Correction du TD sur les courbes paramétrées

Clémentine Lemarié–Rieusset

Mai-Juin 2021

Les questions ont été légèrement modifiées par rapport à celles du TD.

Exercice 1 : l'astroïde

L'astroïde est la courbe de coordonnées cartésiennes (où $t \in \mathbb{R}$) :

$$\begin{cases} x(t) & = & \cos(t)^3 \\ y(t) & = & \sin(t)^3 \end{cases}$$

1) Réduire l'intervalle d'étude.
Indication : on pourra étudier la périodicité de x et y, ainsi que les effets des transformations $t \mapsto t + \pi$ et $t \mapsto -t$.

Les fonctions x et y sont 2π-périodiques donc on peut se restreindre à un segment de longueur 2π, c'est-à-dire à un intervalle de la forme $[a, a + 2\pi]$.

$$\begin{cases} x(t+\pi) & = & -x(t) \\ y(t+\pi) & = & -y(t) \end{cases}$$

On peut donc se restreindre à l'intervalle $[a, a + \pi]$ (car $[a, a + 2\pi] = [a, a + \pi] \cup \{t + \pi, t \in [a, a + \pi]\}$), puis il faudra faire une symétrie par rapport à l'origine pour avoir toute la courbe.

$$\begin{cases} x(-t) & = & x(t) \\ y(-t) & = & -y(t) \end{cases}$$

On fixe $a = -\frac{\pi}{2}$ et on peut donc se restreindre à l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$ (car $[a, a+\pi] = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] = [0, \frac{\pi}{2}] \cup \{-t, t \in [0, \frac{\pi}{2}]\}$), puis il faudra faire une symétrie par rapport à l'axe des abscisses (c'est-à-dire l'axe horizontal qui passe par l'origine, c'est-à-dire la droite d'équation $y = 0$) pour avoir toute la courbe.

2) Étudier les variations simultanées de x et y sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

La dérivée de x est $x'(t) = -3\cos(t)^2\sin(t)$ donc est négative sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. Ainsi x est décroissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

La dérivée de y est $y'(t) = 3\sin(t)^2\cos(t)$ donc est positive sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. Ainsi y est croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

3) Calculer les tangentes de la courbe pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Si $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$ alors $x'(t) \neq 0$ donc on a un point régulier et la tangente à la courbe en t (ou au point $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$) est la droite d'équation $Y = y(t) + \frac{y'(t)}{x'(t)}(X - x(t))$ c'est-à-dire d'équation $Y = \sin(t)^3 - \tan(t)(X - \cos(t)^3)$.

Si $t = 0$ alors $x'(t) = 0$ et $y'(t) = 0$ donc t est un point stationnaire. Heureusement, $x''(0) = -3(-2\cos(0)\sin(0)^2 + \cos(0)^3) = -3 \neq 0$ et $y''(0) = 3(2\sin(0)\cos(0)^2 - \sin(0)^3) = 0$ donc la courbe a une tangente en 0 (ou au point $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$) et c'est la droite d'équation $Y = y(0) + \frac{y''(0)}{x''(0)}(X - x(0))$ c'est-à-dire d'équation $Y = 0$.

Si $t = \frac{\pi}{2}$ alors $x'(t) = 0$ et $y'(t) = 0$ donc t est un point stationnaire. Heureusement, $y''(\frac{\pi}{2}) = 3(2\sin(\frac{\pi}{2})\cos(\frac{\pi}{2})^2 - \sin(\frac{\pi}{2})^3) = -3 \neq 0$ et $x''(\frac{\pi}{2}) = -3(-2\cos(\frac{\pi}{2})\sin(\frac{\pi}{2})^2 + \cos(\frac{\pi}{2})^3) = 0$ donc la courbe a une tangente en $\frac{\pi}{2}$ (ou au point $\begin{pmatrix} x(\frac{\pi}{2}) \\ y(\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$) et c'est la droite d'équation $X = x(\frac{\pi}{2}) + \frac{x''(\frac{\pi}{2})}{y''(\frac{\pi}{2})}(Y - y(\frac{\pi}{2}))$ c'est-à-dire d'équation $X = 0$.

