TD 5 : Inversion locale et fonctions implicites

Questions de cours:

1. Qu'est ce qu'un $\mathcal{C}^1$- difféomorphisme?
2. Énoncer le théorème d'inversion locale.
3. Énoncer le théorème d'inversion globale.
4. Énoncer le théorème des fonctions implicites.
5. Pourquoi a-t-on besoin de l'hypothèse de complétude dans les théorèmes cités ci-dessus?

Exercices

Exercice 1. *Un difféomorphisme global*

1. Soit $v \in \mathbb{R}$. On pose:
$$\begin{array}{cccc} \phi_v & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & x + \frac{1}{2}\sin(v - \sin(x)). \end{array}$$
Montrer que ϕ_v réalise un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme global de $\mathbb{R}$ sur lui-même.
2. On pose :
$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & & (x,y) & \mapsto & (x + \frac{1}{2}\sin(y), y + \sin(x)). \end{array}$$
Montrer que f réalise un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme global de $\mathbb{R}^2$ sur lui-même.

Exercice 2. *Perturbation de l'identité*

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle qu'il existe $0 < k < 1$ tel que :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ |f'(x)| \leqslant k.$$
On définit :
$$\begin{array}{cccc} g & : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & & (x,y) & \mapsto & (x + f(y), y + f(x)) \end{array}$$
Montrer que g est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3. *Fonctions strictement monotones*

Soit E un espace euclidien. Une application $f : E \to E$ est dite strictement monotone s'il existe $k > 0$ tel que
$$\forall x, y \in E, \quad \langle f(x) - f(y), x - y\rangle \geqslant k\|x - y\|^2.$$

1. Soit $f : E \to E$ de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que f est strictement monotone si et seulement si
$$\exists k > 0, \forall x \in E, \forall h \in E, \quad \langle df(x) \cdot h, h\rangle \geqslant k\|h\|^2.$$
2. Montrer que si $f : E \to E$ est $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone, alors c'est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme global sur E.

Exercice 4. *Inversion globale et fonctions dilatantes*

Soit $k > 0$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ supposée k-dilatante, i.e. :
$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad \|f(x) - f(y)\| \geqslant k\|x - y\|.$$
On veut montrer que f est un difféomorphisme global de $\mathbb{R}^n$ sur lui-même.

1. Montrer que f est injective et d'image fermée.
2. Montrer que $df(x)$ est inversible pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.
3. Conclure.
   Indication : on utilisera la connexité de $\mathbb{R}^n$ qui assure qu'un ouvert-fermé non vide de $\mathbb{R}^n$ est nécessairement $\mathbb{R}^n$ (cf cours de Topologie générale)

Exercice 5. *Racine carrée et exponentielle de matrices*
Soit $n \geqslant 1$.

1. En considérant l'application
$$\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad M \mapsto M^2,$$
démontrer qu'il existe $\alpha > 0$ telle que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $\|A - I_n\| < \alpha$ il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = \varphi(B)$.
2. En considérant l'application
$$\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad M \mapsto \exp(M),$$
démontrer qu'il existe $\alpha > 0$ telle que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $\|A - I_n\| < \alpha$ il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = \exp(B)$.

Exercice 6. *Réduction des formes quadratiques*
Soit $A_0 \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique inversible. On considère :
$$\begin{array}{rccc} \varphi & : & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \\ & & M & \mapsto & {}^tMA_0M. \end{array}$$

1. Montrer que $d\varphi(I)$ est surjective et préciser son noyau et sa dimension.
2. Montrer qu'il existe un voisinage V de A_0 dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et une application $\psi \in \mathcal{C}^1(V, \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}))$ telle que :
$$\forall A \in V, \quad A = {}^t\psi(A)A_0\psi(A).$$

