TD 4 - Exercice 5 *Condition suffisante pour être linéaire*

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ différentiable. On suppose que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $x \in \mathbb{R}^n$, $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

2. Démontrer que f est linéaire.

Méthode 1. On veut montrer que f est égale à sa différentielle en 0. Par définition de la différentiabilité de f en $x \in \mathbb{R}^n$, on a $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_\varepsilon > 0$, tel que $\forall h \in \mathbb{R}^n$,

$$\|h\| < \delta_\varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \|f(x+h) - f(x) - df_x(h)\| < \varepsilon \|h\|.$$

En regardant en $x = 0$ et en utilisant le fait que $f(0) = 0$, on obtient $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_\varepsilon > 0$, tel que $\forall h \in \mathbb{R}^n$,

$$\|h\| < \delta_\varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \|f(h) - df_0(h)\| < \varepsilon \|h\|.$$

Le problème ici est qu'en faisant tendre ε vers 0, on pourrait faire tendre la norme de h vers 0 et donc h vers le vecteur nul: on otiendrait seulement

$$f(0) = df_0(0).$$

Pour montrer que $f = df_0$ sur la sphère, on prend $u \in \mathbb{R}^n$ de norme 1 et on pose $h = tu$ avec $t \in \mathbb{R}$. On a alors, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_\varepsilon > 0$, tel que $\forall t \in \mathbb{R}^*$,

$$\|h\| = |t| < \delta_\varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \|f(tu) - df_0(tu)\| < \varepsilon \|h\| = \varepsilon |t|.$$

Donc $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_\varepsilon > 0$, tel que $\forall t \in \mathbb{R}^*$,

$$|t| < \delta_\varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \|f(\operatorname{sgn}(t)u) - df_0(\operatorname{sgn}(t)u)\| < \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \|f(u) - df_0(u)\| < \varepsilon,$$

où on a utilisé l'homogénéité de f, df_0 et de la norme. On peut donc faire tendre ε vers 0: ici seul t pourrait tendre vers 0, la norme de u étant fixée. On obtient l'égalité $f(u) = df_0(u)$ sur la sphère, *i.e.* pour tout u de norme 1. L'égalité est évidemment vraie en 0 par homogénéité et l'égalité sur $\mathbb{R}^n$ se fait comme suit: pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$,

$$\frac{x}{\|x\|} \in \mathbb{S}^n \quad \Longrightarrow \quad f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = df_0\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \quad \Longrightarrow \quad f(x) = df_0(x).$$

Remarque: On pourrait se passer de le faire en deux étapes (d'abord sur la sphère et ensuite partout) en adaptant ε et δ_ε à la norme de u.

Méthode 2. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Puisque f est différentiable en 0, on a

$$f(0 + \lambda x) = f(0) + df_0(\lambda x) + \underset{\lambda \to 0}{o}(\|\lambda x\|)$$

Donc par homogénéité de f et de df_0 et puisque $f(0) = 0$,

$$\lambda f(x) = \lambda df_0(x) + \underset{\lambda \to 0}{o}(\|\lambda\|),$$

c'est-à-dire,

$$f(x) = df_0(x) + \underset{\lambda \to 0}{o}(1).$$

Ainsi, en faisant tendre λ vers le vecteur nul, on obtient que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $f(x) = df_0(x)$.

TD4 - Exercice 30 *Étude des points d'une superficie*

1. Pour $\underline{x}(u,v) = (u\cos(v), u\sin(v), \ln(u))$, déterminer l'ensemble de définition D de $\underline{x}$ et le signe de K pour tout $p \in \underline{x}(D)$.

2. Esquisser la superficie donnée par $\underline{x}(D)$.

3. Mêmes questions pour $\underline{y}(u,v) = (1 + \mathrm{e}^{u^2+v^2}, u, v)$.

Résolution:

1. Calculons ses dérivées partielles: pour tout $(u,v) \in D := \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$,

$$\underline{x}_u(u,v) = (\cos(v), \sin(v), 1/u) \quad \text{et} \quad \underline{x}_v(u,v) = (-u\sin(v), u\cos(v), 0).$$

Ainsi, pour tout $(u,v) \in D$,

$$I = \begin{pmatrix} \frac{1+u^2}{u^2} & 0 \\ 0 & u^2 \end{pmatrix} \quad \text{et donc} \quad \det(I) = 1 + u^2.$$