4) Tracer la courbe.

Ce que fait un ordinateur, c'est qu'il calcule quelques tangentes (comme on l'a fait plus haut, en fixant quelques valeurs pour t) et nous trace des petits bouts de tangentes (assez petits pour que le dessin ait l'air lisse). On pourrait faire la même chose mais ça nous prendrait plus de temps qu'à un ordinateur. Pendant un examen, faites de votre mieux pour avoir un dessin qui à la fois ne vous prenne pas trop de temps à tracer (2 minutes maximum) et à la fois soit assez proche de la courbe.

Pour savoir à quoi ressemble l'astroïde, allez voir sa page Wikipédia.

5) Calculer la longueur de la courbe.

La longueur de l'astroïde est $L = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\ \mathrm{d}t$ ou, par des arguments de symétrie, $L = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\ \mathrm{d}t$ (voir la question 1).

$$\begin{aligned}
L &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\ \mathrm{d}t \\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9\cos(t)^4\sin(t)^2 + 9\sin(t)^4\cos(t)^2}\ \mathrm{d}t \\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\underbrace{\sqrt{\cos(t)^2 + \sin(t)^2}}_{=1}\sqrt{\cos(t)^2\sin(t)^2}\ \mathrm{d}t \\
&= 12\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(\cos(t))^2(\sin(t))^2}\ \mathrm{d}t \\
&= 12\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\sin(t)\ \mathrm{d}t \ \text{ car cos et sin sont positives sur } [0, \frac{\pi}{2}] \\
&= 12\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2t)}{2}\ \mathrm{d}t \\
&= -3\int_0^{\frac{\pi}{2}} -2\sin(2t)\ \mathrm{d}t \\
&= -3[\cos(2t)]_0^{\frac{\pi}{2}} \ \text{ car la dérivée de} \cos(2t) \text{ est } -2\sin(2t) \\
&= -3(\cos(\pi) - \cos(0)) \\
&= 6 \ \text{ car } \cos(\pi) = -1 \text{ et } \cos(0) = 1
\end{aligned}$$

Exercice 2 : les cardioïdes

Les cardioïdes sont les courbes de coordonnées cartésiennes (où $t \in \mathbb{R}$) :

$$\begin{cases} x(t) &= R(2\cos(t) - \cos(2t)) \\ y(t) &= R(2\sin(t) - \sin(2t)) \end{cases}$$

avec $R > 0$ (pour chaque valeur de R on a une cardioïde).

1) Réduire l'intervalle d'étude.
Indication : on pourra étudier la périodicité et la parité de x et y.

Les fonctions x et y sont 2π-périodiques donc on peut se restreindre à un segment de longueur 2π, c'est-à-dire à un intervalle de la forme $[a, a+2\pi]$.

La fonction x est paire et la fonction y est impaire, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} x(-t) &= & x(t) \\ y(-t) &= & -y(t) \end{cases}$$

On fixe $a = -\pi$ et on peut donc se restreindre à l'intervalle $[0, \pi]$ (car $[a, a+2\pi] = [-\pi, \pi] = [0, \pi] \cup \{-t, t \in [0, \pi]\}$), puis il faudra faire une symétrie par rapport à l'axe des abscisses (c'est-à-dire l'axe horizontal qui passe par l'origine, c'est-à-dire la droite d'équation $y = 0$) pour avoir toute la courbe.

2) Étudier les variations simultanées de x et y sur $[0, \pi]$.

