

Premier examen en TD d'analyse du groupe TD1

Durée : 1h30

Il y a 36 points dans le sujet, l'épreuve est notée sur 20, la note correspond au minimum de 20 et du nombre de points obtenus (sur 36 points). Pour les exercices 1 à 4 et les deux premières questions de l'exercice 11, il n'y a pas besoin de justifier les réponses. Pour les autres questions, **il faut justifier les réponses.**

Développements limités (12 points)

Exercice 1 : Les DL de polynômes (3 points)

Dans cet exercice, il n'y a pas besoin de justifier les réponses.

Soit $P : x \mapsto a_0 + a_1x + a_2x^2$ un polynôme (à coefficients réels).

1. Quel est le développement limité à l'ordre 0 de P en 0 ? (0,5 point)
(Rappel : c'est une constante + $o(1)$; à vous de trouver la constante.)

$$P(x) = a_0 + o(1)$$

2. Quel est le développement limité à l'ordre 1 de P en 0 ? (0,5 point)

$$P(x) = a_0 + a_1x + o(x)$$

3. Quel est le développement limité à l'ordre 2 de P en 0 ? (0,5 point)

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + o(x^2)$$

4. Quel est le développement limité à l'ordre n de P en 0, où $n \geq 3$ est un entier naturel supérieur ou égal à 3 ? (0,5 point)

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + o(x^n)$$

5. Quel est le développement limité à l'ordre 0 de P en 1 ? (0,5 point)
(Rappel : c'est une constante + $o(1)$; à vous de trouver la constante.)

$$P(x) = a_0 + a_1 + a_2 + o(1)$$

6. Quel est le développement limité à l'ordre 0 de P en -1 ? (0,5 point)
(Rappel : c'est une constante + $o(1)$; à vous de trouver la constante.)

$$P(x) = a_0 - a_1 + a_2 + o(1)$$

Exercice 2 : Les opérations et les équivalents (0,75 point)

Dans cet exercice, il n'y a pas besoin de justifier les réponses.

Soient f_1, f_2 deux fonctions équivalentes en 0 et g_1, g_2 deux fonctions équivalentes en 0.

1. Est-ce que $f_1 + g_1$ est équivalente en 0 à $f_2 + g_2$? (0,25 point)

Non.

2. Est-ce que $f_1 \times g_1$ est équivalente en 0 à $f_2 \times g_2$? (0,25 point)

Oui.

3. On suppose dans cette question que $g_1(0) = 0$ et $g_2(0) = 0$. Est-ce que $f_1 \circ g_1$ (la composée de g_1 et f_1 , qui à x associe $f_1(g_1(x))$) est équivalente en 0 à $f_2 \circ g_2$ (la composée de g_2 et f_2) ? (0,25 point)

Non.

Exercice 3 : Les opérations et les développements limités (1,5 points)

Dans cet exercice, il n'y a pas besoin de justifier les réponses.

Soient $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel, $f = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + o(x^n)$ et $g = b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n + o(x^n)$ des développements limités à l'ordre n en 0.

1. Est-ce que $f + g$ admet un développement limité à l'ordre n en 0? Si oui, donnez dans le cas $n = 1$ le développement limité à l'ordre 1 de $f + g$. (0,5 point)

Oui. Dans le cas $n = 1$, $f(x) + g(x) = a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)x + o(x)$.

2. Est-ce que $f \times g$ admet un développement limité à l'ordre n en 0? Si oui, donnez dans le cas $n = 1$ le développement limité à l'ordre 1 de $f \times g$. (0,5 point)

Oui. Dans le cas $n = 1$, $f(x) \times g(x) = a_0 \times b_0 + (a_0 \times b_1 + a_1 \times b_0)x + o(x)$.

3. On suppose dans cette question que $b_0 = 0$. Est-ce que $f \circ g$ (la composée de g et f , qui à x associe $f(g(x))$) admet un développement limité à l'ordre n en 0? Si oui, donnez dans le cas $n = 1$ le développement limité à l'ordre 1 de $f \circ g$. (0,5 point)

Oui. Dans le cas $n = 1$, $f(g(x)) = a_0 + a_1 \times b_0 + (a_1 \times b_1)x + o(x)$.

Exercice 4 : Les développements limités et les dérivées (0,75 point)

Dans cet exercice, il n'y a pas besoin de justifier les réponses.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^n (dérivable jusqu'à l'ordre n de dérivée n -ième continue). Est-ce que f admet un développement limité à l'ordre n en 0? Si oui, exprimez-le en fonction des dérivées de f .

