TD5 - Exercice 2 *Perturbation de l'identité*

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle qu'il existe $0 < k < 1$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |f'(x)| \leqslant k.$$

On définit :

$$\begin{array}{rcccl} g & : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & & (x,y) & \mapsto & (x+f(y), y+f(x)) \end{array}$$

Montrer que g est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

Résolution: On veut appliquer le théorème d'inversion globale à l'application g.

- Étape 0: l'application g est $\mathcal{C}^1$.

C'est clair car chacune de ses composantes l'est.

- Étape 1: pour tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, la différentielle $dg_{(x,y)}$ est inversible.

On a, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\left|\det\left(\mathrm{Jac}(f)_{(x,y)}\right)\right| = \left|\det\begin{pmatrix} 1 & f'(y) \\ f'(x) & 1 \end{pmatrix}\right| = |1 - f'(y)f'(x)| \geqslant 1 - |f'(y)|\,|f'(x)| \geqslant 1 - k^2 > 0.$$

D'où l'inversibilité.

- Étape 2: l'application g est injective.

Soient $(x,y),(u,v) \in \mathbb{R}^2$ tels que $g(x,y) = g(u,v)$. On note $\|(a,b)\|_\infty = \max(|a|,|b|)$. On a

$$\begin{aligned} \|(x+f(y), y+f(x)) - (u+f(v), v+f(u))\|_\infty &= \|(x-u, y-v) - (f(v)-f(y), f(u)-f(x))\|_\infty \\ &= 0 \\ &\geqslant \left|\|(x-u,y-v)\|_\infty - \|f(v)-f(y), f(u)-f(x)\|_\infty\right|. \end{aligned}$$

De plus, par l'inégalité des accroissements finis (g est $\mathcal{C}^1$) et par hypothèse sur f, on a

$$\begin{cases} |f(v)-f(y)| \leqslant k\,|v-y|, \\ |f(u)-f(x)| \leqslant k\,|u-x|. \end{cases}$$

Ce qui donne

$$\|f(v)-f(y), f(u)-f(x)\|_\infty \leqslant k\,\|(x-u,y-v)\|.$$

En mettant tout ensemble, on obtient

$$0 \geqslant \left|\|(x-u,y-v)\|_\infty - \|f(v)-f(y), f(u)-f(x)\|_\infty\right| \geqslant (1-k)\,\|(x-u,y-v)\|_\infty \geqslant 0.$$

D'où $(x,y) = (u,v)$ puisque $k < 1$.

- Étape 3: montrons que g est surjective.

Par l'étape 0 et 1, on sait que g est un difféomorphisme locale (TIL). Donc $g(\mathbb{R}^2)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Montrons que c'est également un fermé. Soit $\{(u_n,v_n)\}_\mathbb{N} \in g(\mathbb{R}^2)^\mathbb{N}$ une suite convergente vers un point $(u,v) \in \mathbb{R}^2$. Il existe une suite $\{(x_n,y_n)\}_\mathbb{N} \in (\mathbb{R}^2)^\mathbb{N}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g(x_n,y_n) = (u_n,v_n)$. Alors pour tout $p,q \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \|(x_p,y_p)-(x_q,y_q)\|_\infty &\leqslant \|g(x_p,y_p)-g(x_q,y_q)\| + \|(f(y_p)-f(y_q), f(x_p)-f(x_q))\| \\ &\underset{IAF}{\leqslant} \|g(x_p,y_p)-g(x_q,y_q)\| + k\,\|(y_p,y_q)-(x_p,x_q)\|_\infty \end{aligned}$$

C'est-à-dire:

$$\|(x_p,y_p)-(x_q,y_q)\|_\infty \leqslant \frac{1}{1-k}\,\|g(x_p,y_p)-g(x_q,y_q)\|.$$

Or la suite $(g(x_n,y_n))_\mathbb{N}$ étant convergente, la suite $\{(x_n,y_n)\}_\mathbb{N}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}^2$ qui est complet: elle converge vers un point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Ainsi, par continuité de f,

$$g(x_n,y_n) \underset{n\to\infty}{\to} g(x,y).$$

Par unicité de la limite, on obtient $g(x,y) = (u,v)$ et donc $(u,v) \in g(\mathbb{R}^2)$. D'où $g(\mathbb{R}^2)$ est fermé dans $\mathbb{R}^2$.