La dérivée de x est $x'(t) = R(-2\sin(t) + 2\sin(2t))$, c'est-à-dire $x'(t) = 2R\sin(t)(-1 + 2\cos(t))$. Elle est nulle en 0, π et l'unique $t \in [0, \pi]$ tel que $\cos(t) = \frac{1}{2}$, à savoir $\frac{\pi}{3}$ (rappel : $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ est bijective et a les valeurs usuelles suivantes : $\cos(0) = 1$ $(= \frac{\sqrt{4}}{2})$, $\cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$ $(= \frac{\sqrt{1}}{2})$, $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ $(= \frac{\sqrt{0}}{2})$, $\cos(\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$, $\cos(\frac{3\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos(\frac{5\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos(\pi) = -1$) donc est négative sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. Elle est continue donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, elle est de signe constant sur $[0, \frac{\pi}{3}]$ et de signe constant sur $[\frac{\pi}{3}, \pi]$. Or elle vaut $R(-\sqrt{2} + 2) > 0$ en $\frac{\pi}{4} \in [0, \frac{\pi}{3}]$ et $R(-2) = -2R < 0$ en $\frac{\pi}{2} \in [\frac{\pi}{3}, \pi]$ donc elle est positive sur $[0, \frac{\pi}{3}]$ et négative sur $[\frac{\pi}{3}, \pi]$. Ainsi x est croissante sur $[0, \frac{\pi}{3}]$ et décroissante sur $[\frac{\pi}{3}, \pi]$.

La dérivée de y est $y'(t) = R(2\cos(t) - 2\cos(2t))$, c'est-à-dire $y'(t) = R(2\cos(t) - 2(2\cos(t)^2 - 1)) = R(-4\cos(t)^2 + 2\cos(t) + 2)$. Posons $P : x \mapsto -4x^2 + 2x + 2$. Le discriminant du trinôme du second degré P est $\Delta = 2^2 - 4 \times (-4) \times 2 = 36 = 6^2$ donc P est nul si et seulement si $x = 1$ ou $x = -\frac{1}{2}$. Ainsi y' est nulle en l'unique $t \in [0, \pi]$ tel que $\cos(t) = 1$, à savoir 0, et en l'unique $t \in [0, \pi]$ tel que $\cos(t) = -\frac{1}{2}$, à savoir $\frac{2\pi}{3}$. Elle est continue donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, elle est de signe constant sur $[0, \frac{2\pi}{3}]$ et de signe constant sur $[\frac{2\pi}{3}, \pi]$. Or elle vaut $R\sqrt{2} > 0$ en $\frac{\pi}{4} \in [0, \frac{2\pi}{3}]$ et $R(-2-2) = -4R < 0$ en $\pi \in [\frac{2\pi}{3}, \pi]$ donc elle est positive sur $[0, \frac{2\pi}{3}]$ et négative sur $[\frac{2\pi}{3}, \pi]$. Ainsi y est croissante sur $[0, \frac{2\pi}{3}]$ et décroissante sur $[\frac{2\pi}{3}, \pi]$.

3) Calculer les tangentes de la courbe.

Si $t \in [0, \pi]$ et $t \neq 0$ et $t \neq \frac{2\pi}{3}$ alors $y'(t) \neq 0$ donc on a un point régulier et la tangente à la courbe en t (ou au point $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$) est la droite d'équation $X = x(t) + \frac{x'(t)}{y'(t)}(Y - y(t))$, c'est-à-dire la droite d'équation

$$X = R(2\cos(t) - \cos(2t)) + \frac{-\sin(t) + \sin(2t)}{\cos(t) - \cos(2t)}(Y - R(2\sin(t) - \sin(2t))).$$

Si $t = \frac{2\pi}{3}$ alors $x'(t) \neq 0$ donc on a un point régulier et la tangente à la courbe en t (ou au point $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$) est la droite d'équation $Y = y(t) + \frac{y'(t)}{x'(t)}(X - x(t))$, c'est-à-dire la droite d'équation

$$Y = R(2\sin(\frac{2\pi}{3}) - \sin(\frac{4\pi}{3})) + \frac{\cos(\frac{2\pi}{3}) - \cos(\frac{4\pi}{3})}{-\sin(\frac{2\pi}{3}) + \sin(\frac{4\pi}{3})}(X - R(2\cos(\frac{2\pi}{3}) - \cos(\frac{4\pi}{3})))$$

c'est-à-dire la droite d'équation

$$Y = R\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Si $t = 0$ alors $x'(t) = 0$ et $y'(t) = 0$ donc t est un point stationnaire. Heureusement, $x''(0) = R(-2\cos(0) + 4\cos(0)) = 2R \neq 0$ et $y''(0) = R(-2\sin(0 + 4\sin(0))) = 0$ donc la courbe a une tangente en 0 (ou au point $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}$) et c'est la droite d'équation $Y = y(0) + \frac{y''(0)}{x''(0)}(X - x(0))$ c'est-à-dire la droite d'équation $Y = 0$.