Oui, $f(x) = \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i + o(x^n)$.

Exercice 5 : Calculs de développements limités (6 points)

On rappelle les développements limités à l'ordre 2 en 0 suivants :

$$\begin{aligned} \exp(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) & \cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \\ \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) & \sin(x) &= x + o(x^2) \end{aligned}$$

1. Donnez le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $x \mapsto \exp(2x)$. (1 point)

Par composition, $\exp(2x) = 1 + 2x + 2x^2 + o(x^2)$.

2. Donnez le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $x \mapsto (x+1)\exp(2x)$. (1 point)

Par multiplication, $(x+1)\exp(2x) = 1 + 3x + 4x^2 + o(x^2)$.

3. À l'aide du développement limité à l'ordre 1 en 0 de \sin , montrez que $\frac{\sin(x)}{x}$ tend vers 1 quand x tend vers 0. (1 point)

$\sin(x) = x + o(x)$ donc en divisant par x , $\frac{\sin(x)}{x} = 1 + o(1)$ donc $\frac{\sin(x)}{x}$ tend vers 1 quand x tend vers 0.

4. À l'aide des développements limités à l'ordre 1 en 0 de \exp et \cos , montrez qu'en 0, $\exp(x) - \cos(x) \sim x$. (1 point)

Par soustraction, $\exp(x) - \cos(x) = x + o(x)$ en 0 donc en 0, $\exp(x) - \cos(x) \sim x$.

5. Donnez le développement limité à l'ordre 2 en 1 de \ln . (1 point)

En 0, $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ donc en 1 (en posant $u = 1+x$), $\ln(u) = u - 1 - \frac{(u-1)^2}{2} + o((u-1)^2)$.

6. Donnez le développement limité à l'ordre 2 en 1 de $\cos \circ \ln$ (la fonction qui à x associe $\cos(\ln(x))$). (1 point)

Par composition, $\cos(\ln(x)) = 1 - \frac{(u-1)^2}{2} + o((u-1)^2)$.

Séries numériques (12 points)

Rappel : si (u_n) est une suite dont la série converge, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est la somme de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ (c'est-à-dire la

limite des sommes partielles) et pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n - \sum_{n=0}^N u_n$ (le reste d'ordre N de la série).

Rappel : Soient (u_n) et (v_n) des suites de réels.

On écrit $u_n = O(v_n)$ pour signifier qu'il existe $M > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \geq N$, $|u_n| \leq M|v_n|$.

On écrit $u_n = o(v_n)$ pour signifier que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $|u_n| \leq \varepsilon|v_n|$.

On écrit $u_n \sim v_n$ pour signifier que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $|u_n - v_n| \leq \varepsilon|v_n|$.

Exercice 6 : Questions sur les séries (2 points)

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite de réels.

1. Est-ce que les séries $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 1} u_n$ ont la même nature (convergente ou divergente)? (0,5 point)

Oui car $\sum_{n \geq 0} u_n = u_0 + \sum_{n \geq 1} u_n$, ce qui fait que $\sum_{n \geq 0} u_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$ si et seulement si $\sum_{n \geq 1} u_n \rightarrow u_0 + l$.

2. Est-ce que la série $\sum_{n \geq 0} (u_n - u_{n+1})$ et la suite (u_n) ont la même nature (convergente ou divergente)? (1 point)

Oui car pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\sum_{n \geq 0} (u_n - u_{n+1}) = u_0 - u_{N+1}$, et $u_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$ si et seulement si $u_0 - u_{N+1} \rightarrow u_0 - l$.

3. Si la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge, est-ce que $\sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n$ tend vers 0 quand N tend vers $+\infty$? (0,5 point)

Oui car $\sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n - \sum_{n=0}^N u_n$ et $\sum_{n=0}^N u_n \rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Exercice 7 : Questions sur les séries à termes positifs (4 points)

Rappel : toute suite croissante tend vers une limite finie ou $+\infty$. On en déduit que toute suite croissante majorée converge.

Chaque question de cet exercice peut être utilisée pour répondre à la question suivante de cet exercice.

Soient $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$ des suites de réels positifs.

1. Montrez que $\sum_{n \geq 0} u_n$ tend vers une limite finie ou $+\infty$. (0,5 point)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=0}^{N+1} u_n - \sum_{n=0}^N u_n = u_{N+1} \geq 0$ donc la suite $(\sum_{n=0}^N u_n)_{N \in \mathbb{N}}$ est croissante donc elle tend vers une limite finie ou $+\infty$ quand N tend vers $+\infty$.

