Premier examen en TD d'analyse du groupe TD1

Durée : 1h30

Il y a 36 points dans le sujet, l'épreuve est notée sur 20, la note correspond au minimum de 20 et du nombre de points obtenus (sur 36 points). Pour les exercices 1 à 4 et les deux premières questions de l'exercice 11, il n'y a pas besoin de justifier les réponses. Pour les autres questions, **il faut justifier les réponses**.

Développements limités (12 points)

Exercice 1 : Les DL de polynômes (3 points)

Dans cet exercice, il n'y a pas besoin de justifier les réponses.

Soit $P : x \mapsto a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ un polynôme (à coefficients réels) de degré 2.

1. Quel est le développement limité à l'ordre 0 de P en 0 ? (0,5 point)
   (Rappel : c'est une constante + o(1) ; à vous de trouver la constante.)

2. Quel est le développement limité à l'ordre 1 de P en 0 ? (0,5 point)

3. Quel est le développement limité à l'ordre 2 de P en 0 ? (0,5 point)

4. Quel est le développement limité à l'ordre n de P en 0, où $n \geq 3$ est un entier naturel supérieur ou égal à 3 ? (0,5 point)

5. Quel est le développement limité à l'ordre 0 de P en 1 ? (0,5 point)
   (Rappel : c'est une constante + o(1) ; à vous de trouver la constante.)

6. Quel est le développement limité à l'ordre 0 de P en -1 ? (0,5 point)
   (Rappel : c'est une constante + o(1) ; à vous de trouver la constante.)

Exercice 2 : Les opérations et les équivalents (0,75 point)

Dans cet exercice, il n'y a pas besoin de justifier les réponses.

Soient f_1, f_2 deux fonctions équivalentes en 0 et g_1, g_2 deux fonctions équivalentes en 0.

1. Est-ce que $f_1 + g_1$ est équivalente en 0 à $f_2 + g_2$? (0,25 point)

2. Est-ce que $f_1 \times g_1$ est équivalente en 0 à $f_2 \times g_2$? (0,25 point)

3. On suppose dans cette question que $g_1(0) = 0$ et $g_2(0) = 0$. Est-ce que $f_1 \circ g_1$ (la composée de g_1 et f_1, qui à x associe $f_1(g_1(x))$) est équivalente en 0 à $f_2 \circ g_2$ (la composée de g_2 et f_2) ? (0,25 point)

Exercice 3 : Les opérations et les développements limités (1,5 points)

Dans cet exercice, il n'y a pas besoin de justifier les réponses.

Soient $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel, $f = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n)$ et $g = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n + o(x^n)$ des développements limités à l'ordre n en 0.

1. Est-ce que $f + g$ admet un développement limité à l'ordre n en 0 ? Si oui, donnez dans le cas $n = 1$ le développement limité à l'ordre 1 de $f + g$. (0,5 point)

2. Est-ce que $f \times g$ admet un développement limité à l'ordre n en 0 ? Si oui, donnez dans le cas $n = 1$ le développement limité à l'ordre 1 de $f \times g$. (0,5 point)

3. On suppose dans cette question que $b_0 = 0$. Est-ce que $f \circ g$ (la composée de g et f, qui à x associe $f(g(x))$) admet un développement limité à l'ordre n en 0 ? Si oui, donnez dans le cas $n = 1$ le développement limité à l'ordre 1 de $f \circ g$. (0,5 point)

Exercice 4 : Les développements limités et les dérivées (0,75 point)

Dans cet exercice, il n'y a pas besoin de justifier les réponses.

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ (dérivable jusqu'à l'ordre n de dérivée n-ième continue). Est-ce que f admet un développement limité à l'ordre n en 0 ? Si oui, exprimez-le en fonction des dérivées de f. (0,75 point)

Exercice 5 : Calculs de développements limités (6 points)

On rappelle les développements limités à l'ordre 2 en 0 suivants :

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \qquad \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \qquad \sin(x) = x + o(x^2)$$

1. Donnez le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $x \mapsto \exp(2x)$. (1 point)

2. Donnez le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $x \mapsto (x+1)\exp(2x)$. (1 point)

3. À l'aide du développement limité à l'ordre 1 en 0 de sin, montrez que $\frac{\sin(x)}{x}$ tend vers 1 quand x tend vers 0. (1 point)

4. À l'aide des développements limités à l'ordre 1 en 0 de exp et cos, montrez qu'en 0, $\exp(x) - \cos(x) \sim x$. (1 point)

5. Donnez le développement limité à l'ordre 2 en 1 de ln. (1 point)

6. Donnez le développement limité à l'ordre 2 en 1 de $\cos \circ \ln$ (la fonction qui à x associe $\cos(\ln(x))$). (1 point)

Séries numériques (12 points)

Rappel : si (u_n) est une suite dont la série converge, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est la somme de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ (c'est-à-dire la limite des sommes partielles) et pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n - \sum_{n=0}^{N} u_n$ (le reste d'ordre N de la série).