4) Tracer la courbe.

Ce que fait un ordinateur, c'est qu'il calcule quelques tangentes (comme on l'a fait plus haut, en fixant quelques valeurs pour t) et nous trace des petits bouts de tangentes (assez petits pour que le dessin ait l'air lisse). On pourrait faire la même chose mais ça nous prendrait plus de temps qu'à un ordinateur. Pendant un examen, faites de votre mieux pour avoir un dessin qui à la fois ne vous prenne pas trop de temps à tracer (2 minutes maximum) et à la fois soit assez proche de la courbe.

Pour savoir à quoi ressemble la cardioïde, allez voir sa page Wikipédia.

5) Calculer la longueur de la courbe.

[Dans le TD, c'est la question 2 de l'exercice 9 (pour le cas $R = 1$)]

La longueur de la cardioïde est $L = \displaystyle\int_0^{2\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\ \mathrm{d}t$.

$$
\begin{aligned}
L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\ \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{(R(-2\sin(t) + 2\sin(2t)))^2 + (R(2\cos(t) - 2\cos(2t)))^2}\ \mathrm{d}t \\
&= 2R \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin(t) + \sin(2t))^2 + (\cos(t) - \cos(2t))^2}\ \mathrm{d}t \\
&= 2R \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin(t)^2 + \sin(2t)^2 - 2\sin(t)\sin(2t) + \cos(t)^2 + \cos(2t)^2 - 2\cos(t)\cos(2t)}\ \mathrm{d}t \\
&= 2\sqrt{2}R \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \sin(t)\sin(2t) - \cos(t)\cos(2t)}\ \mathrm{d}t \ \text{ car } \cos^2 + \sin^2 = 1 \\
&= 2\sqrt{2}R \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos(t)}\ \mathrm{d}t \ \text{ car } \cos(2t - t) = \sin(t)\sin(2t) + \cos(t)\cos(2t) \\
&= 2\sqrt{2}R \int_0^{2\pi} \sqrt{2\sin(\frac{t}{2})^2}\ \mathrm{d}t \\
&= 4R \int_0^{2\pi} \sin(\frac{t}{2})\ \mathrm{d}t \ \text{ car } \cos(t) = 1 - 2\sin(\frac{t}{2})^2 \\
&= -8R \int_0^{2\pi} -\frac{\sin(\frac{t}{2})}{2}\ \mathrm{d}t \\
&= -8R[\cos(\frac{t}{2})]_0^{2\pi} \ \text{ car la dérivée de} \cos(\frac{t}{2}) \text{ est } -\frac{\sin(\frac{t}{2})}{2} \\
&= -8R(\cos(\pi) - \cos(0)) \\
&= 16R
\end{aligned}
$$

Exercice 5 : une courbe avec des asymptotes

On étudie la courbe de coordonnées cartésiennes (où $t \in \mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$) :

$$
\begin{cases}
x(t) &= \quad t + \frac{4}{t} \\
y(t) &= \quad \frac{t}{3} + 2 + \frac{3}{t+1}
\end{cases}
$$

1) Étudier les variations simultanées de x et y sur $]0,+\infty[$.

La dérivée de x est $x'(t) = 1 - \frac{4}{t^2}$ donc est négative sur $]0,2]$ et positive sur $[2,+\infty[$ (le seul point où elle est nulle est 2). Ainsi x est décroissante sur $]0,2]$ et croissante sur $[2,+\infty[$.

La dérivée de y est $y'(t) = \frac{1}{3} - \frac{3}{(t+1)^2}$ donc est négative sur $]0,2]$ et positive sur $[2,+\infty[$ (le seul point où elle est nulle est 2). Ainsi y est décroissante sur $]0,2]$ et croissante sur $[2,+\infty[$.

2) Calculer les asymptotes de la courbe.

Les branches infinies de la courbe se situent en 0 et en $+\infty$.

En 0 : $x(t) \to +\infty$ et $y(t) \to 5$ donc la courbe a une asymptote horizontale d'équation $Y = 5$.