2. Montrez que s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $u_n \leq v_n$ et si $\sum_{n \geq 0} v_n$ converge alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge. (1 point)

Comme $(\sum_{i=0}^n v_i)$ est une suite croissante (les v_i étant positifs) qui converge vers $\sum_{i=0}^{+\infty} v_i$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=0}^n v_i \leq \sum_{i=0}^{+\infty} v_i$, d'où $\sum_{i=0}^n u_i \leq \sum_{j=0}^n u_j + \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$ (si $n \leq N$ c'est évident car les u_j et $\sum_{k=0}^{+\infty} v_k$ sont positifs, sinon $\sum_{i=0}^n u_i = \sum_{j=0}^N u_j + \sum_{k=N+1}^n u_k \leq \sum_{j=0}^N u_j + \sum_{k=N+1}^n v_k \leq \sum_{j=0}^N u_j + \sum_{k=0}^n v_k \leq \sum_{j=0}^N u_j + \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$ car pour tout $k \geq N$, $u_k \leq v_k$ et les v_k sont positifs), donc la suite $(\sum_{n=0}^N u_n)_{N \in \mathbb{N}}$ est majorée, or elle est croissante (car les u_n sont positifs), donc elle converge.

3. Montrez que si $u_n = O(v_n)$ et si $\sum_{n \geq 0} v_n$ converge alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge. (0,75 point)

Il existe $M \geq 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \geq N$, $u_n \leq Mv_n$ (car $u_n = O(v_n)$ et u_n et v_n sont positifs), or la série de terme général Mv_n converge car la série de terme général v_n converge (en effet pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=0}^n Mv_i = M \sum_{i=0}^n v_i$), donc d'après la question précédente la série de terme général u_n converge.

4. Montrez que si $u_n = o(v_n)$ et si $\sum_{n \geq 0} v_n$ converge alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge. (0,5 point)

Si $u_n = o(v_n)$ alors $u_n = O(v_n)$ (cf. les définitions, il suffit de remplacer "pour tout" par "il existe" (et il existe bien un réel strictement positif, par exemple 1) et les ε par des M) donc d'après la question précédente la série de terme général u_n converge.

5. Montrez que si $u_n \sim v_n$ et si $\sum_{n \geq 0} v_n$ converge alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge. En déduire que si $u_n \sim v_n$ et si

$\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge alors $\sum_{n \geq 0} v_n$ diverge. (1,25 points)

D'après la question précédente, la série de terme général $u_n - v_n$ converge, or pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a $\sum_{n=0}^N (u_n - v_n) = \sum_{n=0}^N u_n - \sum_{k=0}^N v_k$, donc la série de terme général u_n converge (vers $\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n - v_n) + \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$).

Par contraposition, si $u_n \sim v_n$ et si $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge alors $\sum_{n \geq 0} v_n$ diverge (si la conclusion d'un théorème n'est pas vérifiée c'est qu'au moins une hypothèse du théorème n'est pas vérifiée).

Exercice 8 : Calculs de sommes de séries (2,5 points)

1. Si la suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n$, quelle est la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$? (1 point)

La suite (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2} < 1$ (on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (\frac{1}{2})^n$) et la série géométrique $\sum_{n \geq 0} u_n$ tend vers $\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$.

2. Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$. (0,5 point)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+2-(n+1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+2}{(n+1)(n+2)} - \frac{n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$.

3. Si on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$, quelle est la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$? (1 point)

Pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=0}^N u_n = \sum_{n=0}^N (\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}) = 1 - \frac{1}{N+2}$ (par télescopage) qui tend vers 1 quand N tend vers $+\infty$, donc la série de terme général u_n tend vers 1.

Exercice 9 : Calcul de la somme d'une série (3,5 points)

Dans cet exercice, on cherche à montrer que la série $\sum_{i \geq 0} \frac{1}{i!}$ tend vers e (où $e = \exp(1)$). Pour ce faire on rappelle la formule de Taylor avec reste intégral en 0 pour l'exponentielle : pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$\exp(x) = \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} x^i + \int_0^x \frac{\exp(t)}{n!} (x-t)^n dt.$$

En particulier (pour $x = 1$) on a : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e = \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} + \int_0^1 \frac{\exp(t)}{n!} (1-t)^n dt$.

1. Justifiez qu'il suffit de montrer que $\int_0^1 \frac{\exp(t)}{n!} (1-t)^n dt$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ pour montrer que $\sum_{i \geq 0} \frac{1}{i!}$ tend vers e . (1 point)

D'après la formule plus haut, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e - \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} = \int_0^1 \frac{\exp(t)}{n!} (1-t)^n dt$, d'où le résultat comme une suite u_n tend vers une limite finie l si et seulement si $l - u_n$ tend vers 0.

