que T est bien définie pour tout $f \in E$.
2. Montrer que T est continue.
3. Montrer que T est différentiable et que sa différentielle en tout point $f \in E$ est donnée par
$$\forall h \in E, \quad dT_f(h) = \int_0^1 h(t)\,\varphi'\big(f(t)\big)\,dt.$$
(On pourra utiliser une formule de Taylor.)
4. Expliciter les formules obtenues pour $T(f)$ et $dT_f(h)$ lorsque
$$\varphi(x) = x^3 - 2x^2 - x \quad \text{et} \quad F = \mathbb{R}.$$

Exercice 17. *Une généralisation de l'égalité des accroissements finis*
Soient E un espace vectoriel normé et Ω un ouvert convexe de E. Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une application différentiable. Montrer que pour tous $x, y \in \Omega$, il existe $c \in]x, y[$ tel que :

$$f(y) = f(x) + df(c).(y - x).$$

Exercice 18. *Continuité et différentiabilité en fonction d'un paramètre*
Soit $\alpha > 0$. Étudier, en fonction de α, la continuité puis la différentiabilité à l'origine de l'application $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{|xy|^\alpha}{\sqrt{x^2+3y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 19. *Rang localement constant*

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une application $\mathcal{C}^1$. Montrer qu'il existe un ouvert U dense dans $\mathbb{R}^n$ tel que le rang de df soit localement constant sur U (i.e pour tout $x \in U$, il existe un ouvert contenant x sur lequel df est de rang constant).

Exercice 20. *Lemme d'Hadamard*

Soit Ω un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ contenant 0 et soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R})$. On suppose que $f(0) = 0$ et $df(0) = 0$. Montrer qu'il existe des fonctions $g_{i,j} \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R})$, pour $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, telles que :

$$\forall x \in \Omega, \quad f(x) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j g_{i,j}(x).$$

Exercice 21. *Pour s'exercer*

Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes et préciser le domaine de validité des calculs.

1. $f(x, y) = x^y + \sqrt{x^2 + y^2}$.
2. $f(x, y) = \frac{x+y}{x^2+y^2}$.

Exercice 22. *Défauts de la dérivée directionnelle*

1. On considère $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par

$$(x, y) \mapsto f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ y & \text{sinon.} \end{cases}$$

   Montrer que f admet une dérivée suivant tous les vecteurs en $(0, 0)$, mais que f n'est pas continue en $(0, 0)$.

2. On considère $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par

$$(x, y) \mapsto f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^4+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

   Montrer que f est dérivable en $(0, 0)$ suivant tous les vecteurs mais n'est pas différentiable en $(0, 0)$.

Exercice 23. *Un exemple de calcul de différentielle partielle*

Pour $X = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $U = (u, v, w) \in \mathbb{R}^3$, on note $f(X, U) = (xu^2 + y^2 vw, uv(x + y))$. Calculer la différentielle partielle $\frac{\partial f}{\partial U}(X, U)$.

Exercice 24. *Calcul concret de dérivées partielles*

On considère l'application $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 y^2 \ln(x^2 + y^2) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Étudier la continuité de f puis l'existence et la continuité de ses dérivées partielles premières.

Exercice 25. *Contre-exemple de Peano au lemme de Schwarz*[1]

Soit $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que les dérivées partielles $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$ existent mais ne sont pas égales. Quelle(s) hypothèse(s) du lemme de Schwarz cette application f ne satisfait-elle pas ?

[1] Hermann Amandus Schwarz (1843 - 1921) est un mathématicien allemand s'intéressant à la géométrie différentielle réelle et complexe. À ne pas confondre avec Laurent Schwartz (1915 - 2002) qui est un mathématicien français, lauréat de la médaille Fields pour ses travaux sur la théorie des distributions.

Exercice 26. *Différentiable ?*

On considère $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x\sin(y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue.
2. f admet-elle des dérivées partielles en $(0,0)$?
3. f est-elle différentiable en $(0,0)$?

Exercice 27. *Une limite*

Calculer la limite :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^x - (1+x)\cos y}{(x^2+y^2)\cos y}.$$

Indication : on pourra étudier la fonction $f : \mathbb{R}\times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ *définie par :* $f(x,y) = \frac{e^x}{\cos y}$.

Exercice 28. *Fonctions invariantes par translation*

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Déterminer les fonctions $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telles que :

$$\forall x, y, t \in \mathbb{R},\ f(x+ta, y+tb) = f(x,y).$$

Exercice 29. *Méthode du gradient à pas optimal**

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ elliptique, *i.e.* de classe $\mathcal{C}^1$ telle qu'il existe $\alpha > 0$ satisfaisant

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad \langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x-y\rangle \geqslant \alpha \left\|x-y\right\|^2.$$

Montrer que la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $x_{k+1} = x_k - \rho_k \nabla f(x_k)$ où $\rho_k = \text{argmin}_{\rho>0} f(x_k - \rho\nabla f(x_k))$ converge vers l'unique minimum global de f.

Exercice 30. *Étude des points d'une superficie*

Soit U un ouvert de R^2 et $\underline{x} : U \to \mathbb{R}^3$ une application de classe $\mathcal{C}^\infty$. Dans cet exercice, on notera $a \cdot b$ le produit scalaire euclidien entre deux points a et b et $a \times b$ leur produit vectoriel qui est, pour rappel:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}.$$

On notera également $\underline{x}_u$, $\underline{x}_{uu}$, $\underline{x}_v$ et $\underline{x}_{vv}$ les dérivées partielles premières et secondes de $\underline{x}$ selon u et v respectivement. Considérons $p = \underline{x}(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^3$ et posons

$$\underline{n}(p) = \frac{\underline{x}_u(u_0,v_0) \times \underline{x}_v(u_0,v_0)}{\|\underline{x}_u(u_0,v_0) \times \underline{x}_v(u_0,v_0)\|}.$$

On note alors

$$I = \begin{pmatrix} \underline{x}_u \cdot \underline{x}_u & \underline{x}_u \cdot \underline{x}_v \\ \underline{x}_v \cdot \underline{x}_u & \underline{x}_v \cdot \underline{x}_v \end{pmatrix}, \qquad II = \begin{pmatrix} \underline{n}(p) \cdot \underline{x}_{uu} & \underline{n}(p) \cdot \underline{x}_{uv} \\ \underline{n}(p) \cdot \underline{x}_{vu} & \underline{n}(p) \cdot \underline{x}_{vv} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad K = \frac{\det(II)}{\det(I)}$$

1. Pour $\underline{x}(u,v) = (u\cos(v), u\sin(v), \ln(u))$, déterminer l'ensemble de définition D de $\underline{x}$ et le signe de K pour tout $p \in \underline{x}(D)$.
2. Esquisser la superficie donnée par $\underline{x}(D)$.
3. Mêmes questions pour $\underline{y}(u,v) = (1 + \mathrm{e}^{u^2+v^2}, u, v)$.

Remarque: Les applications $\underline{x}$ et $\underline{y}$ sont des paramétrisations de superficies. Les matrices I et II sont appelées respectivement première et seconde forme fondamentale des superficies. La fonction K s'appelle "courbure de Gauss". Le signe de K classifie les points des superficies: les points elliptiques ont une courbure de Gauss positive, les points hyperboliques ont une courbure de Gauss négative et les points planaires ou paraboliques ont une courbure de Gauss nulle. C'est grâce à cette classification que l'on montre qu'il est impossible de représenter correctement les distances sur un planisfère.