Théorie motivique des nœuds

Clémentine Lemarié--Rieusset (Université de Bourgogne)

18 Novembre 2022

La géométrie algébrique en quelques mots

Soit F un corps (parfait). **Objets d'étude classiques de la géométrie algébrique** : les sous-ensembles de F^n qui sont les zéros de polynômes et leurs complémentaires, par exemple :

- F^n (pas de polynôme) ;
- le cercle unité $\{(x, y) \in F^2, x^2 + y^2 - 1 = 0\}$ (1 polynôme) ;
- la diagonale $\{(x, y) \in F^2, x - y = 0\}$ (1 polynôme) ;
- leur intersection $\{(x, y) \in F^2, x^2 + y^2 - 1 = 0, x - y = 0\}$ (2 poly) ;
- l'origine $\{0\} \subset F^2$: $\{(x, y) \in F^2, x = 0, y = 0\}$ (2 poly) ;
- $F^2 \setminus \{0\}$...

Dans la pratique, on remplace ces sous-ensembles de F^n par des schémas, par ex. F^n est remplacé par l'espace affine $\mathbb{A}_F^n$ de dimension n et $F^n \setminus \{0\}$ est remplacé par le schéma $\mathbb{A}_F^n \setminus \{0\}$.

La théorie des nœuds en quelques mots et dessins

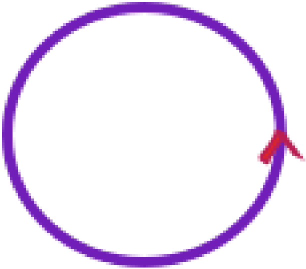


FIGURE – Le nœud trivial

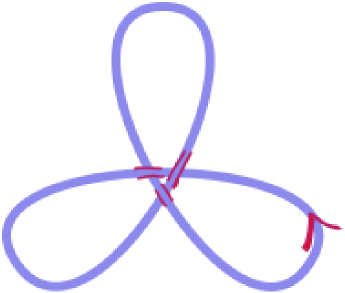


FIGURE – Le nœud trèfle

- Un **nœud** est un sous-espace topologique (fermé) de la 3-sphère $\mathbb{S}^3$ qui est homéomorphe au cercle $\mathbb{S}^1$. On peut aussi le voir dans $\mathbb{R}^3$.

- Un **nœud** est un sous-espace topologique (fermé) de la 3-sphère $\mathbb{S}^3$ qui est homéomorphe au cercle $\mathbb{S}^1$. On peut aussi le voir dans $\mathbb{R}^3$.
- Un **nœud orienté** est un nœud muni d'une trivialisation locale "continue" de son fibré tangent (ou de son fibré normal, l'espace ambiant étant orienté). Il y a deux classes d'orientation.

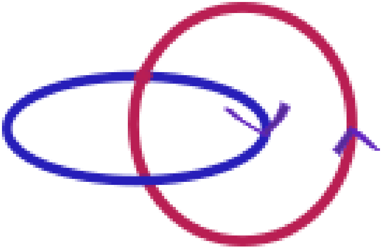


FIGURE – L'entrelacs de Hopf

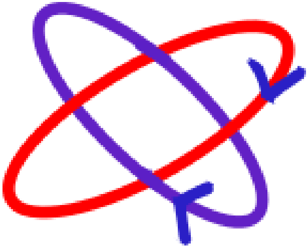


FIGURE – L'entrelacs de Salomon

- Un **entrelacs** est une réunion finie de nœuds disjoints. Un entrelacs est **orienté** si toutes ses composantes (i.e. ses nœuds) sont orientées.

- Un **entrelacs** est une réunion finie de nœuds disjoints. Un entrelacs est **orienté** si toutes ses composantes (i.e. ses nœuds) sont orientées.
- L'**enlacement** d'un entrelacs (orienté) à deux composantes est le nombre de fois qu'une des composantes tourne autour de l'autre composante.