En $+\infty$: $x(t) \to +\infty$ et $y(t) \to +\infty$; $\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{\frac{t^2}{3}+2t+\frac{3t}{t+1}}{t^2+4} = \frac{\frac{t^2(t+1)}{3}+2t(t+1)+3}{t^2(t+1)+4(t+1)}$ (on a multiplié le numérateur et le dénominateur par t puis par $t+1$) donc $\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{\frac{t^3}{3}+\frac{7t^2}{3}+2t+3}{t^3+t^2+4t+4} \to \frac{1}{3}$ et $y(t) - \frac{1}{3}x(t) = 2 + \frac{3}{t+1} - \frac{4}{t} \to 2$ donc la courbe a une asymptote d'équation $Y = \frac{1}{3}X + 2$.

3) Calculer les tangentes de la courbe.

Si $t \neq 2$ est strictement positif alors c'est un point régulier de la courbe et la tangente à la courbe en t (ou au point $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$) est la droite d'équation $Y = \frac{t}{3} + 2 + \frac{3}{t+1} + \frac{\frac{1}{3}-\frac{3}{(t+1)^2}}{1-\frac{4}{t^2}}(X - t - \frac{4}{t})$.

Si $t = 2$ alors $x'(t) = 0$ et $y'(t) = 0$ donc t est un point stationnaire. Heureusement, $x''(2) = \frac{8}{2^3} = 1 \neq 0$ et $y''(2) = \frac{6}{(2+1)^3} = \frac{2}{9}$ donc la courbe a une tangente en 2 (ou au point $\begin{pmatrix} x(2) \\ y(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ \frac{11}{3} \end{pmatrix}$) et c'est la droite d'équation $Y = \frac{11}{3} + \frac{2}{9}(X - 4)$.

4) Quel est le type (ordinaire, d'inflexion, de rebroussement de première espèce, de rebroussement de deuxième espèce) du point singulier (c'est-à-dire stationnaire, c'est-à-dire non régulier) de la courbe ?

Comme vu précédemment, le plus petit $p \geq 1$ tel que $f^{(p)}(2) \neq 0$ est $p = 2$. Cherchons le plus petit $q > p$ tel que $f^{(q)}(2)$ ne soit pas colinéaire à $f^{(p)}(2)$. $f'''(2) = \begin{pmatrix} -\frac{24}{2^4} \\ -\frac{18}{(2+1)^4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ -\frac{2}{9} \end{pmatrix}$ qui n'est pas colinéaire à $f''(2) = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{9} \end{pmatrix}$ (car étant donné que $y'''(2) = -y''(2)$ on aurait alors $f'''(2) = -f''(2)$ mais $x'''(2) \neq -x''(2)$). Ainsi $q = 3$. Étant donné que p est pair et que q est impair, 2 est un point de rebroussement de première espèce pour la courbe.

5) Tracer la courbe.

Faites de votre mieux grâce aux tangentes et aux asymptotes (le fait que 2 est un point de rebroussement de première espèce pour la courbe peut aussi vous aider à tracer la courbe).

Exercice 6 : la lemniscate de Bernoulli

La lemniscate de Bernoulli est la courbe donnée par l'équation polaire :

$$\rho(\theta) = \sqrt{\cos(2\theta)}$$

1) Réduire le domaine d'étude.

Le domaine d'étude est a priori l'ensemble des θ tels que $\sqrt{\cos(2\theta)}$ est bien défini, c'est-à-dire l'ensemble des θ tels que $\cos(2\theta) \geq 0$. Cet ensemble est $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [-\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi] \cup [\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi]$. Remarquons que $\rho(\theta + 2\pi) = \rho(\theta)$ donc on peut se restreindre à $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$ (cf. cours). Remarquons également que $\rho(\theta + \pi) = \rho(\theta)$ donc on peut se restreindre à $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ (car $[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}] = \{t + \pi, t \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]\}$) à condition d'effectuer ensuite une symétrie par rapport à l'origine (cf. cours). Remarquons enfin que $\rho(-\theta) = \rho(\theta)$ donc on peut se restreindre à $[0, \frac{\pi}{4}]$ (car $[-\frac{\pi}{4}, 0] = \{-t, t \in [0, \frac{\pi}{4}]\}$) à condition d'effectuer ensuite une symétrie par rapport à l'axe des abscisses (cf. cours).