On a montré que $g(\mathbb{R}^2)$ est un ouvert-fermé de $\mathbb{R}^2$ qui est connexe: d'où $g(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$ et g est surjective.

- Étape 4: conclusion.

On a montré de g est une application $\mathcal{C}^1$, bijective de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que sa différentielle soit inversible en tout point: par le théorème d'inversion globale, g est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme global de $\mathbb{R}^2$ sur lui-même. □

TD5 - Exercice 9 *Un calcul explicite*

Démontrer que la relation :

$$x + y + z + \sin(xyz) = 0,$$

définit z comme une fonction $\mathcal{C}^\infty$ de x et y autour du point $(0,0,0)$. Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial z}{\partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial z}{\partial y}(0,0)$.

Résolution: On rappelle l'énoncé du théorème des fonctions implicites tel qu'il est écrit dans le polycopié du cours:

Théorème. Soient $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ et $(G, \|\cdot\|_G)$ des Banach, $\Omega_{E\times F}$ un ouvert de $(E\times F, \|\cdot\|_{E\times F})$, $(a,b) \in \Omega_{E\times F}$ et $f \in C^1(\Omega_{E\times F}, G)$ telle que $f(a,b) = 0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ soit une bijection de F sur G. Alors il existe

- un voisinage ouvert W de (a,b) dans $E \times F$,
- un voisinage ouvert V de a dans $(E, \|\cdot\|_E)$,
- $\varphi \in C^1(V, F)$,

tels que

$$\big((x,y) \in W \text{ et } f(x,y) = 0\big) \quad \Longleftrightarrow \quad \big(x \in V \text{ et } y = \varphi(x)\big).$$

On cherche une conclusion du type:

$$\text{"}(x,y,z) \in \{\textit{vois. de } (0,0,0)\} \textit{ et } f(x,y,z) = 0 \textit{ ssi } z \in \{\textit{vois. de } 0\} \textit{ et } z = \varphi(x,y).\text{"}$$

On pose

$$\begin{array}{rcc} f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & x + y + z + \sin(xyz) \end{array}$$

Le théorème du cours devient dans notre cas: On a $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}$ des Banach, $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$, $(0,0,0) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ et $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $f(0,0,0) = 0$. Si la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0)$ est non nulle, alors il existera

- un voisinage ouvert V de $(0,0,0)$ dans $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$,
- un voisinage ouvert U de $(0,0)$ dans $\mathbb{R}^2$,
- $\varphi \in C^\infty(U, \mathbb{R})$,

tels que

$$\big\{(x,y,z) \in V \text{ et } f(x,y,z) = 0\big\} \quad \Longleftrightarrow \quad \big\{z \in U \text{ et } z = \varphi(x,y)\big\}.$$

Or,

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 1 + xy\cos(xyz)$$

donc $\frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0) = 1 \neq 0$. D'où la première partie de l'exercice.

Pour ce qui est des dérivées partielles, il y a deux méthodes:

- En se rappelant de la formule du cours:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(0,0) = -\left(\frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0)\right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0,0) = -1$$

et idem

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(0,0) = -\left(\frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0)\right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial y}(0,0,0) = -1.$$

- En "re-démontrant" la formule du cours:

Au voisinage de $(0,0,0)$,

$$f(x,y,\varphi(x,y)) = x + y + \varphi(x,y) + \sin(xy\varphi(x,y)) = 0.$$

En dérivant par rapport à x, on obtient:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,\varphi(x,y)) + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y)\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,\varphi(x,y)) = 1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) + \left(xy\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) + y\varphi(x,y)\right)\cos(xy\varphi(x,y)) = 0.$$

D'où, en évaluant en $(0,0)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0,0) + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(0,0)\frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0) = 1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(0,0) + 0 = 0.$$

Et de même pour la dérivée partielle selon y. □

TD5 - Exercice 10 *Un système d'équation*

On considère le système d'équations

$$\begin{cases} x^4 + y^3 + z^4 + t^2 = 0, \\ x^3 + y^2 + z^2 + t = 2, \\ x + y + z + t = 0. \end{cases}$$

1. Montrer qu'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de $(0,-1,1,0)$ et une fonction $\varphi : t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$ de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de 0 tels que $(x,y,z,t) \in \mathcal{V}$ est solution du système si et seulement si $(x,y,z) = \varphi(t)$.