- Un **entrelacs** est une réunion finie de nœuds disjoints. Un entrelacs est **orienté** si toutes ses composantes (i.e. ses nœuds) sont orientées.
- L'**enlacement** d'un entrelacs (orienté) à deux composantes est le nombre de fois qu'une des composantes tourne autour de l'autre composante.
- L'enlacement peut être décrit de manière plus algébrique grâce à la théorie (usuelle) de l'homotopie (et de l'homologie / la cohomologie).

La théorie de l'homotopie motivique en quelques mots

La théorie de l'homotopie motivique (ou $\mathbb{A}^1$-homotopie) est une théorie de l'homotopie sur les schémas lisses de type fini sur un schéma "gentil" (dans notre cas $\mathrm{Spec}(F)$ avec F un corps parfait).

L'idée est de remplacer le segment $[0,1]$ par la droite affine $\mathbb{A}^1_F$.

Concrètement

On a des outils pour faire en géométrie algébrique des choses similaires à ce qu'on pourrait faire en topologie (usuelle), notamment en théorie des nœuds.

Nœuds et entrelacs en géométrie algébrique

Pour tout $n \geq 1$, $\mathbb{S}^n$ a même type d'homotopie que $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$.

Pour tout $n \geq 1$, $\mathbb{S}^n$ a même type d'homotopie que $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$.

Nœud

Un nœud est une immersion fermée $\varphi : \mathbb{A}^2_F \setminus \{0\} \to \mathbb{A}^4_F \setminus \{0\}$.

C'est donc un sous-schéma fermé de $\mathbb{A}^4_F \setminus \{0\}$ qui est isomorphe à $\mathbb{A}^2_F \setminus \{0\}$ et est muni d'une paramétrisation (un isomorphisme avec $\mathbb{A}^2_F \setminus \{0\}$).

Nœuds et entrelacs en géométrie algébrique

Pour tout $n \geq 1$, $\mathbb{S}^n$ a même type d'homotopie que $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$.

Nœud

Un nœud est une immersion fermée $\varphi : \mathbb{A}^2_F \setminus \{0\} \to \mathbb{A}^4_F \setminus \{0\}$.

C'est donc un sous-schéma fermé de $\mathbb{A}^4_F \setminus \{0\}$ qui est isomorphe à $\mathbb{A}^2_F \setminus \{0\}$ et est muni d'une paramétrisation (un isomorphisme avec $\mathbb{A}^2_F \setminus \{0\}$).

Entrelacs à deux composantes

Un entrelacs à deux composantes est un couple de nœuds $\varphi_i : \mathbb{A}^2_F \setminus \{0\} \to \mathbb{A}^4_F \setminus \{0\}$ d'images Z_i disjointes (où $i \in \{1, 2\}$).

L'entrelacs de Hopf

On fixe un corps (parfait) F (de caractéristique différente de 2) et on fixe des coordonnées x, y, z, t pour $\mathbb{A}^4_F$ et u, v pour $\mathbb{A}^2_F$ une bonne fois pour toutes.

- L'image de l'entrelacs de Hopf est :

$$\{z = x, t = y\} \sqcup \{z = -x, t = -y\} \subset \mathbb{A}^4_F \setminus \{0\}$$

L'entrelacs de Hopf

On fixe un corps (parfait) F (de caractéristique différente de 2) et on fixe des coordonnées x, y, z, t pour $\mathbb{A}^4_F$ et u, v pour $\mathbb{A}^2_F$ une bonne fois pour toutes.

- L'image de l'entrelacs de Hopf est :

$$\{z = x, t = y\} \sqcup \{z = -x, t = -y\} \subset \mathbb{A}^4_F \setminus \{0\}$$

- Sa paramétrisation est :
  $\varphi_1 : (x, y, z, t) \leftrightarrow (u, v, u, v), \varphi_2 : (x, y, z, t) \leftrightarrow (u, v, -u, -v)$

L'entrelacs de Hopf

On fixe un corps (parfait) F (de caractéristique différente de 2) et on fixe des coordonnées x, y, z, t pour $\mathbb{A}_F^4$ et u, v pour $\mathbb{A}_F^2$ une bonne fois pour toutes.