Exercice 7. *Une équation différentielle non linéaire*
On note $E = \{f \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R}),\ f(0) = 0\}$ et $F = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$, qu'on munit des normes :
$$\forall f \in E,\ \|f\|_E = \|f'\|_\infty \quad \text{et} \quad \forall g \in F,\ \|g\|_F = \|g\|_\infty.$$
On définit alors $T : E \mapsto F$ par :
$$\forall f \in E,\ Tf = f' + f^2.$$
On rappelle que $(E, \|\cdot\|_E)$ est un espace de Banach et que T est $\mathcal{C}^1$ *(cf TD4)*. Montrer qu'il existe $r_1, r_2 > 0$ tels que pour toute fonction $g \in F$ avec $\|g\|_\infty \leqslant r_2$, il existe une unique fonction $y \in E$ telle que $\|y\|_E \leqslant r_1$ et
$$y' + y^2 = g.$$

Exercice 8. *Il n'y a pas de sous-groupes arbitrairement "petits" dans* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$

1. Montrer que $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est un difféomorphisme local au voisinage de 0.
2. En déduire qu'il existe un voisinage W de I_n dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que si G est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ contenu dans W, alors G est trivial.

Exercice 9. *Un calcul explicite*
Démontrer que la relation :
$$x + y + z + \sin(xyz) = 0,$$
définit z comme une fonction $\mathcal{C}^\infty$ de x et y autour du point $(0,0,0)$. Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial z}{\partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial z}{\partial y}(0,0)$.

Exercice 10. *Un système déquation*

On considère le système d'équations

$$\begin{cases} x^4 + y^3 + z^4 + t^2 = 0, \\ x^3 + y^2 + z^2 + t = 2, \\ x + y + z + t = 0. \end{cases}$$

1. Montrer qu'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de $(0, -1, 1, 0)$ et une fonction $\varphi : t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$ de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de 0 tels que $(x, y, z) \in \mathcal{V}$ est solution du système si et seulement si $(x, y, z) = \varphi(t)$.

2. Calculer la dérivée de φ en 0.

Exercice 11. *Polynômes scindés à racines simples*

On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n. Soit $P_0 \in \mathbb{R}_n[X]$ un polynôme admettant n racines réelles distinctes.

1. Montrer qu'il existe un voisinage $V \subset \mathbb{R}_n[X]$ de P_0 et des applications $\lambda_1, \ldots, \lambda_n : V \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ telles que tout polynôme $P \in V$ admet n racines réelles distinctes $\lambda_1(P) < \ldots < \lambda_n(P)$.

2. Soit $i \in \{1, \ldots, n\}$. Pour tout $P \in V$, calculer $d\lambda_i(P)$.

Exercice 12. *Asymptotique des racines d'une équation du troisième degré*

Soient $a < b$ deux réels. On pose :

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ & & (x, \varepsilon) & \mapsto & (x-a)(b-x) + \varepsilon x^3. \end{array}$$

Montrer que pour $\varepsilon > 0$ assez petit, l'équation $f(x, \varepsilon) = 0$ admet trois racines réelles distinctes $x_1(\varepsilon) < x_2(\varepsilon) < x_3(\varepsilon)$. Donner un développement asymptotique à l'ordre $O(\varepsilon^2)$ de ces racines lorsque ε tend vers 0.

Exercice 13. *Perturbation de matrices et valeurs propres*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_0 \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice possédant n valeurs propres réelles distinctes. Montrer que, si $A \in M_n(\mathbb{R})$ est proche de A_0, alors A possède également n valeurs propres réelles distinctes, et que ces valeurs propres dépendent continûment de A.

Exercice 14. *Étude des valeurs régulières**

Soient M un ouvert de $\mathbb{R}^m$ et N un ouvert de $\mathbb{R}^n$ avec $m \geqslant n$. Soit $f : M \to N$ une application de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $y \in N$ un point tel qu'il existe $x \in M$ tel que df_x soit de rang n (donc surjective).

1. Montrer que si f est bijective, alors $m = n$ et $f^{-1}(\{y\})$ est un point.

2. Montrer, dans le cas général, que $f^{-1}(\{y\})$ est localement $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphe à $\mathbb{R}^{m-n}$.

Exercice 15. *La sphère*

Utiliser l'exercice précédent pour déduire que la sphère $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \ ; \ x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}$ est localement $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphe à un $\mathbb{R}^k$ avec $k \in \mathbb{N}$.