2. Calculer la dérivée de φ en 0.

Résolution:

1. On rappelle l'énoncé du théorème des fonctions implicites tel qu'il est écrit dans le polycopié du cours:

Théorème. Soient $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ et $(G, \|\cdot\|_G)$ des Banach, $\Omega_{E\times F}$ un ouvert de $(E \times F, \|\cdot\|_{E\times F})$, $(a,b) \in \Omega_{E\times F}$ et $f \in C^1(\Omega_{E\times F}, G)$ telle que $f(a,b) = 0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ soit une bijection de F sur G. Alors il existe

- un voisinage ouvert W de (a,b) dans $E \times F$,
- un voisinage ouvert V de a dans $(E, \|\cdot\|_E)$,
- $\varphi \in C^1(V, F)$,

tels que

$$\big((x,y) \in W \text{ et } f(x,y) = 0\big) \quad \Longleftrightarrow \quad \big(x \in V \text{ et } y = \varphi(x)\big).$$

On cherche une conclusion du type:

"$(t,(x,y,z)) \in$ *vois. de* $(0,(0,-1,1))$ *et* (x,y,z,t) *est sol. du système ssi* $t \in \{$*vois. de 0*$\}$ *et* $(x,y,z) = \varphi(t)$."

Donc on pose

$$\begin{array}{rcl} G:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (t,(x,y,z)) & \mapsto & \begin{pmatrix} x^4+y^3+z^4+t^2 \\ x^3+y^2+z^2+t-2 \\ x+y+z+t \end{pmatrix} \end{array}$$

telle que $G(0,(0,-1,1))=0$.

Dans notre cas, le théorème devient: on a $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^3$ des Banach, $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$ un ouvert de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$, $(0,(0,-1,1))\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$ et $G\in C^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$ telle que $G((0,(0,-1,1))=0$. Si la différentielle partielle $d_{(x,y,z)}G(0,(0,-1,1))$ est une bijection de $\mathbb{R}^3$ sur $\mathbb{R}^3$, alors il existera

- un voisinage ouvert $\mathcal{V}$ de $(0,(0,-1,1))$ dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$,
- un voisinage ouvert U de 0 dans $\mathbb{R}$,
- $\varphi\in C^1(U,\mathbb{R}^3)$,

tels que

$$\big\{(t,(x,y,z))\in\mathcal{V} \text{ et } G(t,(x,y,z))=0\big\} \quad\Longleftrightarrow\quad \big\{t\in U \text{ et } (x,y,z)=\varphi(t)\big\}.$$

C'est-à-dire, tels que

$$\big\{(t,(x,y,z))\in\mathcal{V} \text{ et } (x,y,z,t) \text{ est solution du système}\big\} \quad\Longleftrightarrow\quad \big\{t\in U \text{ et } (x,y,z)=\varphi(t)\big\}.$$

Reste à montrer la partie en rouge: $d_{(x,y,z)}G(0,(0,-1,1))$ est une bijection de $\mathbb{R}^3$ sur $\mathbb{R}^3$. On rappelle que, en notant G_i les composantes de G,

$$Jac_{(x,y,z)}G=\begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial x} & \frac{\partial G_1}{\partial y} & \frac{\partial G_1}{\partial z} \\ \frac{\partial G_2}{\partial x} & \frac{\partial G_2}{\partial y} & \frac{\partial G_2}{\partial z} \\ \frac{\partial G_3}{\partial x} & \frac{\partial G_3}{\partial y} & \frac{\partial G_3}{\partial z} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4x^3 & 3y^2 & 4z^3 \\ 3x^2 & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc $d_{(x,y,z)}G(0,(0,-1,1))$ est une bijection si et seulement si $\det\big(Jac_{(x,y,z)}G(0,(0,-1,1))\big)\neq 0$. Or,

$$\det Jac_{(x,y,z)}G=\det\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}=14\neq 0.$$

D'où le résultat.

2. Pour la dérivée de φ en 0, la formule du cours nous donne la composition de différentielles partielles suivante:

$$\varphi'(0)=-d_{(x,y,z)}G(0(-1,1,0))^{-1}\circ d_tG(0,(0,-1,1)).$$

Écrite avec les Jacobiennes, on a:

$$\varphi'(0)=-\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -15/14 \\ 2/7 \\ -3/14 \end{pmatrix}.$$

$\square$