- L'image de l'entrelacs de Hopf est :

$$\{z = x, t = y\} \sqcup \{z = -x, t = -y\} \subset \mathbb{A}_F^4 \setminus \{0\}$$

- Sa paramétrisation est :
  $\varphi_1 : (x, y, z, t) \leftrightarrow (u, v, u, v), \varphi_2 : (x, y, z, t) \leftrightarrow (u, v, -u, -v)$
- C'est un analogue de l'entrelacs de Hopf en théorie des nœuds ! En effet, l'entrelacs de Hopf en théorie des nœuds est donné par les équations $\{z = x, t = y\} \sqcup \{z = -x, t = -y\}$ dans $\mathbb{S}_\varepsilon^3 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = \varepsilon^2\}$ avec $\varepsilon > 0$ suffisamment petit.

Nœuds et entrelacs orientés en géométrie algébrique

Une orientation d'une immersion fermée $\mathbb{A}^2_F \setminus \{0\} \to \mathbb{A}^4_F \setminus \{0\}$ (un nœud) est une "trivialisation" de son fibré normal.

Intuition

Pensez au fibré normal d'un nœud comme à un espace vectoriel de dimension 2 et à une trivialisation de ce fibré normal comme à une base de cet espace vectoriel.

Un nœud orienté est un nœud muni d'une classe (d'équivalence) d'orientation. Un entrelacs orienté est un entrelacs dont toutes les composantes (les nœuds) sont munies de classes d'orientation.

L'entrelacs orienté de Hopf

- L'image de l'entrelacs de Hopf est :

$$\{z = x, t = y\} \sqcup \{z = -x, t = -y\} \subset \mathbb{A}^4_F \setminus \{0\}$$

- Sa paramétrisation est :
  $\varphi_1 : (x, y, z, t) \leftrightarrow (u, v, u, v), \varphi_2 : (x, y, z, t) \leftrightarrow (u, v, -u, -v)$
- Son orientation est :

$$o_1 : \overline{z - x}^* \wedge \overline{t - y}^* \mapsto 1, o_2 : \overline{z + x}^* \wedge \overline{t + y}^* \mapsto 1$$

Classes d'orientation

Fait

Les classes d'orientation sont paramétrées par les éléments de $F^*/(F^*)^2$ (où $(F^*)^2 = \{a \in F^*, \exists b \in F^*, a = b^2\}$).

Si $F = \mathbb{R}$ alors $F^*/(F^*)^2$ a deux éléments.

Si $F = \mathbb{C}$ alors $F^*/(F^*)^2$ a un élément.

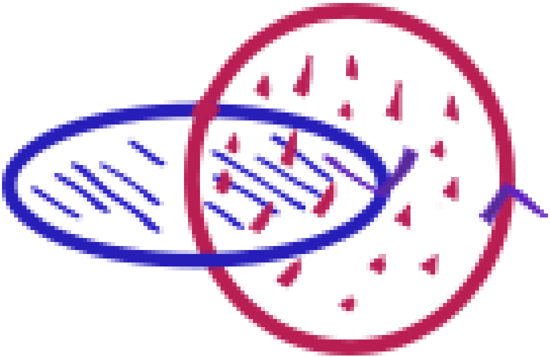
Classes d'orientation

Fait

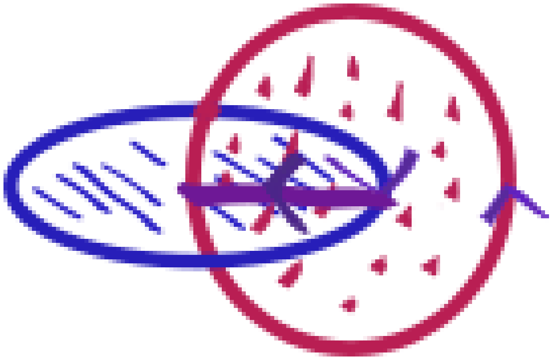
Les classes d'orientation sont paramétrées par les éléments de $F^*/(F^*)^2$ (où $(F^*)^2 = \{a \in F^*, \exists b \in F^*, a = b^2\}$).