Soient (u_n) et (v_n) des suites de réels.

On écrit $u_n = O(v_n)$ pour signifier qu'il existe $M > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \geq N$, $|u_n| \leq M|v_n|$.

On écrit $u_n = o(v_n)$ pour signifier que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $|u_n| \leq \varepsilon|v_n|$.

On écrit $u_n \sim v_n$ pour signifier que pour tout $\varepsilon \geq 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $|u_n - v_n| \leq \varepsilon|v_n|$.

Exercice 6 : Questions sur les séries (2 points)

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels.

1. Est-ce que les séries $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 1} u_n$ ont la même nature (convergente ou divergente) ? (0,5 point)
2. Est-ce que la série $\sum_{n\geq 0}(u_n - u_{n+1})$ et la suite (u_n) ont la même nature (convergente ou divergente) ? (1 point)
3. Si la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge, est-ce que $\sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n$ tend vers 0 quand N tend vers $+\infty$? (0,5 point)

Exercice 7 : Questions sur les séries à termes positifs (4 points)

Rappel : toute suite croissante tend vers une limite finie ou $+\infty$. On en déduit que toute suite croissante majorée converge.

Chaque question de cet exercice peut être utilisée pour répondre à la question suivante de cet exercice.

Soient $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ des suites de réels positifs.

1. Montrez que $\sum_{n\geq 0} u_n$ tend vers une limite finie ou $+\infty$. (0,5 point)
2. Montrez que s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $u_n \leq v_n$ et si $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge. (1 point)
3. Montrez que si $u_n = O(v_n)$ et si $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge. (0,75 point)
4. Montrez que si $u_n = o(v_n)$ et si $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge. (0,5 point)
5. Montrez que si $u_n \sim v_n$ et si $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge. En déduire que si $u_n \sim v_n$ et si $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge alors $\sum_{n\geq 0} v_n$ diverge. (1,25 points)

Exercice 8 : Calcul de la somme d'une série géométrique (1 point)

1. Si la suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n$, quelle est la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$? (1 point)

Exercice 9 : Calcul de la somme d'une série par télescopage (1,5 point)

1. Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$. (0,5 point)

2. Si on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$, quelle est la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$? (1 point)

Exercice 10 : Calcul de la somme d'une série grâce au reste intégral (3,5 points)

Dans cet exercice, on cherche à montrer que la série $\sum_{i\geq 0} \frac{1}{i!}$ tend vers e (où $e = \exp(1)$). Pour ce faire on rappelle la formule de Taylor avec reste intégral en 0 pour l'exponentielle : pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$\exp(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}x^i + \int_0^x \frac{\exp(t)}{n!}(x-t)^n \, \mathrm{d}t.$$

En particulier (pour $x = 1$) on a : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} + \int_0^1 \frac{\exp(t)}{n!}(1-t)^n \, \mathrm{d}t$.

1. Justifiez qu'il suffit de montrer que $\int_0^1 \frac{\exp(t)}{n!}(1-t)^n \, \mathrm{d}t$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ pour montrer que $\sum_{i\geq 0} \frac{1}{i!}$ tend vers e. (1 point)

   Pour montrer que $\int_0^1 \frac{\exp(t)}{n!}(1-t)^n \, \mathrm{d}t$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, on va utiliser le théorème de comparaison (aussi appelé théorème des gendarmes) qui stipule que si pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n \leq w_n$ et si (u_n) et (w_n) tendent vers une même limite $l \in \mathbb{R}$ alors (v_n) tend vers l.