Pour montrer que $\int_0^1 \frac{\exp(t)}{n!} (1-t)^n dt$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, on va utiliser le théorème de comparaison (aussi appelé théorème des gendarmes) qui stipule que si pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n \leq w_n$ et si (u_n) et (w_n) tendent vers une même limite $l \in \mathbb{R}$ alors (v_n) tend vers l .

2. Montrez que pour tous $t \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \frac{\exp(t)}{n!} (1-t)^n \leq \frac{e}{n!}$. (1 point)

Pour tous $t \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$, $1-t \geq 0$ donc $(1-t)^n \geq 0$, et $\frac{\exp(t)}{n!} \geq 0$ (car l'exponentielle d'un nombre réel est toujours positive) donc $\frac{\exp(t)}{n!} (1-t)^n \geq 0$.

Pour tous $t \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$, $1-t \leq 1$ donc $(1-t)^n \leq 1$, et $\frac{\exp(t)}{n!} \leq \frac{e}{n!}$ (par croissance de l'exponentielle) donc $\frac{\exp(t)}{n!} (1-t)^n \leq \frac{e}{n!}$.

3. Déduisez-en que $0 \leq \int_0^1 \frac{\exp(t)}{n!} (1-t)^n dt \leq \frac{e}{n!}$. (1 point)

Par croissance de l'intégrale (ou positivité et linéarité), on a grâce à la question précédente : $\int_0^1 0 \leq \int_0^1 \frac{\exp(t)}{n!} (1-t)^n dt \leq \int_0^1 \frac{e}{n!}$, or $\int_0^1 0 = 0$ et $\int_0^1 \frac{e}{n!} = \frac{e}{n!}$ donc $0 \leq \int_0^1 \frac{\exp(t)}{n!} (1-t)^n dt \leq \frac{e}{n!}$.

4. Montrez que $\int_0^1 \frac{\exp(t)}{n!} (1-t)^n dt$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. (0,5 point)

Par le théorème de comparaison, étant donné que $\frac{e}{n!} \rightarrow 0$ (et $0 \rightarrow 0$) et $0 \leq \int_0^1 \frac{\exp(t)}{n!} (1-t)^n dt \leq \frac{e}{n!}$, $\int_0^1 \frac{\exp(t)}{n!} (1-t)^n dt$ tend vers 0.

Intégration sur un segment (12 points)

Exercice 11 : Intégration et dérivation (3 points)

Soient I un intervalle ouvert de \mathbb{R} et $a, b \in I$.

1. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 (dérivable de dérivée continue). Exprimez $\int_a^b f'$ en fonction de $f(a)$ et de $f(b)$. (Il n'y a pas besoin de justifier la réponse.) (0,5 point)

$$\int_a^b f' = f(b) - f(a)$$

2. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Quelle est la dérivée de la fonction $x \mapsto \int_a^x f$? (Il n'y a pas besoin de justifier la réponse.) (1 point)

C'est f .

3. Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions de classe \mathcal{C}^1 . Utilisez la formule de dérivation d'un produit pour montrer la formule d'intégration par parties : $\int_a^b f \times g' = [f \times g]_a^b - \int_a^b f' \times g$. (1,5 points)

On a $(f \times g)' = f' \times g + f \times g'$ donc par linéarité de l'intégrale $\int_a^b (f \times g)' = \int_a^b f' \times g + \int_a^b f \times g'$ donc $\int_a^b f \times g' = \int_a^b (f \times g)' - \int_a^b f' \times g = [f \times g]_a^b - \int_a^b f' \times g$.

Exercice 12 : Intégration d'un polynôme (1 point)

1. Soient $P : x \mapsto a_0 + a_1x + a_2x^2$ un polynôme (à coefficients réels) de degré 2 et $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$. Exprimez $\int_{x_0}^{x_1} P(x) dx$ en fonction de a_0, a_1, a_2, x_0 et x_1 . (1 point)

$$\int_{x_0}^{x_1} P(x) dx = a_0 \times x_1 - a_0 \times x_0 + a_1 \times \frac{x_1^2}{2} - a_1 \times \frac{x_0^2}{2} + a_2 \times \frac{x_1^3}{3} - a_2 \times \frac{x_0^3}{3}$$

Exercice 13 : Intégration et changement de variable (2 points)

Rappel : Soit I un intervalle ouvert de \mathbb{R} . On dit que $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une primitive de $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ si $F' = f$ sur I (f est la dérivée de F sur I). Si F et G sont deux primitives d'une même fonction f alors $F - G$ est une

fonction constante (car $(F - G)' = F' - G' = f - f = 0$).