Si $F = \mathbb{R}$ alors $F^*/(F^*)^2$ a deux éléments.
Si $F = \mathbb{C}$ alors $F^*/(F^*)^2$ a un élément.
Si $F = \mathbb{Q}$ alors $F^*/(F^*)^2$ a une infinité d'éléments (les classes des entiers sans facteur carré).

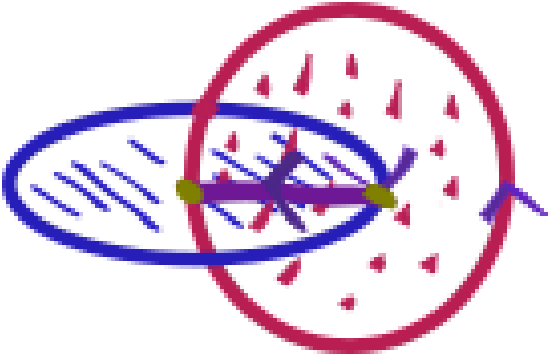
L'enlacement en trois dessins : les surfaces de Seifert



L'enlacement en trois dessins : l'intersection des surfaces de Seifert



L'enlacement en trois dessins : le bord de l'intersection des surfaces de Seifert



L'enlacement quadratique

Analogue de l'enlacement en géométrie algébrique

L'enlacement quadratique est à valeurs dans $\mathrm{W}(F) \oplus \mathrm{W}(F)$ (et non $\mathbb{Z}$ comme l'enlacement).

Le groupe $\mathrm{W}(F)$ est le groupe de Witt de F. Ses éléments sont des classes d'équivalence de formes bilinéaires symétriques sur F. Si F est de caractéristique différente de 2 (i.e. $2 \neq 0$ dans F) alors les éléments de $\mathrm{W}(F)$ sont des classes d'équivalence de formes quadratiques sur F. Dorénavant, sauf mention contraire, F est un corps (parfait) de caractéristique différente de 2.

Rappels sur les formes quadratiques

Une forme quadratique sur F est une application $V \to F$, où V est un F-espace vectoriel de dimension finie, telle que

$$b : \begin{cases} V \times V & \to & F \\ (x, y) & \mapsto & \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y)) \end{cases}$$

est une forme bilinéaire symétrique telle que : $\forall x \in V, b(x, x) = q(x)$.

Concrètement

- $V = \{0\}$: $q : 0 \mapsto 0$
- $V = F$: $q : x \mapsto ax^2$ pour un certain $a \in F$
- $V = F^2$: $q : (x, y) \mapsto ax^2 + by^2 + cxy$ pour certains $a, b, c \in F$
- ...

Le groupe de Witt de F est engendré par les classes d'équivalence $\langle a \rangle$ de $x \mapsto ax^2$ avec $a \in F^*$, où $\langle a \rangle + \langle b \rangle$ est la classe d'équivalence de $(x, y) \mapsto ax^2 + by^2$. Les relations suivantes sont vraies dans $\mathrm{W}(F)$ (et en donnent une présentation) :

- $\langle ab^2 \rangle = \langle a \rangle$ for all $a, b \in F^*$;
- $\langle a \rangle + \langle b \rangle = \langle a + b \rangle + \langle (a + b)ab \rangle$ for all $a, b \in F^*$ such that $a + b \in F^*$;
- $\langle 1 \rangle + \langle -1 \rangle = 0$.