2. Montrez que pour tous $t \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \frac{\exp(t)}{n!}(1-t)^n \leq \frac{e}{n!}$. (1 point)

3. Déduisez-en que $0 \leq \int_0^1 \frac{\exp(t)}{n!}(1-t)^n \, \mathrm{d}t \leq \frac{e}{n!}$. (1 point)

4. Montrez que $\int_0^1 \frac{\exp(t)}{n!}(1-t)^n \, \mathrm{d}t$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. (0,5 point)

Intégration sur un segment (12 points)

Exercice 11 : Intégration et dérivation (3 points)

Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $a, b \in I$.

1. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ (dérivable de dérivée continue). Exprimez $\displaystyle\int_a^b f'$ en fonction de $f(a)$ et de $f(b)$. (Il n'y a pas besoin de justifier la réponse.) (0,5 point)

2. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Quelle est la dérivée de la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f$? (Il n'y a pas besoin de justifier la réponse.) (1 point)

3. Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Utilisez la formule de dérivation d'un produit pour montrer la formule d'intégration par parties : $\displaystyle\int_a^b f \times g' = [f \times g]_a^b - \int_a^b f' \times g$. (1,5 points)

Exercice 12 : Intégration d'un polynôme (1 point)

1. Soient $P : x \mapsto a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ un polynôme (à coefficients réels) de degré 2 et $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$. Exprimez $\displaystyle\int_{x_0}^{x_1} P(x)\, \mathrm{d}x$ en fonction de a_0, a_1, a_2, x_0 et x_1. (1 point)

Exercice 13 : Intégration et changement de variable (2 points)

Rappel : Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. On dit que $F : I \to \mathbb{R}$ est une primitive de $f : I \to \mathbb{R}$ si $F' = f$ sur I (f est la dérivée de F sur I). Si F et G sont deux primitives d'une même fonction f alors $F - G$ est une fonction constante (car $(F - G)' = F' - G' = f - f = 0$).

Soient I, J des intervalles ouverts de $\mathbb{R}$, $a, b \in I$, $\varphi \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ (dérivable de dérivée continue) et $f : J \to \mathbb{R}$ continue tels que $\varphi(I) \subset J$ ($\varphi(I)$ est incluse dans J).

On cherche à montrer dans cet exercice la formule de changement de variable :

$$\int_a^b f(\varphi(t)) \times \varphi'(t)\, \mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\, \mathrm{d}x.$$

1. Justifiez que les fonctions $F \circ \varphi : I \to \mathbb{R}$ et $G : I \to \mathbb{R}$ sont des primitives de $(f \circ \varphi) \times \varphi' : I \to \mathbb{R}$ (où $\circ$ désigne la composition), avec $F : y \mapsto \displaystyle\int_{\varphi(a)}^{y} f(x)\, \mathrm{d}x$ et $G : s \mapsto \displaystyle\int_a^s f(\varphi(t)) \times \varphi'(t)\, \mathrm{d}t$. (1 point)

2. Déduisez-en que $F \circ \varphi = G$ sur I et la formule de changement de variable. (1 point)

Exercice 14 : Calculs d'intégrales (2 points)

1. Calculez l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\, \mathrm{d}x$. (1 point)

2. Calculez l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x \exp(x)\, \mathrm{d}x$ grâce à une intégration par parties. (1 point)

Exercice 15 : Calcul de l'intégrale d'une fraction rationnelle (4 points)

Rappel : La dérivée du logarithme ln est $x \mapsto \frac{1}{x}$ et la dérivée de l'arctangente arctan est $x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$.

On cherche à calculer dans cet exercice l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x^2+1)}\, \mathrm{d}x$.

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R} \backslash \{-1\}$, $\frac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{ax}{x^2+1} + \frac{b}{x^2+1} + \frac{c}{x+1}$ (on sait que a, b, c existent et sont uniques d'après un théorème d'algèbre (la décomposition en éléments simples des fractions rationnelles)).

1. En utilisant que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{x^2+1} = \frac{ax(x+1)}{x^2+1} + \frac{b(x+1)}{x^2+1} + c$, montrez que $c = \frac{1}{2}$. (0,5 point)

2. Montrez que $b = \frac{1}{2}$. (0,5 point)

3. Montrez que $a = -\frac{1}{2}$. (0,5 point)

4. Calculez $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x+1}\, \mathrm{d}x$. (0,5 point)

5. Calculez $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\, \mathrm{d}x$. (0,5 point)

6. Calculez $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\, \mathrm{d}x$ (il peut être utile de remarquer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\, \mathrm{d}x$). (1 point)

7. Calculez grâce aux questions précédentes l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x^2+1)}\, \mathrm{d}x$. (0,5 point)