On a également, pour tout $p \in \underline{x}(D)$,

$$n(p) = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}(-\cos(v), -\sin(v), u).$$

D'autre part,

$$\underline{x}_{uu}(u,v) = (0, 0, -1/u^2), \quad \underline{x}_{vv}(u,v) = (-u\cos(v), -u\sin(v), 0) \quad \text{et } \underline{x}_{uv} = \underline{x}_{vu} = (-\sin(v), \cos(v), 0),$$

où $\underline{x}_{uv} = \underline{x}_{vu}$ puisque $\underline{x}$ est $\mathcal{C}^2$ sur D. Ainsi, pour tout $(u,v) \in D$,

$$II = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \begin{pmatrix} -1/u & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} \quad \text{et donc} \quad \det(II) = \frac{-1}{\det(I)}.$$

Finalement, pour tout $(u,v) \in D$,

$$K = \frac{-1}{(1+u^2)^2} < 0.$$

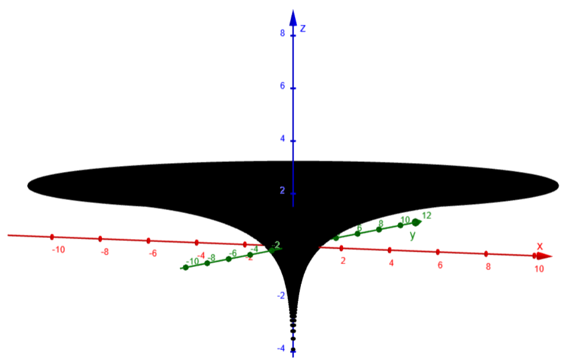

Figure 1: Esquisse de la superficie décrite par $\underline{x}$

2. Calculons ses dérivées partielles: pour tout $(u,v) \in D := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, notons $f(u,v) = \mathrm{e}^{u^2+v^2}$, on a

$$\underline{y}_u(u,v) = (f_u(u,v), 1, 0) \quad \text{et} \quad \underline{y}_v(u,v) = (f_v(u,v), 0, 1).$$

Ainsi, pour tout $(u,v) \in D$,

$$I = \begin{pmatrix} 1 + f_u(u,v)^2 & f_u(u,v)f_v(u,v) \\ f_u(u,v)f_v(u,v) & 1 + f_v(u,v)^2 \end{pmatrix} \quad \text{et donc} \quad \det(I) = 1 + f_u(u,v)^2 + f_v(u,v)^2.$$

On a également, pour tout $p \in \underline{y}(D)$,

$$n(p) = \frac{1}{\sqrt{\det(I)}}(1, -f_u(u,v), -f_v(u,v)).$$

D'autre part, puisque $\underline{y}$ est $\mathcal{C}^2$ sur D f l'est également. Ainsi, pour tout $(u,v) \in D$,

$$\underline{y}_{uu}(u,v) = (f_{uu}(u,v), 0, 0), \quad \underline{y}_{vv}(u,v) = (f_{vv}(u,v), 0, 0) \quad \text{et } \underline{y}_{uv} = \underline{y}_{vu} = (f_{uv}(u,v), 0, 0).$$

On remarque que le signe de K est donné par le signe de $f_{uu}(u,v)f_{vv}(u,v) - f_{uv}(u,v)^2$ qui, à son tour, est donné par le signe de

$$(1 + 2u^2)(1 + 2v^2) - (2uv)^2 = 1 + 2(u^2 + v^2) > 0.$$

Ainsi, pour tout $(u,v) \in D$,

$$K > 0.$$

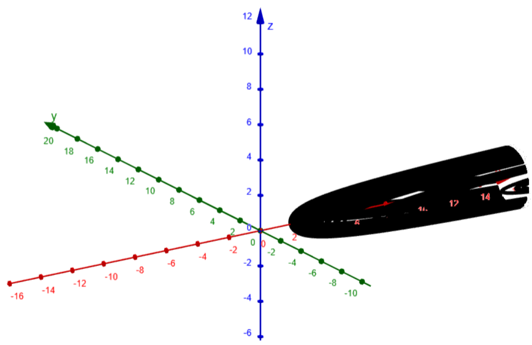

Figure 2: Esquisse de la superficie décrite par $\underline{y}$