Exemples de groupes de Witt

- $\mathrm{W}(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ via le rang modulo 2 (où le rang de $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \langle a_i \rangle$ est n)
- $\mathrm{W}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{Z}$ via la signature (où la signature de $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \langle 1 \rangle + \sum_{j=1}^{q} \langle -1 \rangle$ est $p - q$)
- $\mathrm{W}(\mathbb{Q}) \simeq \mathrm{W}(\mathbb{R}) \oplus \bigoplus_{p \text{ premier}} \mathrm{W}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ via $\langle a \rangle \mapsto \langle a \rangle + \sum_{p \text{ diviseur premier de } a} \langle \overline{\frac{a}{p}} \rangle$

L'entrelacs orienté de Hopf

- L'image de l'entrelacs de Hopf est :

$$\{z = x, t = y\} \sqcup \{z = -x, t = -y\} \subset \mathbb{A}^4_F \setminus \{0\}$$

- Sa paramétrisation est :
  $\varphi_1 : (x, y, z, t) \leftrightarrow (u, v, u, v), \varphi_2 : (x, y, z, t) \leftrightarrow (u, v, -u, -v)$
- Son orientation est :

$$o_1 : \overline{z - x}^* \wedge \overline{t - y}^* \mapsto 1, o_2 : \overline{z + x}^* \wedge \overline{t + y}^* \mapsto 1$$

L'entrelacs orienté de Hopf

- L'image de l'entrelacs de Hopf est :

$$\{z = x, t = y\} \sqcup \{z = -x, t = -y\} \subset \mathbb{A}^4_F \setminus \{0\}$$

- Sa paramétrisation est :
  $\varphi_1 : (x, y, z, t) \leftrightarrow (u, v, u, v), \varphi_2 : (x, y, z, t) \leftrightarrow (u, v, -u, -v)$
- Son orientation est :

$$o_1 : \overline{z - x}^* \wedge \overline{t - y}^* \mapsto 1, o_2 : \overline{z + x}^* \wedge \overline{t + y}^* \mapsto 1$$

- Son enlacement quadratique est $(\langle 1 \rangle, \langle -1 \rangle) \in \mathrm{W}(F) \oplus \mathrm{W}(F)$.

L'entrelacs orienté de Hopf

- L'image de l'entrelacs de Hopf est :

$$\{z = x, t = y\} \sqcup \{z = -x, t = -y\} \subset \mathbb{A}^4_F \setminus \{0\}$$

- Sa paramétrisation est :
$\varphi_1 : (x, y, z, t) \leftrightarrow (u, v, u, v), \varphi_2 : (x, y, z, t) \leftrightarrow (u, v, -u, -v)$
- Son orientation est :

$$o_1 : \overline{z - x}^* \wedge \overline{t - y}^* \mapsto 1, o_2 : \overline{z + x}^* \wedge \overline{t + y}^* \mapsto 1$$

- Son enlacement quadratique est $(\langle 1 \rangle, \langle -1 \rangle) \in \mathrm{W}(F) \oplus \mathrm{W}(F)$.
- Si on change sa paramétrisation ou son orientation, son enlacement quadratique est $(\langle a \rangle, \langle b \rangle) \in \mathrm{W}(F) \oplus \mathrm{W}(F)$ avec $a, b \in F^*$.

Tout ce que j'ai présenté de nouveau est dans mon preprint “The quadratic linking degree” :

- HAL : Clémentine Lemarié−−Rieusset. THE QUADRATIC LINKING DEGREE. 2022. ⟨hal-03821736⟩
- arXiv : Clémentine Lemarié−−Rieusset. The quadratic linking degree. arXiv :2210.11048 [math.AG]

Tout ce que j'ai présenté de nouveau est dans mon preprint “The quadratic linking degree” :

- HAL : Clémentine Lemarié−−Rieusset. THE QUADRATIC LINKING DEGREE. 2022. ⟨hal-03821736⟩
- arXiv : Clémentine Lemarié−−Rieusset. The quadratic linking degree. arXiv :2210.11048 [math.AG]

Merci pour votre attention !