Soient I, J des intervalles ouverts de \mathbb{R} , $a, b \in I$, $\varphi \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ (dérivable de dérivée continue) et $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ continue tels que $\varphi(I) \subset J$ ($\varphi(I)$ est incluse dans J).

On cherche à montrer dans cet exercice la formule de changement de variable :

$$\int_a^b f(\varphi(t)) \times \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx.$$

- Justifiez que les fonctions $F \circ \varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $G : I \rightarrow \mathbb{R}$ sont des primitives de $(f \circ \varphi) \times \varphi' : I \rightarrow \mathbb{R}$ (où \circ désigne la composition), avec $F : y \mapsto \int_{\varphi(a)}^y f(x) dx$ et $G : s \mapsto \int_a^s f(\varphi(t)) \times \varphi'(t) dt$. (1 point)

$$(F \circ \varphi)' = (F' \circ \varphi) \times \varphi' = (f \circ \varphi) \times \varphi' \text{ et } G' = (f \circ \varphi) \times \varphi'$$

- Déduisez-en que $F \circ \varphi = G$ sur I et la formule de changement de variable. (1 point)

D'après la question précédente, $F \circ \varphi - G$ est constante sur I , or elle est nulle en a , donc elle est nulle sur I , donc $F \circ \varphi = G$ sur I donc en particulier $F(\varphi(b)) = G(b)$ ce qui nous donne la formule de changement de variable.

Exercice 14 : Calculs d'intégrales (2 points)

- Calculez l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) dx$. (1 point)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) dx = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0) = 1$$

- Calculez l'intégrale $\int_0^1 x \exp(x) dx$ grâce à une intégration par parties. (1 point)

$$\int_0^1 x \exp(x) dx = [x \exp(x)]_0^1 - \int_0^1 \exp(x) dx = \exp(1) - \exp(1) + \exp(0) = 1$$

Exercice 15 : Calcul de l'intégrale d'une fraction rationnelle (4 points)

Rappel : La dérivée du logarithme \ln est $x \mapsto \frac{1}{x}$ et la dérivée de l'arctangente \arctan est $x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$.

On cherche à calculer dans cet exercice l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x^2+1)} dx$.

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $\frac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{ax}{x^2+1} + \frac{b}{x^2+1} + \frac{c}{x+1}$ (on sait que a, b, c existent et sont uniques d'après un théorème d'algèbre (la décomposition en éléments simples des fractions rationnelles)).

- En utilisant que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{x^2+1} = \frac{ax(x+1)}{x^2+1} + \frac{b(x+1)}{x^2+1} + c$, montrez que $c = \frac{1}{2}$. (0,5 point)

On évalue en $x = -1$ ce qui nous donne $\frac{1}{2} = c$.

(Pour celles et ceux qui se demandent pourquoi on a l'égalité plus haut dans \mathbb{R} , et pas seulement dans $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, une justification possible est la continuité de $x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$ en -1 et la continuité de $x \mapsto \frac{ax(x+1)}{x^2+1} + \frac{b(x+1)}{x^2+1} + c$ en -1)

2. Montrez que $b = \frac{1}{2}$. (0,5 point)

On évalue en $x = 0$ ce qui nous donne $1 = b + c$, avec $c = \frac{1}{2}$ (d'après la question précédente), d'où $b = \frac{1}{2}$.

3. Montrez que $a = -\frac{1}{2}$. (0,5 point)

On évalue en $x = 1$ ce qui nous donne $\frac{1}{4} = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{c}{2}$, avec $b = \frac{1}{2}$ et $c = \frac{1}{2}$ (d'après les questions précédentes), d'où $a = -\frac{1}{2}$.

4. Calculez $\int_0^1 \frac{1}{x+1} dx$. (0,5 point)

$$\int_0^1 \frac{1}{x+1} dx = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2)$$

5. Calculez $\int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx$. (0,5 point)

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}$$

6. Calculez $\int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx$ (il peut être utile de remarquer que $\int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1} dx$). (1 point)

$$\int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2}(\ln(2) - \ln(1)) = \frac{\ln(2)}{2}$$

7. Calculez grâce aux questions précédentes l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x^2+1)} dx$. (0,5 point)

$$\int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x^2+1)} dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx = -\frac{\ln(2)}{4} + \frac{\pi}{8} + \frac{\ln(2)}{2} = \frac{\ln(2)}{4} + \frac{\pi}{8}$$