2) Étudier les passages par 0.

Si $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$ alors $\rho(\theta) = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$.

3) Étudier les variations de ρ.

La dérivée de ρ est $\rho'(\theta) = -\frac{\sin(2\theta)}{\sqrt{\cos(2\theta)}}$ qui est négative sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ donc ρ est décroissante sur $[0, \frac{\pi}{4}]$.

4) Étudier la tangente à l'origine.

La tangente à l'origine est la droite passant par l'origine d'angle polaire $\frac{\pi}{4}$ (car $\rho(\frac{\pi}{4}) = 0$, cf. cours).

5) Tracer la courbe.

Pour savoir à quoi ressemble la lemniscate de Bernoulli, allez voir sa page Wikipédia.

Exercice 10 : les ellipses

On va étudier les ellipses de coordonnées cartésiennes (où $t \in [0, 2\pi]$) :

$$\begin{cases} x(t) & = & x_0 + a\cos(t) \\ y(t) & = & y_0 + b\sin(t) \end{cases}$$

où $a, b \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$.

1) Donner l'expression du rayon de courbure de l'ellipse en $t \in [0, 2\pi]$.

$$R(t) = \frac{(a^2\sin(t)^2 + b^2\cos(t)^2)^{\frac{3}{2}}}{|ab\sin(t)^2 + ab\cos(t)^2|} = \frac{(a^2\sin(t)^2 + b^2\cos(t)^2)^{\frac{3}{2}}}{|ab|}$$

2) En déduire le rayon de courbure et la courbure en $t = 0$ et en $t = \frac{\pi}{2}$ (les sommets de l'ellipse).

$R(0) = \frac{b^3}{|ab|}$, $k(0) = \frac{|ab|}{b^3}$, $R(\frac{\pi}{2}) = \frac{a^3}{|ab|}$, $k(\frac{\pi}{2}) = \frac{|ab|}{a^3}$.

3) Déterminier les cercles osculateurs en $t = 0$ et en $t = \frac{\pi}{2}$.

Le cercle osculateur en $t = 0$ est le cercle de rayon $R(0) = \frac{b^3}{|ab|}$ et de centre $\begin{pmatrix} x_0 + a - \frac{b^2}{a} \\ y_0 \end{pmatrix}$.

Le cercle osculateur en $t = \frac{\pi}{2}$ est le cercle de rayon $R(\frac{\pi}{2}) = \frac{a^3}{|ab|}$ et de centre $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 + b - \frac{a^2}{b} \end{pmatrix}$.

4) Tracer l'ellipse de coordonnées cartésiennes (où $t \in [0, 2\pi]$) :

$$\begin{cases} x(t) &= \cos(t) \\ y(t) &= 2\sin(t) \end{cases}$$

Pour savoir à quoi ressemble l'ellipse, allez voir sa page Wikipédia.

Autres exercices

N'hésitez pas à vous entraîner avec les autres exercices du TD (à part la question 4 de l'exercice 9 qui est trop dure pour vous (il s'agit de calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sqrt{1+\theta^2}\, \mathrm{d}\theta$, c'est assez astucieux)).

À la question 1 de l'exercice 9, il faut calculer $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sqrt{(2-2\cos(\theta))^2 + (2\sin(\theta)^2)}\, \mathrm{d}\theta$ (vous devriez trouver 16).

À la question 3 de l'exercice 9, vous devriez trouver $2\arctan(a)$ (et vous pouviez le deviner parce qu'on est en train de calculer la longueur d'un arc du cercle unité entre le point d'angle 0 et le point d'angle $2\arctan(a)$).

Si vous voulez encore calculer des longueurs, il y en a dans l'exercice 11.

Si vous voulez étudier d'autres courbes en coordonnées cartésiennes, il y a les exercices 3 et 4.

Si vous voulez étudier d'autres courbes en coordonnées polaires, il y a les exercices 7 et 8.