Fonctions de plusieurs variables : applications composantes, applications partielles

Clémentine Laurens, à partir du cours de Jean-Pierre Roudneff

« Les applications partielles donnent des résultats partiels ! » JPR

Dans tout ce document, on considère E_1 et E_2 des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels (avec $\mathbb{K}$ un corps) de dimensions finies notées respectivement n et p. On munit E_1 de la base $\mathcal{B}_1 = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ et E_2 de la base $\mathcal{B}_2 = (e'_1, e'_2, \ldots, e'_p)$.

1 Applications composantes

Définition 1 (Applications composantes). *Soient A une partie de E_1 et $f : A \to E_2$ une application quelconque. Notons, $\forall i \in [\![1, p]\!], \forall x \in A$, $f_i(x)$ la i-ème composante de $f(x)$ dans la base $\mathcal{B}_2$:*

$$f : \left| \begin{array}{ccl} A & \to & E_2 \\ x & \mapsto & f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_p(x))_{\mathcal{B}_2} \end{array} \right.$$

Alors, $\forall i \in [\![1, p]\!]$, la i-ème application composante de f est la fonction :

$$f_i : \left| \begin{array}{ccl} A & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & f_i(x) \end{array} \right.$$

L'intérêt de cette définition réside dans le théorème suivant.

Théorème 1 (Caractérisation de la continuité par les applications composantes). *En conservant les notations introduites dans la définition ci-dessus, soit $a \in A$. Alors la fonction f est continue en a [resp. sur A] si et seulement si $\forall i \in [\![1, p]\!]$, f_i est continue en a [resp. sur A].*

Ainsi, pour étudier la continuité d'une application f définie sur une partie d'un espace vectoriel de dimension finie et à valeurs dans un autre espace vectoriel de dimension finie, il est suffisant d'étudier la continuité de ses applications composantes $(f_i)_{i \in [\![1,p]\!]}$, qui sont des fonctions **numériques** : $f_i : A \to \mathbb{K}$!

2 Applications partielles

Définition 2 (Applications partielles). *Soient A une partie de E_1 et $f : A \to E_2$ une application quelconque. On note :*

$$f : \left| \begin{array}{ccl} A & \to & E_2 \\ x = (x_1, \ldots, x_n)_{\mathcal{B}_1} & \mapsto & f(x) = f(x_1, \ldots, x_n) \end{array} \right.$$

Soit $a = (a_1, \ldots, a_n)_{\mathcal{B}_1}$ un point intérieur à A, et soit $k \in [\![1, n]\!]$. Alors il existe un voisinage V_k de a_k tel que l'application :

$$\left| \begin{array}{lll} V_k \subset \mathbb{K} & \to & E_2 \\ x_k & \mapsto & f(a_1, \ldots, a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, \ldots, a_n) \end{array} \right.$$

soit bien définie. Cette application est appelée k-ième application partielle de f au point a.

Étudier une application partielle de f, c'est donc fixer toutes les variables de cette application, sauf une. Géométriquement, cela revient à déterminer une "direction" dans l'espace de départ, et à étudier le comportement de f suivant cette direction.

Théorème 2. *En conservant les notations introduites ci-dessus, si f est continue en a [resp. sur un voisinage de a], alors $\forall k \in [\![1, n]\!]$, la k-ième application partielle de f en a est continue en a_k [resp. sur un voisinage de a_k].*

ATTENTION : La réciproque est fausse (cf. citation) ! Un contre-exemple classique, qui est à retenir, est donné par la fonction :

$$h : \left| \begin{array}{lll} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \end{array} \right.$$

En effet, les applications partielles de h en $a = (0, 0)$ sont les applications $x \mapsto f(x, 0) = 0$ et $y \mapsto f(0, y) = 0$, définies et continues sur $\mathbb{R}$ (et à valeurs dans $\mathbb{R}$). Toutefois, h **n'est pas continue en** $(0, 0)$, car $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ h(x, x) = \frac{1}{2}$, donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x, x) = \frac{1}{2} \neq f(0, 0)$!

3 Comparatif

Soient A une partie de E_1, $f : A \to E_2$ une application quelconque et $a = (a_1, \ldots, a_n)_{\mathcal{B}_1}$ un point intérieur de A. On note $(f_i)_{i \in [\![1,p]\!]}$ les applications composantes de f, et $\forall k \in [\![1, n]\!]$, V_k un voisinage de a_k tel que la k-ième application partielle de f au point a soit bien définie sur V_k.

Applications composantes	**Applications partielles**
"Applications composantes de f"	"Applications partielles de f au point a"
$f_i : A \to \mathbb{K}$	Applications définies de $V_k \subset \mathbb{K} \to E_2$
On décompose les vecteurs images (i.e. des vecteurs de $f(A) \subset E_2$) suivant une certaine base, et on considère les composantes de ces vecteurs images.	On décompose les vecteurs de l'espace de départ (i.e. des vecteurs de $A \subset E_1$) suivant une certaine base, on fixe $n-1$ composantes de ces vecteurs et on étudie le comportement de f suivant l'unique direction restée "libre".
La connaissance des applications composantes détermine entièrement f.	La connaissance des applications partielles de f ne renseigne que partiellement sur f.

Il ne s'agit donc pas du tout des mêmes objets...