

TD 1 : Espaces vectoriels normés et complétude

Questions de cours:

1. Que signifie le fait que deux normes soient équivalentes ? Existe-t-il deux normes non équivalentes dans $\mathbb{R}^5$?
2. Quels sont les ensembles compacts dans un $\mathbb{R}$ -evn de dimension finie ?
3. Que dit le théorème de Riesz ?
4. Qu'est-ce qu'une suite de Cauchy ? Une suite de Cauchy est-elle toujours bornée ? Peut-elle avoir deux valeurs d'adhérence distinctes ?
5. Qu'est-ce qu'un espace de Banach ? Quelle est la méthode classique pour montrer qu'un espace est de Banach ?
6. Dans quelle situation la convergence absolue d'une série implique-t-elle toujours sa convergence ?
7. Que dit le théorème du point fixe ?

Espaces vectoriels normés

Exercice 1. Exemples de normes

1. Montrer que le maximum entre deux normes sur un espace vectoriel E est encore une norme sur E .
2. Soient $a_1, \dots, a_n$ des réels et $N : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$N(x_1, \dots, x_n) = a_1 |x_1| + \dots + a_n |x_n|.$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur les a_k pour que N soit une norme sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 2. Normes sur les polynômes

Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$. On pose :

$$\|P\|_1 = \sum_{k=0}^n |a_k|, \quad \|P\|_2 = \left(\sum_{k=0}^n |a_k|^2 \right)^{1/2}, \quad \|P\|_\infty = \sup_{k \in \{0, \dots, n\}} |a_k|.$$

1. Montrer que l'on définit ainsi trois normes.
2. Sont-elles équivalentes ?

Exercice 3. Comparaison de normes sur $\mathbb{C}[X]$

Soit $a = (a_k)_{k \geq 0}$ une suite à valeurs réelles. Pour $P = \sum p_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ on pose :

$$N_a(P) := \sum_{k=0}^{+\infty} a_k |p_k|.$$

1. Montrer que N_a est bien définie et donner une condition nécessaire et suffisante sur a pour que N_a définisse une norme sur $\mathbb{C}[X]$.
2. Soient a et b deux suites réelles vérifiant la condition trouvée à la question 1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour avoir équivalence entre N_a et N_b .

Exercice 4. Comparaison de normes mixtes

On se place sur l'espace $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$. Pour $a \in [0, 1]$ et $f \in E$, on pose :

$$N_a(f) = \int_0^a |f(t)| dt + \sup_{x \in [a, 1]} |f(x)|.$$

1. Montrer que pour tout $a \in [0, 1]$, N_a est bien définie et qu'il s'agit d'une norme sur E .
2. Comparer N_a et N_b pour $0 \leq a \leq b \leq 1$.

Exercice 5. Étrangetés en dimension infinie

1. On munit dans un premier temps $\mathbb{R}[X]$ de la norme

$$\left\| \sum a_k X^k \right\|_{\infty} := \sup_{k \in \mathbb{N}} |a_k|.$$

Montrer que la suite $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée pour $\| \cdot \|_{\infty}$. Peut-on en extraire une sous-suite convergente ?

2. Construire une norme sur $\mathbb{R}[X]$ telle que la suite $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ tende vers 0 pour cette norme.
3. On fixe maintenant $P \in \mathbb{R}[X]$. Construire une norme sur $\mathbb{R}[X]$ telle que la suite $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ tende vers P pour cette norme.

Remarque : Cela montre que le choix de la norme est crucial et qu'on doit donc le préciser dès qu'on parle de convergence, complétude, etc.

Exercice 6. L'importance du corps de base

Considérons le $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel $E = \mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ muni de

$$N_0(a + b\sqrt{2}) = |a + b\sqrt{2}| \quad \text{et} \quad N_{\infty}(a + b\sqrt{2}) = \max(|a|, |b|).$$

Les normes N_0 et N_{∞} sont-elles équivalentes ? Commenter.

Complétude

Exercice 7. Complétude et polynômes

$\mathbb{C}[X]$ est-il complet pour l'une des normes introduites en Exercice 2. ?

Remarque : En fait, $\mathbb{C}[X]$ n'est complet pour aucune norme (cf 2ème partie du cours).

Exercice 8. Propriétés élémentaires sur les espaces complets

On se place sur un espace vectoriel normé E . Montrer que :

1. La complétude est stable par union finie, intersection quelconque, et produit cartésien fini (et même dénombrable).
2. Un ensemble compact est complet.
3. Une partie complète est fermée.
4. Si E est complet, les sous-ensembles complets sont les sous-ensembles fermés.
5. Une partie A est complète si et seulement si toute suite décroissante $(F_n)_{n \geq 0}$ de fermés non vides de A dont le diamètre tend vers zéro a une intersection non vide (et réduite à un point).

Exercice 9. Complétude en termes de séries

Soit E un espace vectoriel normé. Montrer que E est complet si et seulement si toute série absolument convergente d'éléments de E est convergente.

Exercice 10. Complétude de l'espace de fonctions continues bornées

Soient E et F deux espaces vectoriels normés, avec F complet. On note $\mathcal{C}_b^0(E, F)$ l'ensemble des fonctions continues bornées sur E à valeurs dans F . On le munit de la norme uniforme définie par :

$$\forall f \in \mathcal{C}_b^0(E, F), \quad \|f\|_\infty = \sup_{x \in E} \|f(x)\|_F.$$

Montrer qu'il s'agit d'un espace complet.

Exercice 11. Complétude de l'espace des fonctions bornées

On note $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions bornées sur X à valeurs réelles, où X est un ensemble quelconque. On le munit de la norme uniforme définie par :

$$\forall f \in \mathcal{B}(X, \mathbb{R}), \quad \|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Montrer qu'il s'agit d'un espace complet.

Exercice 12. Complétude des fonctions qui tendent vers 0 à l'infini

On note :

$$\mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \left\{ f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}), f \xrightarrow{\pm\infty} 0 \right\},$$

qu'on munit de la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$. Montrer que cet espace est complet.

Exercice 13. Complétude de l'espace des suites convergentes

On note X le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ formé des suites à valeurs réelles qui sont convergentes. On munit X de la norme uniforme définie par

$$\forall u \in X, \quad \|u\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|,$$

Montrer que $(X, \|\cdot\|_\infty)$ est complet.

Exercice 14. Normes sur l'espace des fonctions continues sur $[0, 1]$

On note $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$. On définit les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ par

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt, \quad \|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt \right)^{1/2} \quad \text{et} \quad \|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|.$$

1. Montrer que $\|\cdot\|_2$ définit effectivement une norme sur E .
2. Démontrer que ces trois normes ne sont pas équivalentes deux à deux.
3. $(E, \|\cdot\|_1)$ est-il complet ?

Exercice 15. Fonctions hölderiennes

Soit $\alpha \in (0, 1]$. On note Lip_α l'espace des fonctions α -hölderiennes sur $[0, 1]$ à valeurs réelles:

$$\text{Lip}_\alpha = \left\{ f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} ; \exists C_\alpha > 0 \text{ t.q. } |f(x) - f(y)| \leq C_\alpha |x - y|^\alpha, \quad \forall x, y \in [0, 1] \right\}$$

1. Comment s'appelle une fonction 1-hölderienne? Que dire d'une fonction α -hölderienne avec $\alpha > 1$?
2. Montrer que l'application N_α définie par :

$$N_\alpha(f) = \|f\|_\infty + \sup_{0 \leq x < y \leq 1} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha},$$

est une norme sur Lip_α .

3. Montrer que Lip_α muni de N_α est un espace de Banach.

Sur le théorème du point fixe

Exercice 16. *Contre-exemples au théorème du point fixe*

Trouver des espaces vectoriels normés E et des applications f qui satisfont :

1. E non complet, f contractante, envoie E dans E et sans point fixe.
2. E complet, f contractante, n'envoie pas E dans E et sans point fixe.
3. E complet, f non contractante, envoie E dans E et sans point fixe car ne satisfait que:

$$\forall (x, y) \in E^2, x \neq y \implies \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|. \quad (1)$$

4. E complet, f non contractante, envoie E dans E et admet plusieurs points fixes.

Exercice 17. *Théorème du point fixe dans un compact*

Soit A une partie compacte d'un espace vectoriel normé E , et soit $f: A \rightarrow A$ une application contractante au sens de (1). Montrer que f admet un unique point fixe $a \in A$ (*indication* : on pourra considérer l'application $x \mapsto \|x - f(x)\|$). Montrer que partant de n'importe quel point $x_0 \in A$, la suite des itérés de x_0 par f converge vers ce point fixe.

Exercice 18. *Théorème du point fixe avec une itérée contractante*

Soit E un espace de Banach et soit $f: E \rightarrow E$ une application telle qu'il existe $N \geq 1$ tel que f^N (l'itérée N -ème de f) soit contractante.

1. Montrer que f admet un unique point fixe $a \in E$.
2. Montrer que pour tout $x_0 \in E$, la suite des itérées par f partant de x_0 définie par : $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, converge vers a .

Exercice 19. *Équation intégrale linéaire de Volterra*

Soient $I = [a, b]$ et $K \in \mathcal{C}^0(I \times I, \mathbb{R})$. On note $E = \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$. Montrer que pour toute fonction $\phi \in E$, il existe une unique $f \in E$ solution de :

$$f(x) = \phi(x) + \int_a^x K(x, y) f(y) dy, \quad \forall x \in I.$$

Indication : on pourra utiliser le résultat de l'exercice précédent.

Exercice 20. *Théorème de Cauchy-Lipschitz sur un compact*

Le but de cet exercice est de montrer le résultat suivant.

Théorème. Soit $\mathbb{R}^n$ muni d'une norme $\|\cdot\|$ et I un intervalle compact de $\mathbb{R}$. Soit $f: I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue et globalement lipschitzienne en la seconde variable, *i.e.* : il existe $k > 0$ tel que pour tout $t \in I$ et tous $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$\|f(t, y) - f(t, x)\| \leq k \|y - x\|.$$

Alors si t_0 est un point de I et x_0 un point de $\mathbb{R}^n$, le système (dit "problème de Cauchy")

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = x \end{cases}$$

admet une unique solution y définie sur I .

1. Considérons

$$\begin{aligned} \Phi: \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n) &\rightarrow \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n) \\ y &\mapsto \left(t \mapsto x + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds \right). \end{aligned}$$

Montrer que pour tout $y_1, y_2 \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$, tout $t \in I$ et tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\|\Phi^p(y_1)(t) - \Phi^p(y_2)(t)\| \leq \frac{k^p}{p!} (t - t_0)^p \|y_1 - y_2\|_\infty.$$

2. En utilisant l'Exercice 18., montrer le théorème.